NAUKA MATEMATYKI.

do użycia

ARTYLERYI FRANCUZKIEY

napiſana przez P. Bezout

Towarzyſza Akademij Nauk, i Marynarſkiéy &c.

a dla pożytku poſpolitego, oſobliwiéy dla

KORPUSU ARTYLERYI NARODOWEY

na Polſki ięzyk

PRZEŁOZONA

z Rozſkazu i Nakładém

JEGO KROLEWSKIEY MCI.

PANA NASZEGO MIŁOSCIWEGO

do druku

PODANA

TOM DRUGI.

Zawiéraiący w ſobie Algebrę, i przyſtóſowanie Algebry do Jeometryi.

W WARSZAWIE
W DRUKARNI XX. MISSYONARZOW.
R. P. M. DCC. LXXXI.

ZBIOR

Wyrazów Polskich użytych w tym drugim Tomie, albo nowych albo mało znaiomych, niepowtarzaiąc tych, które iuż położyły się na początku Piérwszego Tomu.

Część zrównania 1a, 2ga.	*Membrum.*
Głoska - - -	*Litera.*
Kóńcotyczne w Hiperboli.	*Assimptoti.*
Międzyległa. - - -	*Subnormalis.*
Nawias. - - -	*Parenthesis.*
Nieokréślone liniie. -	*Indeterminatæ.*
Niepiérwiastkówa ilość. -	*Quantitas rationalis.*
Odbicia kąt. - -	*Angulus reflexionis.*
Odcinek. - - -	*Abscissa.*
Oś odcinków. - -	*Axis abscissarum.*
Padniénia kąt. - -	*Angulus incidentiæ.*
Palirzędna. - - -	*Parameter.*
Piérwiastkowa ilość. -	*Quantitas Radicalis.*
Piérwiastkowy znak. -	*Signum radicale.*
Początek odcinków. -	*Origo abscissarum.*
Podtyczna. - - -	*Subtangens.*
Przecięcia albo Przecinki stożkowe. -	*Sectiones Conicæ.*
Przybliżony przypadek w Algebrze. -	*Casus irreductibilis.*

Przy-

Przyrodna ważność.	-	*Gravitas specifica.*
Przytyczna.	-	*Normalis.*
Reguła mieszaniny.	-	*Regula alligationis.*
Rozbiór.	-	*Analysis.*
Rzęd wyrazów, progresyi.	-	*Series.*
Rzędna.	-	*Ordinata.*
Spółczynnik.	-	*Coefficiens.*
Spółmierny.	-	*Commensurabilis.*
Spółrzędne.	-	*Coordinatæ.*
Srzednica.	-	*Diameter.*
Srzednica dostawna.	-	*Diameter conjugata.*
Srzódpał.	-	*Focus.*
Tosamość.	-	*Identitas.*
Wielostowna ilość.	-	*Polynomium.*
Wykładnik.	-	*Exponens.*
Zebranie.	-	*Reductio.*
Zrównanie.	-	*Equatio.*

O AL-

O ALGEBRZE.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

W którym daią się fundamenta rachówania ilościów Algebraicznych.

1. Célém téy nauki, którą nazywaią *Algebrą*, iest podać sposoby wynalezienia reguł powszechnych, do rozwiązania wszelkich zagadnień, iakie tylko trafić się mogą względém ilościów.

Te reguły żeby były powszechnémi, niepowinny zależyć od osobnych wártości ilościów podpadaiących pod uwagę, ale

ale raczéy od treści ſamego zagadniénia, i powinny ſłużyć do wſzelkich zagadniéń, które ſą iednakowego rodzaiu.

Za tém naſtępuie, iż Algebra w oznaczaniu ilościów, niémoże używać tychże ſamych charakterów i znaków, co Arytmetyka. Jakóż doſzedłſzy iakiego wypadku przez reguły Arytmetyki, niezoſtanie w umyśle, żadnego śladu téy drogi, którą przyſzło ſię do takowego wypadku. *Np.* z iednego lub więcéy działań Arytmetycznych, wypadła liczba 12, w tych 12 niewidać żadnego śladu, ieżeli powſtały z rozmnożenia 3 przez 4, albo 2 przez 6, czy z dodania 5 do 7, albo 2 do 10, albo w powſzechności, bądź z iakiegokolwiek związku działań przedſięwziętych. Arytmetyka daie ſpoſoby do wynaleziénia pewnych wypadków, ale te wypadki czynić reguł niémogą. Algebra powinna to oboie wypełnić; tym końcém ona wyſtawia nam ilości, przez znaki powſzechne, (iakiémi ſą *głoski* Abecadła (litera), które niémaiąc żadnego związku ſzczególniéyſzego, raczéy z iedną iak z drugą liczbą, oznaczaią to co chcemy, albo co należy ażeby oznaczały. Te znaki zawſze przytomne oczóm naſzym, w całym przeciągu rachunku, przyimuią na ſiebie (że tak powiém), piętno tych działań przez które przechodzą, albo przynaymniéy w wypadkach wynikaiących z takowych działań, wſkazuią nam tór téy drogi, którey trzymać ſię potrzeba, ażeby dóyśdź zamiérzonego célu nayprościéyſzemi ſpoſobami. Niemyślimy tu, obſzérniéy rozwodzić tego letkiego wyobrażenia Algebry, dalſza oſnowa niniéyſzégo dzieła, ieſt na to wyznaczona.

W Algebrze, nietylko ilości oznaczaią ſię znakami powſzechnémi, ale téż oraz oznacza ſię ſpoſób ieſteſtwa iednych względém drugich, i różne działania, które maią bydź z niémi przedſięwzięte: ſłowém, wſzyſtko ieſt oznaczeniém; i gdy mówi ſię, że czyniémy działanie to tylko znaczy, że daiémy ilości nową poſtać. Takowe różne ſpoſoby oznaczenia tego wſzyſtkiego co ściągać ſię może do ilościów, opiſzą ſię w dalſzym przeciągu na ſwoich miéyſcach.

O *działaniach fundamentalnych, z ilościami uważonémi w powſzechności.*

2. W Algebrze, z ilościami wyrażonémi przez głoſki, czynić ſię zwykły podobne tym działania, które czynią ſię

ſię w Arytmetyce z liczbami, to ieſt że dodaią ſię, odéymuią, rozmnażaią, dzielą ſię, i. t. d. ale te działania w tém różnią ſię od Arytmetycznych, że częſtokroć wypadki ich, ſą tylko wſkazaniém działań Arytmetycznych.

O dodawaniu i odéymowaniu.

3. Dodawanie ilościów ſobie podobnych, niepotrzebuie żadnéy reguły: iawna ieſt że chcąc dodać ilość wyrażoną przez a, do podobnéyże drugiéy ilości a, trzeba napiſać $2a$; żeby dodać $2a$ do $3a$, napiſze ſię $5a$, i. t. d.

Co ſię tknie ilościów, które ſobie nieſą podobne, i które zawſze oznaczać ſię zwykły różnémi głoſkami, w takowych dodanie tylko wſkazuie ſię, przy pomocy znaku + który wymawia ſię *więcéy.*

Tak maiąc dodać ilość wyrażoną przez a, do drugiéy ilości wyrażonéy przez b, nietrzeba tylko napiſać $a+b$; w takim razie, niepoznaie ſię wátość tego wypadku, chyba wiedząc oſobne wártości ilościów oznaczonych przez a i przez b; ieżeli a ieſt wárto 5, a b, 12, tedy $a+b$, będzie wárto 17.

Podobnież maiąc dodać $5a+3b$

do $9a+2c$

do $9b+3d$

Napiſze ſię: $5a+3b+9a+2c+9b+3d$

co przemiéni ſię, połączywſzy ilości ſobie podobne, w naſtępuiący wyráz. $14a+12b+2c+3d$.

4. Względém odéymowania, można powiedzieć toż ſamo, co ſię rzekło o dodawaniu. Jeżeli ilości ſą ſobie podobne, nietrzeba żadnéy reguły: iawna ieſt, że odéymuiąc $2a$, od $5a$, zoſtanie ſię $3a$.

Lecz ieżeli ilości niebędą ſobie podobne, to odéymowanie tylko wſkazuie ſię, przy pomocy znaku —, który wymawia ſię mniéy.

Tak maiąc odiąć b od a, piſze ſię $a-b$.
Zeby odiąć $3b$ od $5a$ napiſze ſię $5a-3b$.
Jeżeli od - - - - - $9a+6b$
ma bydź odięto - - - $5a+4b$.

Napiſze ſię - $9a+6b-5a-4b$.
Co przemiénia ſię na - - - $4a+2b$
połączywſzy ilości iednakowe, co nazywa ſię *zebrać, pozbiérać,* (reducere).

5 Liczba położona przed głoſką, nazywa ſię *ſpółczynnik* téy głoſki (coefficiens); tak w wyrazie $3b$, 3 ſą ſpółczynnikiém głoſki b. Kiedy iaka głoſka, ma mieć za ſpółczynnika 1, natenczas, takowy ſpółczynnik niepiſze ſię: i tak odiąwſzy $2a$, od $3a$, zoſtaie $1a$, ale piſze ſię tylko a. Trzeba więc o tém pamiętać, i nierozumiéć żeby ſpółczynnikiém głoſki było zero, kiedy ſpółczynnika niéma napiſanego, bo w ten czas iedność, to ieſt 1, ieſt takowym ſpółczynnikiém.

6. Mało na tém zależy, w iakim porządku będą napiſane ilości, które maią dodawać ſię albo odéymować; żeby dodać a do b, można zarówno piſać $a + b$, albo $b + a$; odéymuiąc także b od a, można podobnież napiſać $a - b$, albo $-b + a$.

7. Uważmy ieſzcze i to, że gdy ilość niéma żadnego znaku, należy dorozumiéwać ſię że ma znak $+$; a znaczy toż ſamo, co $+a$. Poſzło w zwyczay, opuſzczać znak, każdéy ilości na początku wyrazu położonéy, która ma miéć znak $+$; gdyby iéy zaś należał ſię znak $-$, natenczas nietrzeba go opuſzczać.

8. Gdy po ſkończoném działaniu czyni ſię *zebranie* (reductio), trafić ſię może, że ilość poprzédzona znakiem $-$, miéć będzie większego ſpółczynnika, iak podobnaż ilość poprzédzona znakiém $+$; lecz w każdym razie, działanie ſtóſować ſię powinno do téy powſzechnéy reguły: *Dodawanie ilościów Algebraicznych odprawia ſię, piſząc części ich iedne po drugich, z takiémi znakami iakie maią: potém ilości iednakowe zbiéraią ſię w iedne, zgromadzaiąc z iednéy ſtrony, wſzyſtkie poprzédzone znakiem $+$, a z drugiéy ſtrony wſzyſtkie poprzédzone znakiém $-$; naoſtatek, mniéyſzy wypadek z tych dwóch, odéymuie ſię od większego, a reſzcie daie ſię znak taki iaki miał większy wypadek.*

Np. ieżeli na końcu działania wypadnie $14a + 12b + 2c + 3da + b + 4d - 4c$; zbiorą ſię te ilości na $15a + 13b - 2c + 7d$; gdzie zamiaſt $2c - 4c$, iak było pierwéy piſze ſię $-2c$. Albowiém maiąc odiąć $4c$, od ilości w którey nieznayduie ſię tylko $2c$, trzeba naznaczyć, że zoſtaie ſię ieſzcze $2c$ do odięcia z całkowitości innych ilościów.

PRZYKŁAD.

Maiąc dodać cztéry ilości naſtępuiące.

$$\begin{array}{c} 5a + 3b - 4c \\ 2a - 5b + 6c + 2d. \\ a - 4b - 2c + 3e \\ 7a + 4b - 3c - 6e. \\ \hline \end{array}$$

Summa. $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e.$

Uczyniwſzy zebranie; zbierze ſię z ilościów a, $15a$; co do ilościów b, maiąc z iednéy ſtrony $+7b$, a z drugiéy ſtrony $-9b$, zoſtanie reſzty $-2b$; w ilościach c, maiąc z iednéy ſtrony $-9c$, a z drugiéy $+6c$, będzie reſzta $-3c$; tymże ſpoſobém zbiéraiąc inne ilości, zrobi ſię naſtępuiący wypadek: – – $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9. Ilości oddzielone znakami $+$ i $-$, nazywaią ſię *wyrazami* ilościów, których ſkładaią części.

10. Ilość nazywa ſię, *iednosłowna*, *dwusłowna*, *trzysłowna*, i. t. d. (monomium, binomium &c), kiedy ſkłada ſię z iednego, dwóch, trzech, i. t. d. wyrazów: ilość złożona z wielu wyrazów, których liczba nieieſt określona, nazywa ſię w powſzechności *wielosłowna* (polinomium).

11·

11. Co ſię tknié odéymówania iloſciów Algebraicznych, do tego ſłuży powſzechna reguła naſtępuiąca. *Trzeba odmiénić znaki wyrazów téy iłości, któ a ma bydź odięta, to ieſt, zamiaſt + położyć —, a zamiaſt — położyć +; potém iłość tak odmiénioną, dodać do téy iłości, od któréy ma bydź odięta, i uczynić zebranie.*

PRZYKŁAD.

Od	- -	$6a - 3b + 4c$
Ma bydź odięto	-	$5a - 5b + 6c.$
Piſze ſię	-	$6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$
Po zebraniu będzie	-	$a + 2b - 2c.$

Zeby poiąć przyczynę téy reguły, obierzmy ſobie proſciéyſzy przykład. Daymy że od a ma bydź odięto b; iawna ieſt, iż trzeba napiſać $a - b$; lecz gdyby przyſzło, od a odiać $b - c$; powiedziało ſię, że trzeba napiſać $a - b + c$: iakóż oczywiſta ieſt, że nie całe b powinno bydź odięte, ale tylko b zmniéyſzone o c, ieżeli tedy odéymie ſię z razu całe b, piſząc $a - b$, trzeba potém nadgrodzić tę iłość, o którą zawiele odięło ſię, to ieſt że trzeba przydać c, i napiſać $a - b + c$; co wychodzi na to, zeby odmiénić znaki wſzyſtkich iłościów, które maią bydź odięte.

12.

12. Iłości poprzédzone znakiém +, nazywaią ſię iłości *twiérdzące* (poſitivus); iłości zaś poprzédzone znakiém —, ſą iłości *przéczące* (negativus). Rozbierzemy potém nieco obſzérniéy, iſtotę i użycie tych iłościów, uważaiąc ie z oſobna, iedne naprzeciw drugim.

O mnożeniu.

13. Mnożenie Algebraiczne, wyciąga pewnych uwag ſzczególniéyſzych, które nieſą potrzebne w mnożeniu Arytmetyczném: oprócz iłościów, należy ieſzcze dać baczenie na znaki.

W reſzcie maiąc wzgląd na wártości liczebne, iłościów wyrażonych przez głoſki, można ſobie uczynić, toż ſamo wyobrażenie mnożenia Algebraicznego, co i mnożenia Arytmetycznego: tak mnożyć a przez b, ieſt to powtórzyć iłość oznaczoną przez a tyle razy, ile znayduie ſię iedności w iłości oznaczonéy przez b.

14. Lecz ponieważ tu ieſt zamiarém naſzym, odprawiać albo oznaczać mnożenie, bez względu na wártości liczebne, przeto trzeba żebyśmy uſtanowili znaki, którémi wſkazówać ſię ma to mnożenie.

O-

Oprócz znaku $\times$ który podáł ſię w Arytmetyce, używa ſię także punktu położonego między dwiéma ilościami, maiącèmi mnożyć ſię; tak że $a.b$, albo $a \times b$, znaczy toż ſamo.

Znaczy ſię ieſzcze mnożenie, (przynaymniéy w ilościach iednoſłownych), niekładąc żadnego znaku, między mnożnym i mnożnikiém; tak: $a \times b$, $a.b$, ab, ſą trzy wyrażenia, z których każde znaczy, że trzeba rozmnożyć a przez b; oſtatni ſpoſób, ieſt poſpoliciéy używany.

15. Żeby rozmnożyć ab przez c, piſze ſię abc; mnożąc ab przez cd, piſze ſię $abcd$ i.t.d: mało na tém zależy, w iakimkolwiek porządku napiſzą ſię te głoſki: albowiém takowe, bądź iakim ſpodoba ſię porządkiém będą rozmnożone, zawſze dadzą w wypadku też ſamę mnogość.

16. Z tego ſpoſobu, dopiéro opiſanego, w iaki oznacza ſię mnożenie ilościow iednoſłownych, trzeba ſobie wnieść: *Że mnogość powſtaiąca z rozmnożenia wielu ilościów Algebraicznych iednosłownych, powinna zawiérać w ſobie wſzyſtkie głoski składaiące tak mnożnego, iak mnożnika.*

17. Kiedy ilości, które maią bydź rozmnożone, ſkładaią ſię z iednéyże głoſki,

ſki, takowa głoſka, w mnogości znaydówać ſię muſi tyle razy napiſana, ile razy ieſt położona w obu czynnikach; liczba ilościów mnożnych, niech będzie iaka chce.

Tak a. rozmnożone przez a, daie aa; aa rozmnożone przez aaa, daie $aaaaa$; aa rozmnożone przez aaa, i ieſzcze przez a, daie $aaaaaa$.

W takim razie, zgodzono ſię na to, ażeby takową głoſkę napiſać tylko ráz, przydaiąc iéy przyzwoitą cyfrę, która nazywa ſię *wykładnik* (exponens), i która piſze ſię po prawéy ręce głoſki, nieco powyżéy; ten wykładnik wyraża, wiele razy taż głoſka była czynnikiém, albo wiele razy powinnaby bydź napiſana.

I tak zamiaſt aa, piſać ſię będzie a^2, zamiaſt aaa, napiſze ſię a^3, zamiaſt $aaaaa$, napiſze ſię a^5, i. t. d.

Trzeba to należycie wbić ſobie w pamięć: *Że wykładnik głoski, znaczy wiele razy ta głoska, była czynnikiém w mnogości.*

W ilości a^3b^2c, ſą trzy czynniki różnéy wartości, to ieſt a, b, c; ale z tych trzech głoſek piérwſza, była czynnikiém trzy razy, druga dwa razy, a trzecia ráz: iakóż a^3b^2c, ieſt wárto tak wiele, iak $aaabbc$.

18. Ponieważ wykładnik oznacza, wiele razy ilość iakowa była czynnikiém, prze-

przeto pokazuie oráz, do iakiego ſtopnia ta ilość ieſt podnieſiona.

Tak w a^5, wykładnik 5 znaczy, że a ieſt podnieſione do piątego ſtopnia.

19. Należy o tém dobrze pamiętać, żeby ſpółczynnika niemiéſzać z wykładnikiém, to ieſt niebrać np. a^2, za $2a$, a^3 za $3a$: albowiém w wyrażeniu $2a$, ſpółczynnik 2, oznacza że a ieſt dodane do a, to ieſt że $2a$, ſą wárte tyle co $a + a$; w wyrażeniu zaś a^2, wykładnik 2 oznacza, że głoſka powinnaby bydź wciąż napiſana dwa razy, bez żadnego znaku, to ieſt że rozumié ſię ſama przez ſiebie rozmnożona, albo że ieſt czynnikiém dwa razy; ſłowem a^2, znaczy tyle co $a \times a$, tak iż ieżeli a, wárto np. 5, $2a$ będą wárte 10; lecz a^2, ſą wárte 25.

20. A ſtąd pokazuie ſię, *że chcąc rozmnożyć dwie ilości iednosłowne, które miałyby w ſobie ſpólne głoski, działanie może bydź skrócone, dodaiąc wykładniki głoſek iednakowych w mnożnym i mnożniku.*

Tak maiąc rozmnożyć a^5 przez a^3, napiſze ſię a^8; to ieſt piſze ſię głoſka a, dodawſzy iéy za wykładnika, ſummę dwóch wykładników $5 + 3$. Podobnież chcąc rozmnożyć, a^3b^2c, przez a^4b^3cd, napiſze ſię $a^7b^5c^2d$, kładąc naprzód wſzyſtkie rożne głoſki $abcd$, a potém daiąc piérwſzéy za wykładnika 7, to ieſt ſummę dwóch wykładników 3 i 4, drugiéy 5, albo ſummę dwóch wykładników 2 i 3, trzeciéy 2, to ieſt ſummę dwóch wykładników 1 i 1;

bo lubo wykładnik ilości c, nieieſt naznaczony, iednakże dorozumiéwać ſię powinién, gdyż c znayduie ſię czynnikiém ráz ieden.

Przeto: *Każda głoska, któréy nieieſt przydany wykładnik, ma za wykładnika* 1; *i odwrotnie, ile razy głoska ma mieć za wykładnika* 1, *w piſaniu można opuścić takiego wykładnika.*

Taka ieſt reguła ſłużąca do głoſek, w ilościach iednoſłownych.

21. Kiedy ilości iednoſłowne, ſą poprzédzone iaką cyfrą, to ieſt ſpółczynnikiém, mnożenie trzeba zacząć od ſpółczynnika, które odbywa ſię podług reguł Arytmetyki.

Tak maiąc rozmnożyć $5a$ przez $3b$, mnoży ſię naprzód 5 przez 3, a potém a przez b, i wypadnie mnogość $15ab$. Podobnież maiąc rozmnożyć $12a^3b^2$, przez $9a^4b^3$, będzie $108a^7b^5$.

22. Założywſzy te fundamenta, przyſtąpmy teráz do mnożenia ilościów wieloſłownych. W takowém mnożeniu, zachowa ſię tenże porządek, który przepiſał ſię w Arytmetyce do liczb złożonych z wielu cyfer; to ieſt że trzeba rozmnożyć koléyno, każdy wyráz mnożnego, przez każdy wyráz mnożnika, zachowuiąc reguły podane do ilościów iednoſłownych. W Algebrze, niéma konieczný potrzeby, że-

żeby iak w Arytmetyce, poczynać działanie raczéy od prawéy ku lewéy ftronie, aniżeli od lewéy ku prawéy, bo to ieft wfzyftko iedno, i owfzém my w działaniach nafzych, używać będziémy tego oftatniego fpofobu, iako wziętego w pofpolitfzy zwyczay.

PRZYKŁAD I.

Niech będzie zadano rozmnożyć $a + b$
przez $c + d$

Mnogość $ac + bc + ad + bd$.

1ód Mnoży fię a przez c, co daie (14) ac. 2re Mnoży fię b przez c, i będzie bc; dodaie fię ta druga mnogość do piérwfzéy, przy pomocy znaku $+$, i będzie $ac + bc$, to ieft mnogość z ilości $a + b$, rozmnożonéy przez c.

Mnoży fię podobnież a i b. przez d, co uczyni $ad + bd$, które dodane do piérwfzéy mnogości, nczynią $ac + bc + ad + bd$.

Jakóż mnożyć $a + b$, przez $c + d$, ieft to brać nietylko a ale oraz i b tyle rázy, ile znayduie fię iednościów w całkowitości $c + d$, to ieft tyle razy, ile ieft iednościów w c, więcéy tyle razy, ile ieft iednościów w d.

PRZYKŁAD II.

Jeft zadano rozmnożyć $a - b$
przez $c - d$.

Mnogość $ac - bc - ad + bd$.

Rozmnożywfzy a przez c, co uczyni ac, mnoży fię daléy b przez c, fkąd wypada bc; lecz zamiaft dodania téy mnogości do piérwfzéy, owfzém odéymuie fię: albowiém mnożąc całe a, iak uczyniło fię w piérwfzém działaniu, iawna ieft, że o ilość b rozmnożyło fię więcéy, iak należało, gdyż a, powinno było bydź zmniéyfzone o b; a zatém trzeba z téy mnogości odiąć ilość b rozmnożoną przez c, to ieft odiąć bc.

Podobnymże fpofobém znaydzie fię, że $a - b$ rozmnożone przez d, uczyni $ad - bd$; lecz ponieważ znak obecnego mnożnika d, ieft $-$, dla tego trzeba odiąć tę drugą mnogość od piérwfzéy, co uczyni (11) $ac - bc - ad + bd$.

Jakóż ponieważ mnożnik $c - d$, ieft mniéyfzy od c o ilość d, przeto iawna ieft, że mnożnego, trzeba powtórzyć tylko tyle razy, ile znayduie fię iednościów w c zmniéyfzoném o a; a zatém wziąwfzy $a - b$, tyle razy ile ieft iednościów w c, mnogość będzie zawielka o wártość $a - b$, powtórzoną tyle razy, ile ieft iednościów w d: więc trzeba odiąć takową mnogość, wypadłą z rozmnożenia $a - b$ przez d.

23. Wziąwfzy na uwagę, znaki wyrazów fkładaiących mnogość całkowitą $ac - bc - ad + bd$, i przyrównawfzy ie do znaków, wyrazów mnożnego i mnożnika, z których powftały, pokaże fię 1ód Ze wyraz a, w którym dorozumiéwa fię znak $+$, będąc rozmnożony przez c, w którym także dorozumiéwa fię znak $+$, dał mnogość ac, w któréy podobniéż dorozumiéwa fię znak $+$.

2re Ze wyráz b maiący znak $-$, będąc rozmnożony przez wyráz c, w którym dorozumiéwa fię znak $+$, dał mnogość bc, poprzédzoną znakiém $-$.

3cie Ze wyraz a, maiący znak $+$, rozmnożony przez wyraz d, maiący znak $-$, dał dáł mnogość ad poprzédzoną znakiem —.

4te Nakoniec, że wyráz b maiący znak —, rozmnożony przez wyraz d, maiący także znak —, dáł mnogość bd, poprzédzoną znakiem +.

A zatém, w mnożeniach tym podobnych, zawſze łatwo będzie można rozeznać, kiedy mnogości ſzczególne powinny bydź odięte, a kiedy dodane: doſyć będzie zachowáć tym końcém, dwie reguły naſtępuiące, wynikaiące z uwag poprzédzaiących.

24. *Jeżeli dwa wyrazy, które maią bydź rozmnożone, ſą poprzédzone oba podobnym znakiém, to ieſt oba maią znak +, lub oba znak —; mnogość powſtaiąca z nich, zawſze mieć będzie znak +; ieżeli zaś przeciwnie, dwa wyrazy, będą poprzédzone różnémi znakami, to ieſt ieden znakiém +, a drugi znakiem —, albo ieden znakiém —, a drugi znakiém +, mnogość powſtaiąca z nich, zawſze mieć będzie znak —.*

Przy pomocy tych reguł, odprawić można wſzelkie mnożenia Algebraiczne; lecz żeby w tém zachować iakiś porządek, naprzód trzeba dać baczenie na regułę znaków, potém na regułę ſpółczynników, a naoſtatek, na regułę głoſek i wykładników.

Zo-

Zobaczmy te wſzyſtkie reguły przyſtóſówane w naſtępuiącym przykładzie.

PRZYKŁAD III.

Jeſt zadano rozmnożyć $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$.
przez $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{rrrrrr}
5a^7 & -2a^6b & +4a^5b^2 & & & \\
 & -20a^6b & +8a^5b^2 & -16a^4b^3 & & \\
 & & & +10a^4b^3 & -4a^3b^4 & +8a^2b^5
\end{array}$$

Mnogość $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

Mnożą ſię porządkiém trzy wyrazy, $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$, przez piérwſzy wyráz mnożnika a^3. Ponieważ, dwa wyrazy $5a^4$ i a^3, maią znak iednakowy, przeto mnogość powſtaiąca z nich powinna mieć znak + (24); lecz takowy znak niepiſze ſię, iako należący piérwſzemu wyrazowi mnogości (7).

Mnoży ſię potém ſpółczynnik ilości a^4, który ieſt 5, przez ſpółczynnika 1. ilości a^3, co uczyni 5; naoſtatek mnoży ſię a^4 przez a^3, czyniąc dodanie obu wykładników 4 i 3 podług reguły (20), co da a^7, a zatem mnogość będzie $5a^7$.

Przyſtępuiąc do wyrazu $-2a^3b$, żeby go rozmnożyć przez a^3, trzeba uważyć, że te dwie ilości maią znaki różne, a zatém mnogość powſtaiąca z nich powinna mieć znak —; mnoży ſię więc ſpółczynnik 2 wyrazu a^3b, przez ſpółczynnika 1. wyrazu a^3 a potém a^3b przez a^3, ſkąd wypadnie mnogość $-2a^6b$.

Podobnymże ſpoſobém, wyráz $+4a^2b^2$, rozmnożony przez a^3, da $4a^5b^2$.

Rozmnożywſzy wſzyſtkie wyrazy mnożnego przez a^3, trzeba ie rozmnożyć podobnież przez naſtępuiący drugi wyráz mnożnika $-4a^2b$. A tak wyráz $5a^4$, rozmnożony przez $-4a^2b$, maiąc baczenie na różność znaków, da $-20a^6b$; wyráz $-2a^3b$, rozmnożony przez $4a^2b$, iednakowego znaku,

da

da $+ 8a^5b^2$; wyráz $4a^2b^2$, rozmnożony przez $- 4a^2b$, różnego znaku, da $- 16a^4b^3$.

Nakoniec, przyſtępuie ſię do mnożenia przez trzeci wyráz mnożnika $2b^3$; w którém poſtępuiąc ſobie podług tychże ſamych reguł, znaydzie ſię trzecia mnogość cząſtkowa, iakoto: $+ 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

Uczyniwſzy dodanie, i zebranie tych wſzyſtkich mnogościów, wypadnie na mnogość całkowitą $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

25. Zeby nabydź przyzwyczaiénia, i wprawności do tych reguł, można zabawić ſię przykładami niżey położonémi w tablicy, do których ſłużą naſtępuiące uwagi.

W piérwſzym przykładzie ieſt rozmnożony wyráz $a + b$, znaczący w powſzechności ſummę dwóch ilościów iakichkolwiek, przez wyráz $a - b$, znaczący w powſzechności, różnicę między tèmi ilościami, ſkąd wypada mnogość $a^2 - b^2$, która ieſt różnicą, między kwadratém piérwſzym, a kwadratem drugim, to ieſt różnicą kwadratów, dwóch ilościów. A zatém można powiedzieć w powſzechności, *Ze ſumma dwóch ilościów, rozmnożona przez ich różnicę, daie zawſze, na mnogość powſtaiącą z nich, różnicę między kwadratami tychże ilościów.* Wziąwſzy dwie liczby iakiekolwiek np. 5 i 3, ſumma ich czyni 8, a różnicą ſą 2; te dwie liczby rozmnożone iedna przez drugą, dadzą mnogość 16, która ieſt różnicą między kwadratami liczb 5 i 3; to ieſt, między 25 i 9. *I odwrotnie, różnica między kwadratami dwóch ilościów, zawſze może bydź wzięta, za mnogość pochodzącą z rozmnożenia tych dwóch ilościów, przez ich różnicę.* I tak ilość $b^2 - c^2$, która ieſt różnicą, między kwadratém głoſki b, a kwadratém głoſki

ſki c, pochodzi z rozmnożenia ilości $b + c$, przez $b - c$. Te dwa podania będą nam uſłużne w dalſzym przeciągu: a tym czaſém pokazuie ſię iuż iedna użyteczność Algebry, że przez nię odkrywaią ſię prawdy powſzechne.

Drugi przykład dowodzi ſpoſobém powſzechnym i proſtym, to co powiedziało ſię w Arytmetyce, o złożeniu kwadratu; to ieſt. *Ze kwadrat ſummy dwòch ilościów* $a + b$, *zawiéra w ſobie kwadrat* a^2 *piérwſzéy ilości, podwòyność* $2ab$, *piérwſzéy ilości rozmnożonéy przez drugą, i kwadrat* b^2 *drugiéy ilości.*

Trzeci znowu przykład, potwierdza to co przepiſało ſię w Arytmetyce o złożeniu ſześcianu; gdzie kwadrat $a^2 + 2ab + b^2$, ilości $a + b$, rozmnożony przez $a + b$, daie $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; to ieſt, że piérwſzym wyrazém, ieſt ſześcian ilości a; drugim wyrazém, który na iedno wychodzi co $3a^2 \times b$, ieſt potròyność kwadratu a^2 rozmnożona przez b; trzecim wyrazém ieſt potròyność ilości a, rozmnożona przez kwadrat b^2, to ieſt $3ab^2$; naoſtatek b^3, ieſt ſześcianém ilości b.

26. Zeby naznaczyć rozmnożenie między dwiema ilościami wieloſłownémi, każda z tych ilościów, piſać ſię zwykła między *nawiaſami* (parentheſis), położywſzy między niémi iaki znak mnożenia, o których wyżéy (14); a czaſém nawet niekładzie ſię żadnego znaku. Tak maiąc naznaczyć, że całkowitość ilości $a^2 + 3ab + b^2$, ma bydź rozmnożona przez całkowitość ilości $2a + 3b$, piſze ſię: $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$; álbo $(a^2 + 3ab + b^2).(2a + 3b)$; albo téż tylko $(a^2 + 3ab + b^2)$

b^2) ($2a+3b$). Częſtokroć zamiaſt piſania każdéy ilości między nawiaſami, takowe ilości, tylko zwykły nakrywać ſię liniią wciąż przeciągnioną, iakoto $\overline{a^2+3ab+b^2} \times \overline{2a+3b}$.

27. Trafia ſię bardzo wiele okazyi, w których użyteczniéy bywa, niewykonywać mnożenia, ale go tylko wſkazać. Niémożna do tego podać reguł powſzechnych; bo ta rzecz zawiſła od ſzczególnych okoliczności, wyciągaiących takowych działań: praktyka będzie nayleпſzym nauczycielém w téy miérze. Atoli można powiedzieć doſyć pówſzechnie, że w ten czas należy przeſtać na ſamém wſkazaniu mnożenia, kiedy ma po niém naſtąpić dzielenie: albowiém ponieważ to, (iak zobaczymy zaráz), częſtokroć odbywa ſię przez ſamo wyrzucenie ſpólnych czynników tak z dziélnego iak z dziélnika; przeto łatwiéy będzie można doſtrzédz tych czynników, kiedy mnożenie tylko ieſt wſkazane.

O Dzieleniu.

28. Spoſób Algebraiczny, odprawienia tego działania, bardzo wiele zależy na znakach, które przepiſały ſię wyżéy do mnożénia. Cél zaś iego, ieſt tenże ſam co i w Arytmetyce.

29. Kiedy ilość zadana do rozdzielenia, niebędzie miéć żadnéy głoſki ſpólnéy z dziélnikiém, natenczas niepodobna odprawić działania, ale tylko trzeba go wſkazać, co wykonywa ſię, piſząc dziélnika pod dziélnym w poſtaci ułamka, i oddziélaiąc liniyką ieden od drugiego.

Tak, żeby naznaczyć, iż a, ma bydź rozdzielone przez b, piſze ſię $\frac{a}{b}$, i wymawia ſię *a rozdzielone przez b*; maiąc naznaczyć że $aa+bb$, ma bydź rozdzielone przez $c+d$, napiſze ſię $\frac{aa+bb}{c+d}$.

30. Jeżeli tak dziélny, iak dziélnik ſą iednoſłowne, i wſzyſtkie głoſki znayduiące ſię w dziélniku, znayduią ſię także i w dziélnym, dzielenie może bydź odprawione doſkonale, podług naſtępuiącego prawidła: *Trzeba wyrzucić wſzyſtkie głoſki ſpólne dziélnikowi, a pozoſtałe głoski dadzą wieloraz.*

Tak maiąc rozdzielić ab przez a, wyrzuciwſzy głoſkę a, z dziélnego ab, zoſtanie wieloráz b. Żeby rozdzielić abc, przez ab, wyrzuci ſię z dziélnego ab, co da na wieloráz c.

Jakóż, ponieważ głoſki nieſą między ſobą oddzielone żadnym znakiem (14), prze-

przeto ſą czynnikami ilości, ktorą ſkładaią, a zatém głoſki dziélnika będąc ſpólne dziélnemu, ią czynnikami tego dziélnego; Lecz pokazało ſię w Arytmetyce, że rozdziéliwſzy mnogość przez iednego z iéy czynników, za wieloráz powinièn wypaśdź drugi czynnik; więc wieloráz, powinièn bydź złożony z głoſek dziélnego, które nieznayduią ſię w dziélniku.

31. Stąd wynika, że kiedy ilość będzie miała wykładniki, zachować trzeba regułę naſtępuiącą, to ieſt, *odiąć wykładnika każdéy głoski położonéy w dziélniku, od wykładnika podobnéyże głoski znayduiącéy ſię w dziélnym.*

Tak maiąc rozdzielić a^3 przez a^2, odéymą ſię 2. od 3, i zoſtanie 1; a zatém wieloráz będzie a^1, albo a. Podobnież po rozdziéleniu ilości $a^4b^3c^2$, przez a^2bc, wypadnie wieloráz a^2b^2c.

Jakóż $\frac{a^3}{a^2}$, ieſt tož ſamo, co $\frac{aaa}{aa}$, które podług reguły danéy (30), wyrzuciwſzy głoſki ſpólne dziélnemu i dziélnikowi, przemiéni ſię w a.

32. Więc ieżeli iaka głoſka, miéć będzie tegóż wykładnika tak w dziélnym iak w dziélniku, takowa głoſka w wiéloraziè miéć będzie za wykładnika zero.

Tak a^3, rozdzielone przez a^3, da a^0; a^3bc^2, rozdzielone przez a^2bc^2, da na wiéloráz $a^1b^0c^0$, albo ab^0c^0.

A

A w takim razie, można opuścić te głoſki, które maią zero za wykładnika; bo te nieznaczą co innego, tylko iedność. Jakóż w dzieleniu a^3 przez a^3, ſzuka ſię, wiele razy a^3 mieści w ſobie a^3, gdzie jawna ieſt, że wièlorazém muſi bydź 1; z drugiéy ſtrony, a^3 rozdzielone przez a^3, daie wieloráz a^0; więc a^0, ieſt wárto 1. *W powſzechności, każda ilość maiąca za wykładnika zero, ieſt wárta 1.*

33. Jeżeli niektóre głoſki w dziélniku, niebędą ſpólne dziélnému, albo ieżeli niéktóre wykładniki dziélnika, będą więkſze iak wykładniki podobnychże głoſek dziélnego, natenczas dzielenie nieda odprawić ſię doſkonale, ale tylko trzeba go wſkazać, iak nauczyło ſię wyżéy (29). Atoli takowy wieloráz, albo ilość ułamkowa przezeń oznaczona, może bydź przyprowadzona do prościéyſzégo wyrazu. Reguła do tego ſłużąca zależy na tém: ażeby wyrugówać ſpólne głoſki w dziélnym i w dziélniku; tak że ieżeli znaydówać ſię będą wykładniki, wyrzuca ſię głoſka maiąca mniéyſzego wykładnika, a wykładnik większy téyże głoſki, zmniéyſza ſię o podobnąż ilość.

Np. gdyby zadano było rozdzielić, a^5bc^3, przez $a^2b^3c^4$; napiſze ſię $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$; co przywiéśdź można do

pro-

prościéyſzego wyrażenia w ten ſpoſób: trzeba wymazać z dziélnika a^2, a w dziélnym napiſać tylko a^3; tudziéż z dziélnego wymazać b, a w dziélniku napiſać tylko b^2; nakoniec wymazać z dziélnego ^{3}, a w dziélniku napiſać tylko c; ſkąd zrobi ſię ilość $\frac{a^3}{b^2c}$. Podobnież znalazłoby ſię, że $\frac{a^2b^5 \cdot 3}{a^3bc^2d}$, da przemiénić ſię na $\frac{b^4c}{ad}$.

Jeżeli po odprawiéniu takowego działania, w dziélnym niezoſtałoby żadnéy głoſki, natenczas na miéyſce iego napiſze ſię iedność.

Tak $\frac{a}{a^3}$, po uczynioném zebraniu, odmiéni ſię w $\frac{1}{a^2}$.

Przyczynę tych reguł można łatwo zrozumiéć, na fundamencie tego co iuż powiédziało ſię wyżéy; albowiém rugować iednakową liczbę głoſek, tak z dziélnego iak z dziélnika, ieſt to rozdzielić oba wyrazy ułamka, oznaczaiące wieloráz, przez tęż ſamę ilość: takowe zaś działanie, iak widzieliśmy w Arytmetyce, wártości nieodmiénia, a ułamek wyſtawia nam w prościéyſzém wyrażeniu.

34. Dotąd niémiało ſię żadnego względu, na ſpółczynników iużto dziélnego, iuż dziélnika, iuż obudwóch. Reguła do tego ſłuży taż ſama co w Arytmetyce, to ieſt że trzeba rozdzielić ieden przez drugi. Jeżeli dzielenie niémoże odprawić ſię doſkonale, ſpółczynnik zoſtawuie ſię w kſztáłcie ułamka, który tylko, ieżeli to da ſię uczynić, przywodzi ſię do prościéyſzego wyrazu.

Np. maiąc rozdziélić $8a^3b$, przez $4a^2b$; rozdzieliwſzy 8 przez 4, będzie wieloráz 2; dzieląc potém a^3b, przez a^2b, znaydzie ſię wieloráz a, a zatém cáłkowity wieloráz będzie $2a$,

Maiąc rozdziélić $8a^3b^2$, przez $6ab$; napiſzè ſię $\frac{8a^3b^2}{6ab}$, co można zebrać na $\frac{8a^2b}{6}$ albo $\frac{4a^2b}{3}$.

35. Reguła wyżéy przepiſana (33) ieſt powſzechna, czyto dziélny i dziélnik ſą iednoſłowne, czy wieloſłowne, byleby w tym oſtatnim razie, głoſki ſpólne dzielnemu i dziélnikowi, były oráz ſpólne wſzyſtkim wyrazóm, znakami + lub — odłączonym.

Tak maiąc *np.* rozdzielić $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$, przez $a^3 - 5a^2b$, wieloráz $\frac{a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$, przemiénić można w ilość $\frac{a^3 + 4a^2b - 5b^3}{a - 5b}$, ruguiąc a^2, które ieſt ſpólnym czynnikiém wſzyſtkich wyrazów dziélnego i dziélnika.

36. Jeżeli dziélny i dziélnik, będą wieloſłowne, niémożna podać powſzechnych reguł, do rozeznania za ſamém ſpóy-

ſpóyźrzeniém, czy dzielenie może bydź doſkonale odprawione, lub nie. Dla upewniènia ſię o tém, i oráz dla wynaleziènia wielorazu, trzeba przedſięwziąść naſtępuiące działanie.

1ód Napiſać dziélnego i dziélnika w iednéy linii, i wyrázy ich względém iednéyże głoſki obóm ſpólnéy, tak roſporządzić, żeby wielkości ilościów, koléyno po ſobie naſtępówały, to ieſt żeby napiérwéy napiſać ten wyráz w którym pomiéniona głoſka ma naywiękſzego wykładnika, a po nim koléyno drugie wyrazy naſtępuiące, podług coráz mniéyſzéy wártości wykładników.

2re Zrobiwſzy to roſporządzenie, odłącza ſię dziélny od dziélnika przez linią pionową, i przyſtępuie ſię do dzielenia tylko piérwſzego wyrazu dziélnego, przez piérwſzy wyráz dziélnika, podług reguł podanych wyżéy (30. i daley); wypadły ſtąd wiéloráz piſze ſię pod dziélnikiém.

3cie Przez wiéloráz dopiéro wynaleziony, mnożą ſię porządkiém wſzyſtkie wyrázy dziélnika, i piſzą ſię koléyno wypadaiące mnogości z odmiénionémi znakami, dla naſtępuiącego odéymówania.

4te Podkryśla ſię wſzyſtko; uczyniwſzy zebranie wyrazów podobnych w dziél-

dziélnym i w mnogości, na ſpodzie napiſze ſię reſzta, dla zaczęcia dalſzego dzielenia tymże ſpoſobém, biorąc za piérwſzy wyráz, ten z pozoſtałych wyrazów, który ma naywiękſzego wykładnika.

W tém działaniu, tak iak w mnożeniu, trzeba pomnieć na znaki wyrazów dziélnego i dziélnika, trzymaiąc ſię téyże ſaméy reguły co w mnożeniu, to ieſt że

Jeżeli dziélny i dziélnik maią znaki iednakowe, wiéloráz powinién mieć znak +; ieżeli zaś takowe znaki będą różne, wiélorazowi da ſię znak —.

Ta reguła co do znaków, zaſadza ſię na tém, że wieloráz rozmnożony przez dziélnika, powiniéu nazad oddać dziélnégo. A zatém wieloráz muſi miéć takie znaki, ażeby rozmnożywſzy go przez dziélnika, mnogość dała dziélnego z iégo znakami: z tego zaś warunku, koniècznie wynika reguła dopiéro wyżéy założona.

Zeby w tém działaniu poſtępówało ſię porządnie, naprzód trzeba zaczynać od znaków, potém dzieli ſię ſpółczynnik, a naoſtatku głoſki.

PRZYKŁAD.

Jeſt zadano rozdzielić $aa - bb$, przez $b + a$.

Roſporządzam dziélnego i dziélnika, względém którykólwiek z tych dwóch głoſek np. względém a, i piſzę iak naſtępuie.

Dziél-

$$\begin{array}{lrl l}
\text{Dziélny} & aa - bb & \big|\; a + b & \text{Dziélnik} \\
 & -aa - ab & \big|\; a - b & \\
\hline
\textit{Reſzta} & -ab - bb & & \\
 & + ab + bb & & \\
\hline
\textit{Reſzta} & -\;\; 0. \;\; 0. & &
\end{array}$$

Ponieważ znak piérwſzego wyrazu w dziélnym, ieſt tenże co znak piérwſzego wyrazu w dziélniku, przeto w wielorazie kładzie ſię znak +, ale w piſaniu opuſzcza ſię, dla tego że przypada przed piérwſzym wyrazém.

Dzieli ſię aa przez a, ſkąd wynika wieloráz a, który piſze ſię pod dziélnikiém.

Mnożą ſię porządkiém dwa wyrazy dziélnika a i b, przez piérwſzy wyráz wiélorázu a, i kładą ſię pod dziélnym mnogości aa i ab, poprzédzone znakiém —, to ieſt przeciwnym temu, który wypádł z mnożenia; ponièważ te mnogości maią bydź odięte od dziélnego.

Czyni ſię zebranie, wymazuiąc dwá wyrázy aa i $-aa$, które znoſzą ſię wzaièmnie; a zoſtaie ſię $-ab$: ta zaś ilość, z pozoſtałym wyrazém dziélnego $-bb$, ſkłada część reſztuiącą do rozdziélenia.

Dzieli ſię $-ab$, przez a, i daie ſię wièlorazowi znak —, z przyczyny różności znaków poprzédzaiących dziélnego i dziélnika; co zaś należy do głoſek, znayduie ſię wieloráz b, i przypiſuie ſię do poprzédzaiącego wielorazu.

Mnożą ſię oba wyrazy dziélnika a i b, przez nowowynaleziony wyráz wielorazu $-b$, i wypadną mnogości $-ab - bb$, w których odmiéniwſzy znaki, napiſze ſię pod częściami reſztuiącémi dziélnego, $+ab + bb$. Potém robi ſię zebranie, wymazuiąc wyrázy iednakowe, a maiące przeciwne znaki: co odprawiwſzy, ponieważ nic niezoſtaie, wnoſi ſię ſtąd, że wiélorazém ieſt ilość $a - b$.

Mo-

Można także było roſporządzić dziélnego i dziélnika względém głoſki b, a natenczas, potrzebaby dzielić $-bb + aa$, przez $b + a$; w czém postąpiwſzy obie wzwyż opiſanym ſpoſobém, znalázłby ſię wieloráz $-b + a$, to ieſt táż ſama ilość co wyżéy $a - b$, tylko napiſana odwrotnie.

Zobacz przykłady w przyłączonéy tablicy.

Przykłady Mnożénia.

1ſzy

$$\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
a^2 + ab \\
+ ab + b^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2
\end{array}$$

2gi

$$\begin{array}{r}
a + b \\
a - b \\
\hline
a^2 + ab \\
- ab + b^2 \\
\hline
a^2 - b^2
\end{array}$$

3ci

$$\begin{array}{r}
a^2 + 2ab + b^2 \\
a + b \\
\hline
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
+ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}$$

4ty

$$\begin{array}{r}
5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
4a^2 - 5ab + 2b^2 \\
\hline
20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^3 \\
- 25a^4b + 20a^3b^2 - 25a^2b^3 + 15ab^4 \\
+ 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\
\hline
20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5
\end{array}$$

5ty

$$\begin{array}{r}
\frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{5}a^2b + \frac{1}{2}b^3 \\
\frac{3}{5}ab - 2b^2 \\
\hline
\frac{2}{5}a^4b - \frac{12}{25}a^3b^2 + \frac{3}{10}ab^4 \\
- \frac{4}{3}a^4b^2 + \frac{8}{5}a^2b^3 - b^5 \\
\hline
\frac{2}{5}a^4b - \frac{136}{75}a^3b^2 + \frac{8}{5}a^2b^3 + \frac{3}{10}ab^4 - b^5
\end{array}$$

Przy-

Przykłady dzielenia.

1fzy

$$\begin{array}{l|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \hline -a^3 + a^2b & a^2 + ab + b^2 \\ \hline +a^2b - b^2 & \\ -a^2b + ab^3 & \\ \hline +ab^2 - b^3 & \\ -ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2gi

$$\begin{array}{l|l} 8a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 & 4a^2 + 5ab + b^2 \\ \hline -8a^4 - 10a^3b - 2a^2b^2 & 2a^2 - 3ab \\ \hline -12a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 & \\ +12a^3b + 15a^2b^2 - 3ab^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3ci

$$\begin{array}{l|l} a^4 + 2aabb + b^4 - c^4 & aa + bb + cc \\ \hline -a^4 - aabb - aacc & aa + bb - cc \\ \hline +aabb - aacc + b^4 - c^4 & \\ -aabb - b^4 - bbcc & \\ \hline -aacc - bbcc - c^4 & \\ +aacc + bbcc + c^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

4ty

$$\begin{array}{l|l} \frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}ab^2 + \frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{20}b^3 & \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2 \\ \hline -\frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}ab^2 & \frac{3}{7}a + \frac{1}{4}b \\ \hline \frac{1}{6}ab - \frac{3}{20}b^3 & \\ -\frac{1}{6}ab + \frac{3}{20}b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

5ty

$$\begin{array}{l|l} 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 & 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\ \hline -20a^5 + 16a^4b - 20a^3b^2 + 12a^2b^3 & 4a^2 - 5ab + 2b^2 \\ \hline -25a^4b + 30a^3b^2 - 33a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 & \\ +25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^4 & \\ \hline +10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 & \\ -10a^3b^2 + 8a^2b^3 - 10ab^4 + 6b^5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

37. Zdarza ſię częſto, że ilość wynikaiąca z kilku różnych działań, może bydź wyrażona w kſztałcie mnogości, czyli wypadku powſtaiącego z rozmnożenia: gdy to przytrafi ſię, częſtokroć będzie rzeczą pożyteczną, dać iéy takową poſtać, i tylko wſkazać mnożenie między czynnikami. Lubo ſpoſób powſzechny do poſtrzeżenia takowych czynników, zawiſł od wiadomości które podadzą ſię nizéy, atoli obeznawſzy ſię dobrze z mnożeniém i dzieleniém, w wielu okazyach łatwo można poſtrzédz pomiénionych czynników.

Np. maiąc dodać $5ab - 3bc + a^2$, do $3ab + 3bc - 2a^2$, wypadłoby $8ab - a^2$; ta ilość, z przyczyny głoſki a, będącéy ſpólnym czynnikiém w dwóch wyrazach $8ab$, i a^2, może bydź uważana, iakoby pochodząca z rozmnożenia $8b - a$ przez a; dla czego téż, da ſię napiſać w ten ſpoſób $(8b - a) \times a$. Rzecz bardzo potrzebna, przyuczyć ſię do przemian tego gatunku.

O ſpoſobie znaleziénia naywiękſzego ſpółdziélnika, dwóch ilościów Algebraicznych.

38. Spoſób znaleziénia naywiękſzego ſpółdziélnika dwóch ilościów Algebraicznych, ieſt podobny tamtemu, którego używa ſię do liczb w Arytmetyce. Roſporządziwſzy dwie ilości względém iednéyże głoſki, trzeba rozdzielić ilość, w któréy ta głoſka ma naywiękſzego wykładnika przez drugą ilość i to dzielenie póty powtarzać, póki wykładnik ilości dziélnéy nièzrobi ſię mniéyſzym, albo przynaymniéy równym wykładnikowi drugiéy ilości. Natenczas ta druga ilość, dzielić ſię będzie przez reſztę pozóſtałą z dzielenia, tak długo, iak dopiéro przepiſało ſię względém piérwſzéy ilości. Daléy dzieli ſię druga reſzta przez piérwſzą, i znowu nowa reſzta, dzieli ſię przez poprzedzaiącą; a kiedy dzielenie odprawi ſię ſpełna, to oſtatni dziélnik użyty, będzie żądanym ſpółdziélnikiém.

Nim przyſtąpimy, do przyſtóſówania téy reguły, dla łatwiéyſzego potém onéy użycia uważmy wprzód, że w ſpółdziélniku dwóch ilościów nic nieodmiénia ſię, gdy iedna z tych ilościów, mnoży ſię lub dzieli przez taką ilość, która nieieſt dziélnikiém drugiéy ilości, i która z tą drugą ilością niéma żadnego ſpółdziélnika. *Np.* ilości ab i ac, maią za ſpółdziélnika a, rozmnożywſzy ab przez d, będzie mnogość abd, która z ilością ac niema innégo ſpółdziélnika, iak a, to ieſt tegóż ſamego, co był między ilościami ab i ac.

Inaczéy byłoby, gdyby ilość ab rozmnożyła ſię przez głoſkę, która byłaby dziélnikiém ilóści ac, albo miałaby z nią ſpólnego czynnika rozmnożywſzy ab przez c, wypadłoby abc, któréyto ilości, iako téż ilości ac, ieſt ſpółdziélnikiém tož ſamo ac. Podobnież rozmnożywſzy ab przez cd, które ma iednego ſpólnego czynnika z ilością ab, wypadłoby $abcd$; gdzie ſpółdziélnikiém tak téy ilości, iako téż ilości ac, ieſt ac.

39.

39. Wnieśmy ſtąd *1ód* Ze ieżeli ſzukaiąc naywiękſzego ſpółdziélnika dwóch ilościów, w odprawionych koléyno dzieleniach poſtrzeże ſię, że dziélny albo dziélnik, ma iakiego czynnika albo dziélnika, któryby niebył czynnikiém drugiéy ilości, takowego czynnika można wyrzucić. *2re* Ze iednę z tych dwóch ilościów, można rozmnożyć przez iakąkolwiek liczbę, byleby ta liczba niebyła czynnikiém drugiéy ilości, i niémiała z nią żadnego ſpólnego czynnika.

Teráz przyſtóſuymy tę regułę, pomniąc na to wſzyſtko co ſię dopiéro rzekło.

Niech będzie zadano, ażeby znaléśdź, naywiękſzego ſpółdziélnika ilościów $aa - 3ab + 2bb$ i $aa - ab - 2bb$.

PRZYKŁAD I.

1wſzy Dziélny — *1wſzy* Dziélnik

$aa - 3ab + 2bb \quad | \quad aa - ab - 2bb$

$-aa + ab + 2bb \quad | \quad 1. \quad$ *1wſzy* Wieloráz.

1wſza Reſzta $-2ab + 4bb$.

Trzeba więc rozdzielić $aa - ab - 2bb$ przez $-2ab + 4bb$, lecz ponieważ ten nowy dziélnik, zawiéra w ſobie czynnika $2b$, który nieieſt ſpólnym czynnikiém wſzyſtkich wyrazów dziélnego, przeto doſyć ieſt, rozdzielić $aa - ab - 2bb$, przez $-a + 2b$, to ieſt z dziélnika wyrugówawſzy czynnika $2b$. A tak będzie.

2gi Dziélny — *2gi* Dziélnik

$aa - ab - 2bb \quad | \quad -a + 2b$

$-aa + 2ab \quad | \quad -a - b$ *2gi* Wieloráz.

$+ab - 2bb.$

$-ab + 2bb.$

Reſzta $\quad 0.$

A zatém naywiękſzym ſpółdziélnikiém w tym razie, ieſt ilość $-a + 2b$.

PRZY-

PRZYKŁAD II.

$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \{ 7a^2 - 23ab + 6b^2$

Ponieważ niémożna rozdzielić 5 przez 7, które oprócz tego nieiest ſpólnym czynnikiém wſzyſtkich wyrazów drugiéy ilości, przeto trzeba rozmnożyć piérwſzą ilość przez 7, co da mnogość iak następuie.

1wſzy Dziélny — *1wſzy* Dziélnik.

$35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3 \; (\; 7a^2 - 23ab + 6b^2$

$-35a^3 + 115a^2b - 30ab^2 \qquad 5a$. *1wſzy* wieloráz.

1wſza Reſzta. $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$.

Widzę że ieſzcze mogę rozdzielić przez tegóż dziélnika, rozmnożywſzy reſztę przez 7, i wyrugówawſzy ſpólnego czynnika b, a tak:

2*gi* Dziélny — 2*gi* Dziélnik

$-77a^2 + 329ab - 294b^2 \; (\; 7a^2 - 23ab + 6b^2$

$+77a^2 - 253ab + 66b^2 \qquad -11$. 2*gi* Wieloráz

2*ga* Reſzta $+76ab - 228b^2$.

Trzeba więc rozdzielić $7a^2 - 23ab + 6b^2$, przez $76ab - 228b$, albo raczéy przez $a - 3b$, wyrugówawſzy czynnika $76b$; a tak.

3*ci* Dziélny. — 3*ci* Dziélnik.

$7a^2 - 23ab + 6b^2 \; (\; a - 3b$

$-7a^2 + 21ab \qquad 7a - 2b$ 3*ci*. Wieloráz

$-2ab + 6b^2$

$+2ab - 6b^2$

Reſzta - - o.

Przeto ſpółdziélnikiém dwóch ilościów zadanych, ieſt ilość $a - 3b$.

O Ułamkach Algebraicznych.

40. Ułamki Algebraiczne, rachuią ſię podług tychże ſamych reguł co ułamki liczebne, lecz oráz pamiętać trzeba na te przepiſy które położyły ſię wyżéy,

żéy, względém dodawania, odéymowania, mnożenia, i dzielenia ilościów Algebraicznych. Że zaś tych reguł przyſtoſówanie ieſt bardzo łatwe, więc tylko w ogólności nad niém zaſtanowimy ſię.

41. Ułamek $\frac{a}{b}$, nieodmiéniaiąc iego wártości, może bydź przekſztáłconym w ułamek $\frac{ac}{bc}$ albo $\frac{aa}{ab}$ albo $\frac{aa + ab}{ab + bb}$, i. t. d.

Jakóż te oſtatnie ułamki nieſą co innego, tylko piérwotny ułamek, którego oba wyrazy, w piérwſzéy przemianie ſą rozmnożone przez c, w drugiéy przez a, a w trzeciéy przez $a + b$, co niedmiénia wártości.

42. Ułamek $\frac{aac}{abc}$, ieſt tenże ſam co $\frac{a}{b}$; ułamek $\frac{6a^3 + 3a^2b}{12a^3 + 9a^2c}$, ieſt tenże ſam, co $\frac{2a + b}{4a + 3c}$. I to ieſt oczywiſta, uważaiąc że oba wyrazy piérwſzego ułamka ſą rozdzielone przez ac, a znowu oba wyrazy drugiego ułamka przez $3a^3$. W reſzcie to przywiedzenie ułamków do prościéyſzego wyrażenia, zawiéra ſię w tém co iuż powiedziało ſię wyżéy (33).

Reguła powſzechna, do przywiedzenia iakiegokolwiek ułamka do nayinnieyſzych wyrazów, zależy na tém, ażeby rozdzielić oba wyrazy przez naywiękſzego ſpółdziélnika.

43. Zeby przemienić w ieden ułamek, ilość iaką złożoną z całkowitki i z ułamka, trzeba iak w Arytmetyce, rozmnożyć całkowitkę przez mianownika przyłączonego ułamka.

Np. $a + \frac{bd}{c}$, można przemiénić w $\frac{ac + bdc}{c}$.

Podobnież, $a + \frac{cd - ab}{b - d}$, przemiénia ſię na - . $\frac{ab - ad + cd - ab}{b - d}$; rozmnożywſzy całkowitkę a przez mianownika $b - d$, ſkąd po zebraniu wypadnie $\frac{-ad + cd}{b - d}$, albo $\frac{cd - ad}{b - d}$.

44. Zeby zaś wyciągnąć z ułamka Algebraicznego całkowitki w nim znayduiące ſię, trzeba iak w Arytmetyce, rozdzielić licznika przez mianownika ile można, a w reſzcie poſtąpić ſobie podług reguł dzielenia wyżéy podanych.

Tak ilość $\frac{3ab + ac + cd}{a}$, może bydź przemiéniona na $3b + c + \frac{cd}{a}$. Podobnież ilość - -

$\frac{a^2 + 4ab + 4bb + cc}{a + 2b}$, przemiénia ſię na $a + 2b + \frac{cc}{a + 2b}$, dziełąc licznika, przez mianownika $a + 2b$.

45. Zeby wiele ułamków Algebraicznych, przyprowadzić do ſpólnego mianownika, trzeba użyć téyże reguły co w Arytmetyce.

Tak chcąc dać ſpólnego mianownika, trzém ułamkóm naſtępuiącym $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, mnożę dwa wyrazy piérwſzego przez df, dwa wyrazy drugiego przez bf, a dwa wyrazy oſtatniego przez bd; tym ſpoſóbém trzy ułamki przywiedzione do ſpólnego mianownika, odmiénią ſię w ułamki $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bef}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Podobnież trzebaby ſobie poſtąpić, gdyby liczniki albo mianowniki, lub też oba wyrazy były wieloſłowne, ale zawſze pomniąc na reguły przepiſane do mnożenia ilościów wieloſłownych.

Tak dwa ułamki $\frac{b + c}{a + b}$ i $\frac{a - 2c}{a - b}$, przywiedzione do ſpólnego mianownika, odmiéniaią ſię w $\frac{ab + ac - bb - bc}{aa - bb}$ i $\frac{aa - 2ac + ab - 2bc}{aa - bb}$, rozmnożywſzy oba wyrazy piérwſzego ułamka przez $a - b$, a oba wyrazy drugiego przez $a + b$.

46. Co ſię tyczé dodawania i odéymowania, przywiódłſzy ułamki do ſpólnego mianownika nietrzeba więcéy, tylko zrobić dodanie lub odięcie liczników, zachowawſzy ſpólnego mianownika.

Tak, przywiódłſzy do ſpólnego mianownika dwa ułamki $\frac{b+c}{a+b}$ i $\frac{a-2c}{a-b}$, takowe odmienią ſię iak wyżéy, w $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$, i $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, które po dodaniu uczynią $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, a po zebraniu, $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Odéymuiąc zaś drugi ułamek od piérwſzego, byłoby $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$, co można zebrać na $\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

47. Uważmy przy téy okazyi, że odéymuiąc drugi ułamek, nieodmiéniliśmy znaków iego tylko w liczniku; albowiém gdyby odmiéniły ſię znaki w liczniku i oráz w mianowniku, w takiém działaniu nieodmiéniałaby ſię wártość ułamka, a zatém zamiaſt odięcia, odprawiłoby ſię dodanie: iakóż $\frac{a}{b}$ ieſt iedno, co $\frac{-a}{-b}$, podług réguły wyżéy podanéy (36).

48. Zeby rozmnożyć $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$, napiſze ſię $\frac{ac}{bd}$; mnożąc licznika przez licznika, i mianownika przez mianownika, iak w Arytmetyce. Podobnież $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$, uczyni $\frac{1}{4}ab$.

49. Zeby rozdzielić $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$, działanie wychodzi na rozmnożenie $\frac{a}{b}$ przez $\frac{d}{c}$; co wykonawſzy podług reguły poprzedzaiącéy, uczyni $\frac{ad}{bc}$; tudzież maiąc rozdzielić $\frac{a+b}{c+d}$ przez $\frac{c+d}{a-b}$, działanie wychodzi znowu na rozmnożenie $\frac{a+b}{c+d}$ przez $\frac{a-b}{c+d}$, co uczyni $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$, albo $\frac{(a+b).(a-b)}{(c+d)^2}$, albo nakoniec odprawiwſzy w liczniku wſkazane mnożenia, $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

O Zrównaniach.

50. Maiąc wyrazić, że dwie ilości ſą ſobie równe, oddziéla ſię iedna od drugiéy tym znakiém =, co wymawia ſię ſłowém *równe*: i tak wyrażenie $a=b$, wymawia ſię, a równe b.

Zgromadzenie dwóch lub więcéy ilości ów, oddzielonych od ſiebie znakiém = ieſt to, co nazywa ſię *zrównaniém* (æquatio). Całkowitość ilościów, położonych po lewéy ręce znaku =, ſkłada *piérwſzą część* (1^{mum} membrum) zrównania, całkowitość zaś ilościów, napiſanych po prawéy ręce znaku =, ſkłada *drugą część* tegóż zrównania. W zrównaniu $4x-3=2x+7$, $4x-3$, ſą piérwſzą częścią, a $2x+7$ ſkładaią drugą część zadanego zrównania. Zrównania ſą wielce użytecznémi, do rozwiązania zagadnień zadanych względém ilościów.

Każde zagadniénie, które może bydź rozwiązane przez Algebrę, zawſze zawiéra w ſwoiém wyrażeniu, bądźto oczywiſty bądź w domniémany ſpoſób, pewną liczbę warunków, podaiących tyleż śrzodków do upatrzenia ſtóſunków między ilościami niewiadomémi, i wiadomémi od których piérwſze zawiſły. Te ſtóſunki iak zobaczymy niżéy, zawſze mogą bydź wyrażone w wzrównaniach, w których ilości niewiadome, ſą połączone z wiadomémi, a to ſpoſobém mniéy lub więcéy trudnym, to ieſt kiedy zagadniénie zawiéra w ſobie mniéy lub więcéy trudności.

Przeto, żeby przez Algebrę rozwiązać zagadniénia, które mogą bydź zadane względém ilościów, trzeba do tego trzech rzeczy.

$1^{ód}$ W wyrażeniu albo w naturze zagadniénia, upatrzyć ſtóſunki zachodzące między ilościami wiadomémi i niewiadomémi. Ta łatwość, iako i wiele innych, nabywa ſię naylepiéy przez używanie; powſzechnych reguł niémożna do tego podać.

2^{re} Każdy z tych ſtóſunków trzeba wyrazić w zrównaniu. Ten warunek, może bydź zamknięty w iednéy regule którą podamy niżéy, lecz któréy przyſtóſowanie ieſt mniéy lub więcéy łatwe, podług natury zagadnienia, ſpoſobności, i wprawności tego, który rozwiązanie zagadniénia przedſiębierze.

3^{cie} Trzeba rozwiązać to zrównanie, albo te zrównania, to ieſt znaléśdź wártość ilościów niewiadomych. Ta oſtatnia okoliczność, może bydź podciągniona pod

pod pewną liczbę reguł; dla tego od niéy poczniémy.

Ponieważ zagadniénia zadane do rozwiązania, prowadzić mogą do zrównań mniéy lub więcéy poskładanych, przeto téż takowe zrównania dzielą na różne gatunki czyli stopnie, różniące się iedne od drugich wykładnikiém ilości lub ilościów niewiadomych: teráz mówić będziémy o Zrównaniach *piérwszego stopnia.* Nazywaią się tak zrównania, w których ilości niewiadome, nieſą rozmnożone ani same przez siebie ani między sobą.

O Zrównaniach piérwszego stopnia, z iedną niewiadomą.

51. Rozwiązać zrównanie, iest to przemienić go w insze zrównanie, w którémby ilość niewiadoma albo głoska oznaczaiąca tę ilość, znaydówała się tylko sama iedna w iednéy części, a ilości składaiące drugą część żeby wszystkie były wiadome.

Reguły służące do rozwiązania zrównań o których tu mowa, to iest do przyprowadzenia ich do takiego stanu, żeby w iednéy części nieznaydówało się nic więcéy, tylko sama iedna niewiadoma;

ma, są trzy, przystósówane do trzech różnych sposobów, którémi ilość niewiadoma, może bydź połączona i wmiészana między ilościami wiadomémi.

Odtąd ilości niewiadome oznaczać będziémy ostatniémi głoskami Abecadła, iakoto x, y, z, dla rozeznania ich od ilościów wiadomych, które wyrażać się zawsze będą albo w liczbach, albo w początkowych głoskach Abecadłowych.

52. Niewiadoma, może znaydować się i bydź połączoną z ilościami wiadomémi w troiaki sposób. 1ód Przez dodanie albo odięcie; iakoto w zrównaniu $x + 3 = 5 - x$. 2re Przez dodanie, odięcie i rozmnożenie, iak w zrównaniu, $4x - 6 = 2x + 16$. 3cie Nakoniec, przez dodanie, odięcie, rozmnożenie i rozdzielenie, iak w zrównaniu, $\frac{2}{5}x - 4 = \frac{3}{4}x + 17$; albo téż tylko przez dwa ostatnie działania, lub przez samo iedno ostatnie.

W tych różnych przypadkach do wyciągniénia niewiadoméy, używa się następuiących reguł.

53. *Zeby przenieść którykolwiek wyráz zrównania z iednéy części do drugiéy; trzeba wymazać takowy wyráz w téy części gdzie się znaydówał, i przestawić go do drugiéy części z znakiém przeciwnym te-*

temu iaki miał w piérwſzey części. W czém nienależy przepominać, że przed wyrazém napiſanym bez znaku, zawſze dorozumiéwa ſię znak $+$.

Np. w zrównaniu $4x + 3 = 3x + 12$; chcąc przenieść do drugiéy części wyráz $+ 3$, piſzę $4x = 3x + 12 - 3$; gdzie uważyć można, że w piérwſzéy części iuż niéma wyrazu $+ 3$, ale znayduie ſię w drugiéy części, poprzédzony znakiém $-$ przeciwnym znakowi $+$, z którym był położony w piérwſzéy części.

Po zebraniu ilościów ſobie podobnych w tém zrównaniu będzie. $4x = 3x + 9$; chcąc zaś wyráz $3x$ przenieść do piérwſzéy części, piſzę $4x - 3x = 9$, co po zebraniu da $x = 9$.

Podobnież w zrównaniu $5x - 7 = 21 - 4x$, chcąc przenieść do drugiéy części wyráz $- 7$, piſzę $5x = 21 - 4x + 7$, co da ſię zebrać na $5x = 28 - 4x$; a ieżeli daléy zechciałbym przeſtawić wyráz $- 4x$, napiſzę $5x + 4x = 28$, albo po zebraniu, $9x = 28$. Zobaczymy wkrótce, iak ma ſię dokończyć rozwiązanie tego zrównania.

Zaſada téy reguły łatwo daie ſię poiąć. Albowiém ilosci ſkładaiące piérwſzą część wzięte razém, ſą równe całkowitości ilościów ſkładaiących drugą część zrównania; iawna zaś ieſt, że takowa równość nieodmiénia ſię, gdy dodawſzy lub odiąwſzy w iednéy którékolwiek części wyráz iakowy, tenże wyráz dodaie ſię, lub odéymuie ſię i w drugiéy części. Lecz zmazać w iednéy części wyráz iaki poprzédzony znakiém $+$, ieſtto zmniéyſzyć

ſzyć

ſzyć tę część w któréy znaydówał ſię, więc dla zachowania równości, trzeba oráz zmniéyſzyć i drugą część o tęż ſamę ilość, to ieſt napiſać w niéy tenże wyráz poprzédzony znakiém $-$. Odwrotnie, kiedy maże ſię wyráz poprzédzony znakiém $-$, rzecz oczywiſta, że tym ſpoſobém pomnaża ſię ta część w któréy ſię znaydówał, więc trzeba i drugą część pomnożyć o podobnąż ilość, to ieſt napiſać w niéy tenże wyráz poprzédzony znakiém $+$.

54. A ſtąd iawna ieſt, że tym ſpoſobém można przeſtawić do iednéy części, wſzyſtkie wyrazy z ilościami niewiadoméмi, a znowu do drugiéy, wſzyſtkie ilości wiadome.

I tak w zrównaniu $7x - 8 = 14 - 4x$, po przeſtawiéniu będzie $7x + 4x = 14 + 8$, albo $11x = 22$. Podobnież zrównanie, $ax + bc - cx = ac - bx$, odmiénia ſię w naſtępuiące, $ax - cx + bx = ac - bc$.

55. W takiém przeſtawianu może ſię trafić, że po zebraniu, ilość x znaydzie ſię bydź poprzédzona znakiém $-$; *np.* maiąc $3x - 8 = 4x - 12$; przeſtawiwſzy do piérwſzéy części wſzyſtkie x, będzie $3x - 4x = - 12 + 8$, co da ſię zebrać na $- x = - 4$; w takim razie nietrzeba więcéy, tylko przemiénić znaki w obu częściach, co

w

w niniéyſzym przykładzie wyńdzie na $+x = +4$, albo $x=4$. Jakóż można było przeſtawić wſzyſtkie x, zamiaſt piérwſzéy, do drugiéy części, ſkąd wyniknęłoby było $-8+12=4x-3x$, co po zebraniu daie $4=x$, i na iedno wychodzi co $x=4$.

56. Przeſtawiwſzy do iednéy części wſzyſtkie wyrazy, zawiéraiące w ſobie ilość niewiadomą, wſzyſtkie zaś ilości wiadome przeniósſzy do drugiéy części, ieżeli w zrównaniu niéma ułamków, żeby mieć wártość niewiadoméy, trzeba ſobie poſtąpić podług reguły naſtępuiącéy: *Napiſz niewiadomą ſamę iednę w iednéy części, a drugiéy części day za dziélnika tę ilość, która w piérwſzéy części była ſpółczynnikiém niewiadoméy.*

Np. w zrównaniu wyżéy położoném $7x-8=14-4x$, mieliśmy po przeſtawieniu i po zebraniu $11x=22$; żeby zaś miéć wártość ſamego x, nietrzeba więcéy tylko napiſać $x=\frac{22}{11}$, co daie ſię zebrać na $x=2$; to ieſt że w piérwſzéy części trzeba położyć tylko ſamo x, a ſpółczynnika iego dać drugiéy części za dziélnika, iakoto $\frac{22}{11}$. Jakóż, gdy piſzę x zamiaſt $11\,x$, niekładę tylko iedynaſtą część całéy wártości, więc dla zachowania równości, trzeba także w drugiéy części tylko położyć $\frac{1}{11}$, to ieſt rózdzielić ią przez 11.

Podobnież gdyby zadane było zrównanie $12x-15=4x+25$; po przeſtawiéniu (54) wſzyſtkich x na iednę ſtronę, na drugą ſtronę ilościów wiadomych, będzie $12x-4x=25+15$, a po zebraniu $8x=40$; żeby zaś miéć ſamo x, napiſzę $x=\frac{40}{8}$, albo $x=5$. Albowiém zamiaſt $8x$, położywſzy tylko ſamo x, bierze ſię tylko $\frac{1}{8}$ piérwſzéy części, więc dla zachowania równości, trzeba także wziąść tylko $\frac{1}{8}$ drugiéy części, to ieſt $\frac{40}{8}$.

Gdyby ſpółczynniki ilości x, niebyły wyrażone w liczbach ale w głoſkach, reguła przeto zoſtanie nieodmiénna.

I tak w zrównaniu $ax=bc$, żeby miéć wártość ſamego x, nietrzeba więcéy tylko napiſać $x=\frac{bc}{a}$.

Jeżeliby po przeſtawiéniu, niewiadoma znaydówała ſię w kilku wyrazach, to ieſzcze taż ſama reguła ſłuży.

I tak w zrównaniu wyżéy położoném $ax+bc-cx=ac-bx$, po przeſtawiéniu będzie $ax-cx+bx=ac-bc$; żeby zaś miéć x, napiſze ſię tylko $x=\frac{ac-bc}{a-c+b}$; to iéſt w piérwſzéy części piſze ſię ſamo x, a drugiéy części daie ſię za dziélnika ilość, która w piérwſzéy części mnożyła x, iakoto $a-c+b$. Albowiém $ax-cx+bx$, nieieſt co innego tylko x, rozmnożone przez całkowitość trzech ilościów $a-c+b$.

Podobnież zrównanie $ax=bc-2x$, po przeſtawiéniu daie $ax+2x=bc$, a po rózdzieleniu podług poprzédzaiącéy reguły będzie $x=\frac{bc}{a+2}$. Jako téż w zrównaniu $x-ab=bc-ax$, po przeſtawiéniu będzie $x+ax=bc+ab$, a zatém $x=\frac{bc+ab}{1+a}$. Bo trzeba ſobie tu przypomniéć, że w piérwſzym wyrazie ilości $x + ax$, ſpółczynnikiém głoſki x ieſt 1, tak że w ilości $x + ax$, x znayduie ſię bydź rozmnożone przez $1 + a$; iakóż x, w ilości $x + ax$, zawiéra ſię o ieden ráz więcey, animżeli w ſaméy ilości ax.

57, Zeby przemiénić zrównanie, w którém znayduią ſię mianowniki, w inſze zrównanie w którémby niebyło mianowników, *trzeba rozmnożyć każdy wyráz niémaiący mianownika, przez mnogość z wſzyſtkich mianowników, licznika zaś każdego ułamka rozmnożyć tylko przez mnogość z inſzych mianowników, to ieſt oprócz tego mianownika którego licznik mnoży ſię.*

Np. maiąc zrównanie $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$; mnożę licznika $2x$ w ułamku $\frac{2x}{3}$ przez 35, to ieſt mnogość z dwóch mianomników 5, i 7, ſkąd wypada $70x$. Wyráz 4 niemaiący mianownika mnożę przez 105, to ieſt przez mnogość z trzech mianowników 3, 5, 7, co uczyni 420. Mnożę licznika $4x$ w ułamku $\frac{4x}{5}$ przez 21, to ieſt przez mnogość z dwóch mianowników 3 i 7, co mi da $84x$. Mnożę daléy wyráz 12 niémaiący mianownika, przez mnogość z trzech mianowników, to ieſt przez 105, i mam 1260. Nakoniec mnożę licznika $5x$ w ułamku $\frac{5x}{7}$ przez 15, to ieſt przez mnogość z dwóch mianowników 3 i 5, co mi da $75x$; tak że zadane zrównanie odmiéniło ſię w naſtępuiące, $70x +$ 420

$420 = 84x + 1260 - 75x$, z którego żeby wyciągnąć ſamo x, nietrzeba więcéy tylko użyć reguł poprzédzaiących. Przez piérwſzą (53), zrównanie odmiénia ſię na $70x - 84x + 75x = 1260 - 420$, a po zebraniu będzie $61x = 840$, a zatém przez drugą regułę (56) wypadnie $x = \frac{840}{61}$, odprawiwſzy zaś wſkazane rozdzielenie będzie $x = 13\frac{47}{61}$.

Zaſada téy reguły daie ſię łatwo poſtrzédz, przypomniawſzy ſobie co ſię powiedziało w Arytmetyce o przyprowadzeniu wielu ułamków do ſpólnego mianownika. Jakóż w poprzédzaiącém zrównaniu $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, chcąc przywiéśdź do ſpólnego mianownika trzy ułamki $\frac{2x}{3}, \frac{4x}{5}, \frac{5x}{7}$, trzebaby rozmnożyć ich liczników przez też ſame liczby, przez które rozmnożyliśmy ie dopiéro wyżéy, a nowym licznikóm dać za mianownika ſpólnego, mnogość wynikaiącą z rozmnożenia wſzyſtkich mianowników, tak iż wyżéy położone zrównanie odmiéniłoby ſię w naſtępuiące, $\frac{70x}{105} + 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$; które w rzeczy ſaméy na iedno wychodzi co tamto, bo ułamki przemiénione,

 ma-

maią też ſamę wartość co miały. Żeby zaś i całkowitki obrócić także na ułamki, trzeba roznmnożyć te całkowitki, przez mianownika ułamka położonego między całkowitkami, iak tu przez 105, które ſą mnogością z wſzyſtkich mianowników znayduiących ſię w zrównaniu, ſkąd będzie $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$.
Lecz iawna ieſt, że bez znieſienia równości, można tak z piérwſzéy iak z drugiéy części odrzucić ſpólnego mianownika; bo ponieważ te dwie ilości rozdzielone przez tęż ſamę liczbę ſą ſobie równe, więc muſzą bydź także ſobie równe i bez tego rozdzielenia; a zatém będzie $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, iak wyżéy.

58. Jeżeli ilości z których ſkłada ſię zrównanie, ſą wſzyſtkie ilościami *literalnémi*, reguła przeto zoſtanie bynaymniéy nieodmienną; należy tylko dobrze pamiętać o prawidłach, które podały ſię do mnożenia ilościów Algebraicznych.

I tak w zrównaniu $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$; mnożę licznika ax, przez mnogość cd, z dwóch mianowników $c.d$, co mi daie $acdx$. Mnożę wyraz $+b$, przez mnogość z wſzyſtkich mianowników bcd, i mam $+b^2cd$. Mnożę cx przez bc, i mam bc^2x. Na-

oſtatek, mnożę ab przez bd, i mam ab^2d; tak że poprzédzaiące zrównanie odmiénia ſię w następuiące, $acdx + b^2cd = bc^2x + ab^2d$; a poprzeſtawiéniu będzie, $acdx - bc^2x = ab^2d - b^2cd$; na reſzcie po rozdzieleniu (56), wypada $x = \frac{ab^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

59. Jeżeli mianowniki ſą wieloſłowne, dla poratówania ſię lepiéy będzie, z początku tylko wſkazać działania które maią bydź potém wykonane; bo maiąc przed oczami te wſkazania, tém łatwiéy będzie można wſzyſtko odprawić.

Np. maiąc $\frac{ax}{a-b} + 4b = \frac{cx}{3a+b}$, napiſzę $ax \times (3a+b) + 4b \times (a-b) \times (3a+b) = cx \times (a-b)$, a dopiéro odprawiwſzy wſkazane mnożenia miéć będę, $3a^2x + abx + 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 = acx - bcx$; po przeſtawiéniu zaś będzie, $3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b$; ſkąd naoſtatek po rozdzieleniu (56), wypada – – $\frac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + b}$.

Przyſtóſowanie poprzédzaiących fundamentów do rozwiązania niektórych proſtéyſzych zagadnień.

60. Lubo ſobie przedſięwzięliśmy, dopiéro w drugim Rozdziale traktować w ſzczególności o użyciach Algebry, z tém wſzyſtkiém zda nam ſię bydź nie od rzeczy, wprzód tu czytelnika do nich przygo-

gototówać, w przyftófowaniach wyżéy założonych fundamentów do rozwiązania kilku łatwiéyfzych zagadnień. Co nam, téż będzie okazyą podania niektórych uwag, flużyć maiących na potém.

Dopiéro wyżéy przepifane reguły, fą doftateczne do rozwiązania wfzelkiego zagadnienia piérwfzego ftopnia, kiedy to zagadnienie iuż ieft wyrażone w zrównaniu. Żeby zaś wyrazić w zrównaniu iakiekolwiek zagadnienie, można do tego użyć reguły naftępuiącéy: *Ilość albo ilości fzukane każdą oznaczyfz przez ofobną głoskę, i roztrząfnąwfzy z uwagą rzecz zagadnienia, przy pomocy znaków Algebraicznych z ilościami tak widomémi iak niewiadomémi odprawifz też fame działania i rozumówania, którebyś odprawił. gdyby znaiąc wartości ilościów niewiadomych, trzeba ci ie było tylko fprawdzić.*

Ta reguła ieft powfzechna, i zawfze pokaże drogę do znalezienia zrównań, iakie mogą bydź ułożone z danego zagadnienia. Zobaczymy to w kilku przykładach.

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Z dwóch moździérzów wyrzucono 100 bomb; z piérwfzego rzucono 40 bómb więcéy iak z drugiego; zachodzi pytanie, z każdego z tych dwóch moździerzów wiele bómb wyrzucono?

Przy-

Przyłożywfzy cokolwiek uwagi, daie fię widzieć, iż zagadnienie wychodzi na to: ażeby znaléśdź dwie ilości, które złączone razém uczyniłyby 100, i z których iedna drugą przewyżfzałaby o 40. Jawna zaś ieft, że z tych ilościów maiąc wiadomą iednę, pokaże fię i druga. Albowiém ieżeli np. większa z nich będzie znaioma, odiąwfzy od niéy 40, oczywiście wypadnie mniéyfza.

Oznaczmy fobié większą ilość przez x. Teráz tę ilość x rozumieiąc wiadomą, gdybym ią chciał fprawdzić, odiąłbym od niéy 40, dla znalezienia mniéyfzéy ilości; potém dodałbym większą do mniéyfzéy, i uważałbym ieżéli obie razém fkładaią liczbę 100. wykonaymy to.

Większa liczba ieft — — x

Więc mniéyfza będzie — $x-40$

Te dwie ilości dodane czynią — $2x-40$

Lecz podług warunków zagadnienia te dwie ilości powinny uczynić 100

Więc będzie — — $2x-40=100$

Teráz dla znalezienia wártości x nietrzeba więcey, tylko użyć reguł wyżéy podanych (53) i (56). Piérwfza z nich da $2x=100+40$, albo $2x=140$; a druga $x=\frac{140}{2}=70$. Znalázłfzy wártość większéy ilości x, odéymuię od niéy 40, żeby mieć mniéyfzą ilość, co mi daie 30.

A zatém dwie liczby fzukane będą 40 i 30. Zaftanowiwfzy fię nad fpofobém, którym przyfzliśmy do rozwiązania tego zagadnienia, daie fię poymówać, że rozumówania do tego użyte, niezawifły od fzczególnych wártościów liczb 100, i 40, wchodzących w to zagadnienie, i że gdyby zamiaft tych liczb były zadane infze, tymże famym fpofobém trzebaby fobie z niémi poftapić. I tak gdyby zagadnienie dane było w tém powfzechném wyrażeniu. *Dwie liczby razém złączone czynią fummę wiadomą oznaczoną przez a, te dwie liczby różnią*

żnią ſię między ſobą także o liczbę wiadomą oznaczoną przez b, *niechay będzie zadano żeby wynaléśdź każdą z tych dwóch liczb?*

Oznaczywſzy większą liczbę przez x
Mnieyſza będzie - - $x - b$
Te dwie liczby złączone uczynią $2x - b$

Podług warunku, ta ſumma ſkładać powinna liczbę a, więc muſi bydź $2x - b = a$,

Po przeſtawiéniu będzie, $2x = a + b$, a po rozdzieleniu $x = \frac{a+b}{2}$, albo $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

To ieſt, że ażeby mieć liczbę większą trzeba wziąść połowę iłości a, i dodać do niéy połowę, iłości b; ſkąd pokazuie ſię, że maiąc znaiomą ſummę a dwóch liczb niewiadomych, i onych różnicę b, większa liczba z tych niewiadomych znaydzie ſię, wziąwſzy połowę ſummy i dodawſzy do niéy połowę różnicy.

Ponieważ mniéyſza z tych dwóch liczb ieſt $x - b$, więc będzie wyrażona przez $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, albo obróciwſzy wſzyſtko w ieden ułamek będzie, $\frac{a + b - 2b}{2}$, to ieſt $\frac{a-b}{2}$, albo $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; a zatém żeby mieć liczbę mniéyſzą, trzeba odiąć połowę b od połowy a, to ieſt odiąć połowę różnicy od połowy ſummy.

Stąd widzieć można, iakim ſpoſobém oznaczaiąc ilości wiadome w wyrażeniach powſzechnych przez głoſki wchodzące w zagadnienie, iakim ſpoſobém mówię wynayduią ſię reguły powſzechne, do rozwiązania wſzelkich zagadnień iednakowego rodzaiu.

Częſtokroć, na pierwſze weyźrzenie takowe zagadnienia mogą zdawać ſię różne, ale po letkiém zaſtanowiéniu da ſię poſtrzédz, że ſię w rzeczy
ſa-

ſaméy nieróżnią tylko wyrażeniém. *Np.* gdyby zadane było naſtępuiące zagadnienie.

Rozdzielić liczbę wiadomą oznaczoną przez a, *na dwie części, z którychby iedna była większa albo mniéyſza od drugiéy o ilość wiadomą wyrażoną przez* b. Cokolwiek zaſtanowiwſzy ſię łatwo da-ie ſię poſtrzédz, iż treść tego zagadnienia ieſt taż ſama co poprzédzaiącego.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

Do trzech Fortéc ma bydź rozłożono 720 Puſzkarzów, tak ażeby do naywiększéy przypadło ich 80 więcéy iak do naymniéyſzéy, a do śrzedniéy 40 więcéy iak do naymniéyſzéy, ieſt pytanie wiele ich ſię doſtanie do każdéy z oſobna?

Gdyby mi powiédziano iaka ieſt liczba naymniéyſza, na ſprawdzenie dodałbym do niéy 40, coby mi dać powinno liczbę śrzednią; dodałbym także do téyże liczby naymniéyſzéy ilość 80, ſkądby mi wypadła liczba naywiększa; natenczas te trzy liczby z ſobą dodane uczynić powinny 720.

Oznaczmy więc naymniéyſzą liczbę przez x, a poſtępuiąc ſobie w ſpoſób poprzédzaiący niech będzie.

Liczba naymniéyſza - x
Więc śrzednia powinna bydź $x + 40$
A naywiększa - - $x + 80$.

Te trzy ilości razém złączone uczynią $3x + 120$.

Lecz treść zagadnienia wyciąga, żeby ſię równały liczbie 720. Więc muſi bydź $3x + 120 = 720$.

Poſtąpiwſzy ſobie podług reguł wyżéy położonych będzie, $3x = 720 - 120$, albo $3x = 600$, a zatém $x = 200$; więc śrzednia liczba będzie 240, a naywiększa 280; które z ſobą razém dodane w rzeczy ſaméy czynią 720.

Jawna ieſt, że w tym przykładzie, gdyby zamiaſt 720, 80, 40, były zadane inſze liczby, że mówię zagadnienie zawſze dałoby ſię ułatwić tymże ſamym ſpoſobém. A zatém w rozwiązaniu
wſzel-

wſzelkich zagadnién, w których rzeczby ſzła o podzielenie liczby wiadoméy na trzy części, takie żeby zbytek naywiękſzéy nad naymniéyſzą, był liczbą wiadomą oznaczoną przez b, a zbytek śrzedniéy nad naymniéyſzą był oznaczony przez c, rozumiąc iak wyżéy, można ſobie rzecz tak ułożyć.

Niechay będzie naymniéyſza liczba			x
Srzednia będzie	–	–	$x + c$
A naywiękſza	–	–	$x + b$
Te trzy liczby dodane uczynią			$3x + b + c$
Które równać ſię powinny ilości			a

Więc muſi bydź $3x + b + c = a$

A przeſtawiwſzy będzie $3x = a - b - c$; co po rozdzieleniu przemiéni ſię na $x = \frac{a - b - c}{3}$.

To ieſt, że ażeby miéć liczbę naymniéyſzą, trzeba od téy liczby co ma bydź podzielona odiąć dwa zbytki, i reſzty wziąść trzecią część: którą maiąc łatwo będzie wynaléśdź drugie dwie liczby. Tak gdyby było zadano rozdzielić 642 na trzy części, z ktorychby śrzednia przewyżſzała naymniéyſzą o 75, a naywiękſza przewyżſzała też naymniéyſzą o 87; dodaię razém dwa zbytki 75 i 87, co uczyni 162: odiąwſzy 162 od 642 zoſtaie 480, których trzecia część 160 będzie naymniéyſzą częścią. A zatém dwie inne będą naſtępuiące to ieſt $160 + 75$ albo 235, i $160 + 87$ albo 247.

Te dwa zagadnienia mogą bydź wprawdzie rozwiązane bez Algebry, ale łatwość ich ſłuży do tém iaśniéyſzego okazania wyżéy przepiſanego ſpoſobu, w iaki układaią ſię zrównania z danych zagadnień.

ZAGADNIENIE TRZECIE.

Podzielić 14250 flintowych ładunków na trzy komendy, których wielkości miałyby ſię między ſobą iak liczby 3, 5, 11; to ieſt z których pierwſza byłaby do drugiéy :: 3 : 5, i znowu piérwſza do trzeciéy :: 3 : 11.

Gdy-

Gdybym wiedział wielé przypadłoby ładunków na iednę którąkolwiek komendę *np.* na piérwſza, mógłbym ſprawdzić tę liczbę naſtępuiącym ſpoſobém.

Szukałbym przez regułę trzech liczby któraby miała ſię do piérwſzéy :: 3 : 5, i miałbym drugą. Szukałbym podobnież inſzéy liczby któraby znowu miała ſię do piérſzéy :: 3 : 11, i miałbym trzecią; te trzy liczby razém dodane powinny uczynić 14250. Wykonaymy to.

Niech będzie liczba ładunków odpowiadaiąca piérwſzéy komendzie x; żeby wynaléśdź drugą ſzukam czwártego wyrazu proporcyi naſtępuiącéy, 3 : 5 :: x :; takowym czwártym wyrazém będzie $\frac{5x}{3}$. Zebym znowu doſzedł trzeciéy liczby, ſzukam czwártego wyrazu téy proporcyi, 3 : 11 :: x :; którym będzie $\frac{11x}{3}$. Te trzy liczby z ſobą dodane uczynią $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$, albo $x + \frac{16x}{3}$. Lecz treść zagadnienia pokazuie że ta ilość powinna równać ſię liczbie 14250; więc muſi bydź $x + \frac{16x}{3} = 14250$

Zebym doſzedł wártości x, naprzód ruguię mianownika 3 (57), i mam $3x + 16x = 42750$, albo $19x = 42750$; potém podług (56) rozdzieliwſzy przez 19, będzie $x = \frac{42750}{19}, = 2250$. A zatém liczba ładunków wyrażona przez $\frac{5x}{3}$, odpowiadaiąca drugiéy komendzie uczyni, $\frac{5 \times 2250}{3}$, albo 3750; a trzecia która była $\frac{11x}{3}$ uczyni, $\frac{11 \times 2250}{3}$, albo $\frac{24750}{3}$, albo 8250; te trzy ilości razém złączone ſkła-

ſkładaią w rzeczy ſamey liczbę 14250; też trzy ilości iakoto 2250, 3750, i 8250, ſą między ſobą ieſzcze w ſtóſunku liczb 3 : 5 : 11; co można łatwo okazać rozdzieliwſzy trzy pierwſze liczby przez 750, czèm ſtóſunek między niemi nieodmieni ſię.

Gdyby liczba zadana do rozdzielenia zamiaſt 14250, była iakakolwiek inſza w powſzechności wyrażona przez a, i gdyby liczby proporcyonalne zamiaſt 3, 5, 11, były trzy ilości wiadome w powſzechności oznaczone przez m, n, p, rzecz oczywiſta że i w tym razie nietrzebaby więcey, tylko powtórzyć poprzèdzaiące działanie.

I tak oznaczywſzy pierwſzą część przez x. Dla znalezienia drugiey, trzebaby ſzukać czwártego wyrázu proporcyi naſtępuiącey $m : n :: x :$

Któryto czwárty wyráz wypadnie $\frac{nx}{m}$.

Dla wynalezienia znowu trzeciey części. ſzukać ſię będzie czwártego wyrazu tey proporcyi, $m : p :: x :$ - ſkąd wypadnie $\frac{px}{m}$. Te trzy części dodane uczynią $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, albo $x + \frac{nx + px}{m}$; lecz oráz te trzy części równać ſię powinny ilości a; więc muſi bydź $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

Wyrugówawſzy mianownika będzie $mx + nx + px = ma$, co po rozdzieleniu da $x = \frac{ma}{m + n + p}$. A ſtąd można ſądzić o użyteczności Algebry, do wynaydówania reguł Arytmetycznych.

Gdybym chciał wyrachówać czwárty wyráz proporcyi poczynaiącey ſię od tych trzech $m + n + p : m :: a :$; rzecz oczywiſta z fundamentów Arytmetyki, że takowy czwárty wyráz wypádłby

am

$\frac{am}{m + n + p}$, a ponieważ znayduiemy, że x ieſt oznaczone przez tęż ſamę ilość. wnieśmy ſtąd, że ażeby mieć x, trzeba wyrachówać czwárty wyráz proporcyi, w któreyby pierwſzym wyrazèm była ſumma części proporcyonalnych, drugim liczba pierwſza z trzech liczb proporcyonalnych, a trzecim ſama liczba która ma bydź rozdzielona. I ta też właśnie ieſt reguła, iaka ſię podaie w Arytmetyce do rozwiązania zagadnień tego gatunku.

ZAGADNIENIE CZWARTE.

Wyſłano z Warſzawy do Kamieńca wyprawę z Artyleryą ta czyni 4 mile na dzień. W dzień potèm wyſłano drugą wyprawę z kulmi armatnemi i bombami z Końſkich do tegóż Kamieńca, ale ta czyni 6 mil na dzień, ieſt pytanie kiedy ta druga wyprawa dogoni pierwſzą, wiedząc nadto, że z Końſkich do Warſzawy ieſt mil 18? *

Gdyby mi było wiadomo wiele mil powinna uczynić druga wyprawa żeby dognała pierwſzey, ſprawdziłbym to, w naſtępuiący ſpoſób: ſzukałbym wiele drogi odbyła pierwſza wyprawa przez ten czas gdy druga była w drodze; a że podróż ich muſi bydź proporcyonalna liczbie mil odbywaiących ſię na dzień, więc znaydę wiele mil pierwſza wyprawa odbyć muſiała, ſzukaiąc czwartego wyrazu naſtępuiącey proporcyi, 6 ma ſię do 4, iak liczba mil odbytych przez drugą wyprawę do liczby mil które przez tenże czas uiachała pierwſza wyprawa. Znalazłſzy ten czwárty wyráz dodám do niego liczbę mil które odbyła pierwſza wyprawa w iednym dniu, którym uprzèdziła drugą wyprawę, iako też 18 mil to ieſt odległość z Warſzawy do Końſkich także na przód dąną pierwſzey

wy-

---

* *W tym przykładzie przemieniliśmy Miaſta zagraniczne na kraiowe.*

wyprawie, a tak to wſzyſtko oczywiście powinno
ſkładać liczbę mil odbytych przez drugą wypra-
wę; wykonaymy to.

Oznaczywſzy przez x liczbę mil odprawić ſię
maiących przez drugą wyprawę na dogoniénie
piérwſzéy.

Przez ten czas wyprawa z Warſzawy uczyni mil $\frac{4}{6}x$,
albo $\frac{2}{3}x$.

A przez dzień o który ruſzyła przodém uczyni mil 4.
Odległość z Końſkich do Warſzawy mil - 18

Te trzy ilości uczynią - $\frac{2}{3}x + 22$.

Więc $\frac{2}{3}x + 22$ będzie wártością drogi odbyć ſię
mianéy przez drugą wyprawę na dogoniénie piér-
wſzéy. Ponieważ zaś w tém rozumówaniu zało-
żyliśmy ſobie, że ta druga wyprawa uczyniła mil x,
więc będzie $\frac{2}{3}x + 22 = x$; ſkąd przez reguły po-
przédzaiące wypada $x = 66$; to ieſt że te dwie wy-
prawy znidą ſię z ſobą gdy druga wyprawa odbę-
dzie mil 66, albo o 66 mil od Końſkich.

Jakóż przez ten czas gdy druga wyprawa
uczyni mil 66, piérwſza odbędzie 44, odprawuiąc
po 4 mile na dzień, gdy druga odprawia po 6 mil;
lecz piérwſza wyprawia ma do tego na przód 4 mi-
le ruſzywſzy piérwéy iednym dniém, i 18 mil któ-
rémi dla położenia miéyſca z którégo ruſza uprzé-
dzą drugą wyprawę, więc piérwſza wyprawa znay-
dówać ſię będzie o 66 mil od Końſkich, to ieſt na
tymże miéyſcu gdzie ſię w ten czas znayduie druga.

Przyłożywſzy cokolwiek uwagi łatwo poiąć
można, że chociażby liczby zadane były odmién-
ne, przecięż ſpoſób rozumówania i działania zo-
ſtanie

ſtanie nieodmiénny. I tak oznaczmy ſobie w po-
wſzechności odległość między miéyſcami z których
wyprawy ruſzaią iak tu 18 mil przez a. liczbę mil
codziénnych piérwſzéy przez c, liczbę zaś mil co-
dziénnych drugiéy wyprawy przez d.

Jeżeli nazwiémy x. liczbę mil drugiéy wy-
prawy, potrzebnych na dognanie piérwſzéy, to x
będzie złożone z odległości między dwóma miéy-
ſcami z których ruſzaią wyprawy, z przeciągu dro-
gi którą piérwſza wyprawa odprawić może przez
dni b danych ſobie na przód, i naoſtatek z przecią-
gu drogi, którą odbędzie taż piérwſza wyprawa
przez ten cały czas, gdy druga znaydówać ſię bę-
dzie w podróży.

Zeby wynaléśdź tę oſtatnią wártość, uważam
że dwie wyprawy bawiące ſię w podróży przez
równy przeciąg czaſu, powinny odbywać drogę w
proporcyą prędkości ſwoiéy iazdy; a zatém x bę-
dąc drogą drugiéy wyprawy, mieć będę przeciąg
drogi odprawionéy przez piérwſzą wyprawę w
tymże czaſie, wyrachówawſzy czwárty wyráz pro-
porcyi poczynaiącéy ſię od tych trzech, $d : c :: x :$ —
który wypadnie $\frac{c \times x}{d}$, albo proſto $\frac{cx}{d}$. Ponieważ
wiémy że piérwſza wyprawa czyni na dzień mil c
więc przez liczbę dni b powinna ich uczynić b ra-
zy tyle, to ieſt 8 razy albo razy 30, ieżeli b wárto
8, albo 30; ſłowém powinna odprawić tyle mil ile
znayduie ſię iedności w mnogości $c \times b$, albo w
bc; odprawiła ich tedy liczbę wyrażoną przez bc.

Zbierzmy teráz w iedno liczbę mil $\frac{cx}{d}$, z licz-
bą mil bc i z liczbą mil a, to wſzyſtko razém wzią-
wſzy uczyni $\frac{cx}{d} + bc + a$, i wyraża wiele mil dru-
ga wyprawa uczynić była powinna, lecz tę liczbę
ozna-

oznaczyliśmy przez x, więc muſi bydź $x = \frac{cx}{d} + bc + a$. Skąd wypada $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, to ieſt formuła przez którą mogą bydź rozwiązane wſzelkie zagadnienia tego gatunku, rozumieiąc że dwie wyprawy ſą wyſłane w iednę ſtronę, i że ruſzenie wyprawy powolniey odprawiaiącey podróż ſwoię, poprzedziło drugą wyprawę.

Zebyśmy zobaczyli w przykładzie użycie tey formuły, wróćmy ſię do poprzedzaiącego zagadnienia, i przypomniymy ſobie że a oznacza 18, to ieſt że $a = 18$ *mil*, $b = 1$ *dzień*, $c = 4$ *mil*, $d = 6$ *mil*. W tym razie będzie $x = \frac{1\times4\times6 + 18\times6}{6-4}$, albo $x = \frac{24 + 108}{2} = 66$, iak wyżey.

Takie tedy ieſt użycie formuł powſzechnych, w których zamiaſt głoſek czyli liter położywſzy liczby pomienionemi głoſkami oznaczone, i odprawiwſzy działania, iakie wſkazuią porządek i znaki przy tych głoſkach napiſané, można rozwięzywać wſzelkie zagadnienia iednakowego rodzaiu.

Np. gdyby było dane to drugie zagadnienie: *Wſkazówka godzinna, odpowiada 17 minutóm na zegarku, wſkazówka zaś minutna odpowiada 24 minutóm, to ieſt że zegarek pokazuie godzinę trzecią i minut 24, daymy że ieſt pytanie, w iakiey liczbie godzin i minut, te dwie wſkazówki ſtaną iedna na drugiey?*

Ponieważ ſkazówka godzinna i minutna, razem poczynaią ruch ſwóy, więc ilość b, przez którą wyżey oznaczyliśmy uprzedzenie pierwſzey wyprawy, będzie tu zerem. Odległość między dwoma mieyſcami z których ruſzaią, ieſt w tym przykładzie droga którą ma odprawić ſkazówka minutna żeby przyſzła z dwudzieſtego czwartego prze-

przedziału do ſiedmnaſtego, to ieſt że $a = 53$ przedziałóm. Przez ten czas gdy wſkazówka minutna przebiega 60 przedziałów, wſkazówka godzinna przebiega ich tylko 5, więc będzie $c = 5$, a $d = 60$. Że zaś b ieſt tu zerem, przeto z formuły $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, trzeba wyrzucić wyraz bcd, albo $b \times cd$; bo zero rozmnożone bądź przez iaką chce ilość, zawſze daie zero. W tym tedy razie będzie $x = \frac{ad}{d - c}$, gdzie zamiaſt a, d, c. położywſzy onych wartości będzie $x = \frac{53 \times 60}{60 - 5} = \frac{3180}{55} = 57\frac{45}{55} = 57\frac{9}{11}$; to ieſt że potrzeba ażeby wſkazówka minutna przebiegła ieſzcze 57 przedziałów i $\frac{9}{11}$. A tak ponieważ odpowiadała dwudzieſtemu czwartemu przedziałowi, odpowiadać będzie 81 przedziałóm i $\frac{9}{11}$; albo z przyczyny że 60 przedziałów czynią ieden obieg wkoło czyli iednę godzinę, dwie ſkazówki przypadną iedna na drugiey na przedziale $21\frac{9}{11}$ godziny naſtępuiącey, to ieſt o godzinie 4*tey*, minucie $21\frac{9}{11}$.

Większa użyteczność rozwiązań Algebraicznych nad liczebne, nietylko ſtąd pokazuie ſię, że w każdém ſzczególnem zagadnieniu nietrzeba więcey tylko zamiaſt liter położyć liczby, ale też że częſtokroć przygotowawſzy te rozwiązania w pewny ſpoſób, można im dać prościeyſze wyrażenie i łatwiey zachować ie w pamięci. Weźmy przykład z formuły dopiero wynalezioney $x =$

$\frac{ad + bcd}{d - c}$, ilość d będąc ſpólnym czynnikiém w obu wyrazach licznika, wártość głoſki x da ſię wyrazić w téy poſtaci $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$; z któréy można łatwo rozeznać, że wártość głoſki x, ieſt czwártym wyrázém proporcyi poczynaiącéy ſię od tych trzech, $d - c : d :: a + bc :$ - - lecz z tych trzech wyrazów piérwſzy $d - c$ znaczy różnicę między prędkościami iazdy dwóch wypraw, drugi d znaczy prędkość iazdy drugiéy wyprawy, a trzeci $a + bc$, ſkłada ſię z odległości a między dwóma miéyſcami z których ruſzaią te wyprawy, i z ilości bc albo $b \times c$, wyrażaiącéy wiele uczyni mil piérwſza wyprawa przez liczbę dni, którémi wyprzedziła drugą wyprawę. Więc rozwiązanie zagadnienia może bydź zamknięte w téy regule: *Rozmnóż liczbę mil którą piérwſza wyprawa czyni na dzién przez liczbę dni którémi uprzédziła drugą wyprawę, tę mnogość doday do odległości między dwóma miéyſcami z których wyprawy ruſzaią, i ułóż regułę trzech naſtępuiącą: Różnica między prędkościami iazdy dwóch wypraw, ma ſię do prędkości drugiéy wyprawy, iak ſumma dwóch ilościów dodanych z ſobą podług przepiſu dopiéro poprzédzaiącego, ma ſię do czwártego wyrazu;* który pokaże liczbę mil iaką odbydź muſi druga wyprawa żeby dogoniła piérwſzéy. Stóſuiąc to do przykładu wyżéy położonego, uważam że piérwſza wyprawa uprzédziła drugą iednym dniém, a że czyni 4 mile na dzién, więc mam dodać 4 mile do 18. to ieſt do odległości między miéyſcami z których ruſzaią wyprawy, a potém ſzukám czwártego wyrazu proporcyi poczynaiącéy ſię od tych trzech, $6 - 4 : 6 :: 22 :$ - albo $1 : 3 :: 22 :$ - - takowy czwárty wyráz wypadnie 66, iak było wyżéy.

Uwa-

Uwagi względém ilościów twiérdzących i przéczących.

61. Po rozwiązaniu w powſzechności wſzelkich zagadnién iednakowego gatunku, częſtokroć można ieſzcze użyć tychże ſamych powſzechnych formuł, do rozwiązania innych zagadnién, w których warunki znaydowałyby ſię wcale przeciwne tym co z nich formułą wyniknęła: czaſém ſamo odmiénénie znaków + w —, albo — w +, bywa do tego doſtárczaiące. Lecz nim przyſtąpiémy do użycia takowéy odmiany znaków, wprzód należy nam w inſzy ſpoſób uważyć pomiénione ilości.

Litery oznaczaią tylko ilości powſzechne. Znaki + i — uważyliśmy dotąd iako nieznaczące nic więcéy tylko działania dodawania i odéymowania, lecz w wielu przypadkach mogą także wſkazówać ſpoſób w iaki iedne ilości maią ſię naprzeciw drugich.

Taż ſama ilość da ſię uważać dwóma przeciwnémi ſobie ſpoſobami, to ieſt uważaiąc iéy własność, mocą któréy może pomnożyć drugą ilość albo umniéyſzyć. Kiedy ta ilość, będzie tylko wyrażona przez głoſkę iaką albo przez liczbę, w tym razie niémaſz nic coby mi wſkazó-

zó-

zówało, w iakiém rozumiéniu onę uważam. *Np.* gdy pewny człowiék ma tyle maiątku co i długu, taż sama liczba zarówno służyć może do wyrażenia tak piérwszéy ilości iako i drugiéy, lecz ta liczba bądź iaka chce niepokaże zachodzącéy różności między piérwszą ilością a drugą. Nayprostszy sposób do wskazania téy różności, iest naznaczyć takowe ilości znakiém, któryby dał do wyrozumiénia, iaki skutek czyni iedna ilość naprzeciw drugiéy; a że skutkiém długu iest odéymówać od maiątku, więc naturalnie wypada, ażeby dług znaczył się nakiém —.

Podobniéż zmyśliwszy sobie (fig. 1.) linią zrobioną przez ruch punktu A, prostokątnie postępuiącego względém linii BC, daie się poymówać że ten punkt mogąc iśdź albo od A ku D, albo od A ku E, ieżeli przez *a* wyrazimy drogę AD albo AE którą odprawi, ieszcze przez to nieznaczymy położenia tego punktu. Zeby oznaczyć to położenie trzeba wskazać iakowym znakiém, czyli ilość *a* ma bydź uważana po prawéy stronie czy też po léwéy; znaki + albo — są do tego sposobne. Albowiém biorąc ruch punktu A względém iakiego wiadomego punktu L, i poczytanego za punkt stały, gdy punkt A

postępuie ku D, iego ślad będzie pomnażał długość LA; ieżeli zaś postępować będzie ku E, ślad iego odwrótnym sposobém będzie ukrócał długości LA; naturalnie tedy można oznaczyć AD przez + *a*, albo prosto przez *a*, a odwrotnie AE, przez — *a*.

Gdybyśmy uważali ruch punktu A nie względém punktu L, ale względém punku O, trzebaby to wszystko co się powiedziało wziąść w rozumiéniu przeciwném.

Ilości tedy przéczące maią tak rzetelną istność iak ilości twiérdzące, i nietelną różnią się między sobą tylko tém, że w rachunkach biorą się w rozumiéniu przeciwném.

Ilości twièrdzące i ilości przèczące, mogą bydź i częstokróć znayduią się w rachunkach pomièszane iedne z drugiémi, nietylko dla tego, że pewne działania iakośmy widzieli wyżéy wyciągaią odięcia iednych ilościów od drugich, ale téż że często trafia się potrzeba wyrażenia różnych postaci, pod którémi uważamy ilości.

Wreszcie, ilości przèczące niechay będą w iakièykolwiek postaci uważane, to reguły podane wyżéy do różnych działań z ilościámi, niémniéy zostaną zawsze nieodmiénne. Jaśniéy to pokaże się ieszcze w uwagach nastęnuiących.

62. Jeżeli się trafi, że po rozwiązaniu zagadniénia sposóbami wyżéy przepisanémi, wártością niewiadoméy będzie ilość przècząca, *np.* gdy się znalázł taki wypadek, $x = -3$, należałoby stąd wnieść, że wártość oznaczona przez x, niéma tych własnościów któreśmy w niéy rozumieli pod czas rachunku, ale wcale przeciwne. *Np.* gdyby trzeba było rozwiązać następuiące zagadniénie: *Znaleść taką liczbę która dodana do 15 uczyniłaby 10.* To zagadnienie iest oczywiście niepodobne. Jeżeli liczbę szukaną oznaczymy przez x, miéć będziém to zrównanie, $x + 15 = 10$; a zatém na fundamencie wzwyż założonych reguł będzie $x = 10 - 15$, albo $x = -5$. To ostatnie wyrażenie pokazuie, że x które uważałém iako dodane do 15, dla złożenia liczby 10, i owszém powinno bydź odięte. Każde tedy rozwiązanie wypadaiące w ilościach przèczących, znakiém iest iakiego fałszywego przypuszczenia, wchodzącego w wyrażenie zagadniénia; lecz oraz wskazuie iak ma bydź poprawione, daiąc do poznania, że ilość szukana

kana powinna bydź wzięta w rozumiéniu wcale przeciwném.

63. Wnieśmy stąd, że po rozwiązaniu zagadnienia, w którém niektóre ilości były wzięte w pewnèm rozumièniu, żeby rozwiązać tóż zagadniénie ale w rozumiéniu przeciwnèm, dosyć będzie odmiènić wszystkie znaki znayduiące się przed ilościami. *Np.* w zagadnièniu czwártèm rozwiązanèm w powszechnych wyrazach, gdybym chciał mièć rozwiązanie innych zagadnień, w rozumiéniu że wyprawy nieidą w iednę stronę, ale iedne naprzeciw drugim; w wártości wyżéy znalezionéy $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, odmiénię tylko znaki należące do głoski c. Jakóż ponieważ piérwsza wyprawa idzie naprzeciw drugiéy, przeto zamiast oddalania się, przybliża się do drugiéy, i ukraca iéy drogi w proporcyi ilości c, to iest w proporcyi liczby mil które na dzień czyni; więc trzeba to wyrazić, że c zamiast dodawania odéymuie, to iest trzeba odmiénić znaki należące do ilości c. Uczyniwszy tę odmianę będzie $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$. Albowiém w wyrazie $+ bcd$, który nieiest co

co innego tylko $bd \times c$, odmiéniaiąc znak należący do c, trzebaby napiſać $bd \times -c$, co podług (24) wychodzi na $-bcd$. Bo ſtąd co iuż wyżéy w téy miérze powiedziało ſię wnoſi ſię, że dla znaku $-$ położonego przed c, ilość c powinna bydź wzięta w przeciwném rozumiéniu iak gdyby miała znak $+$; lecz c wzięte z znakiem $+$ wyrażałoby wiele razy trzebaby dodać ilość bd, więc toż c poprzédzone znakiém $-$, iak w niniéyſzym razie ma znaczyć, wiele razy pomiénioną ilość potrzeba odiąć, tak iż na mnogość wypadnie $-bcd$. W powſzechności, kiedy ilości przéczące maią z natury ſwoiéy rozumiénie przeciwne temu, iakieby miały gdyby były twiérdzącémi, i kiedy takowa różność ieſt wſkazana znakami działań ſobie przeciwnych, w takowym razie trzeba zawſze rozumiéć, że co względém iednych było dodaniém, względém drugich powinno bydź odięciém, i odwrotnie; tak że ieżeli b odięte od a daie $a-b$, $-b$ odięte od tegóż a, muſi dać $a+b$. Stąd pokazuie ſię, że biorąc wſzyſtko podług tego poięcia iakie miéć należy o ilościach przéczących, pomiénione dwa działania przemiéniaią ſię iedno w drugie, tak że ilości twiérdzące ſtaią ſię prze-

przéczącémi, i odwrotnie. Jakóż właściwie mówiąc, tylko nazwiſko w nich zachowuie ſię, i tylko przez nieiakie podobiéńſtwo mówi ſię że $-b$ odéymuie ſię od a.

Potwiérdzmy to przykładém co dopiéro powiedziało ſię o użyciu znaków, w rozwiązaniu zagadnień w którychby zadane warunki znaydówały ſię przeciwne. Daymy że dway Kuryerowie wyprawiéni z dwóch miéyſc odległych iedno od drugiego na 100 mil, pędzą w rozumiéniu przeciwném. Piérwſzy ruſzył 7 godzinami przed drugim, i czyni dwie mile na godzinę, drugi zaś w godzinie odprawia 3 mile. Nazwiymy x drogę, którą odprawić muſi drugi Kuryer, żeby ſię ſpotkał z piérwſzym; uważam że x powinno bydź równe różnicy między całą odległością dwóch miéyſc, i drogą którą odprawi piérwſzy Kuryer; lecz droga tego oſtatniego ſkłada ſię z liczby mil ubieżonych przez 7 godzin, tudzież z ilości mil które on odprawi przez ten czas gdy drugi znaydówać ſię będzie w podróży; ta zaś druga ilość pokaże ſię z czwartego wyrazu téy proporcyi, $3 : 2 :: x :$ ſkąd wypada $\frac{2x}{3}$; a ponieważ liczba mil ubieżonych przez piérwſzego Kuryera w 7 godzinach czyni mil 14, rachuiąc co godzina 2 mile, więc piérwſzy Kuryer odprawi ze wſzyſtkiém mil $14 + \frac{2x}{3}$, a zatém drugiému Kuryerowi zoſtanie ſię do odbycia mil $100 - 14 - \frac{2x}{3}$, albo $86 - \frac{2x}{3}$, więc będzie $x = 86 - \frac{2x}{3}$. Zrównanie z którego wyciąga

ſię

ſię $x = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5}$. A tak i z formuły $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$, którą tu przyſtóſować umyśliliśmy, jeżeli zamiaſt a położymy 100; zamiaſt b, 7; zamiaſt d, 3; zamiaſt c, 2; znaydziémy podobnież iak wyżéy $51\frac{3}{5}$

W dalſzym przeciągu ſtarać ſię będziémy, podawać coráz iaśnieyſze wyrozumiénie, w iakiém ilości przéczące brać ſię powinny.

64. Ponieważ bardzo wiele na tém zależy, żeby nabydź łatwości do ułożenia ſobie potrzebnych zrównań, przeto dla wprawy poczynaiących przydaią ſię tu niektóre zagadniénia proſte i onych rozwiązania, z którychby każdy mógł ſię zapewnić o dobrze albo zle odprawionèm działaniu ſwoièm. Po rozwiązaniu tych zagadnién w liczbach zadanych, użyteczna rzecz będzie, też ſame działania powtórzyć znowu przez głoſki: tym ſpoſobèm wprawić ſię będzie można w rozwiązywanie wſzelkich zagadnién i uważanie rzeczy w ſpoſób powſzechny.

Znaléśdź liczbę, która dodana koléyno do 5 i do 12, dałaby dwie ſummy maiące ſię iedna do drugiéy, iak 3 do 4? Rozwiąz: 16.

Znaléśdź taką liczbę, którèy połowa, tróyka, i $\frac{2}{5}$ razém złączone, przenoſiłyby też liczbę o 7? Rozwiąz: 30.

Uży-

Używaiąc do roboty trzech Kopaczów takich, że piérwſzy może wykopać na dzién 5 ſążni, drugi 7, a trzeci 8; ieſt pytanie ci trzéy robotnicy razém kopiąc, w iakim czaſie wygotuią 100 ſążni? Rozwiąz. W 5 dniach.

Naięto robotnika leniwego za 24 gr. na dzién przez któryby robił, ale pod tym warunkiém, że za każdy dzién którego robić niebędzie wytrąci mu ſię z zapłaty iego po gr. 6; w 30 dni czyni ſię z nim porachunek, z którégo pokazuie ſię że mu ſię nic nienależy; ieſt pytanie przez wiele dni robił? Rozwiąz. Przez 6 dni.

Pewny drwal kupiwſzy drzewo, potém go przedaie o 1500 złott. drożéy aniželi go koſztówało. W téy przedaży zarabia 10 na ſtu, to ieſt na całéy ſummie za którą przedaie; ieſt pytanie wiele koſztówało go to drzewo? Rozwiąz: 13500 złł.

Pewną ſummę wypłacono w 15 razach, za każdym razém pomnażaiąc wypłatę iednakową ilością, za piérwſzém wypłaceniém oddano 7 złł. a za oſtatniém 37; ieſt pytanie o wiele pomnażała ſię każda wypłata? Rozwiąz. O $2\frac{1}{7}$ złł.

Maiąc 9 ftów zaprawy do ktotofilnych ogniów, złożonéy z 8 ftów ſalitry i 1 fta ſiarki; ieſt pytanie wiele do téy miéſzaniny przydaćby trzeba ſalitry, żeby na każdych 9 ftach nieznaydòwało ſię więcéy ſiarki tylko po 8 łot:? Rozwiąz: 27 ftów.

O Zrównaniach piérwſzego ſtopnia z wielą niewiadomémi.

65. Czyto iedna czy więcéy będzie niewiadomych, ſpoſób układania ſobie zrównań przeto nieodmiénia ſię. W powſzechności mowiąc, trzeba układać ſobie tyle zrównań, ile ich dać mogą warunki wchodzące w zagadniénie.

Je-

Jeżeli te warunki ſą oſobne i niezawiſłe iedne od drugich, i ieżeli oráz każdy warunek może bydź wyrażony przez oſobne zrównanie, natenczas niémożna miéć tylko iedno rozwiązanie zagadniénia; w czém rozumié ſię że te wſzyſtkie zrównania ſą piérwſzego ſtopnia, i że ich tyle ieſt ile znayduie ſię niewiadomych. Lecz ieżeli który z danych warunków, bądźto otwarcie bądź taiemnié mieści ſię w innym warunku, albo ieżeli liczba warunków ieſt mniéyſza od liczby ilościów niewiadomych, w tym razie wypadać będzie mniéy zrównań, aniżeli znayduie ſię ilościów niewiadomych, i zagadniénie może bydź rozwiązane nieokréśloną liczbą ſpoſobów; chyba że iaki warunek przypadkowy który w zrównaniu wyrazić ſię nieda, okréśli liczbę takowych rozwiązań. Obiaśniymy to przykładami.

Daymy naprzód że mamy dwa zrównania i dwie niewiadome. Reguły podane do zrównań z iedną niewiadomą, ſłużą także zrównaniom z wielą niewiadoméмі; lecz względém zrównań z dwiéma niewiadoméмі, trzeba nadto przydać regułę naſtępuiącą.

66. *Weźmiy w każdém zrównaniu wártość iednakowéy niewiadoméy, poſtępu-*

iąc

iąc ſobie tak, iak gdyby w niém wſzyſtkie inne ilości były wiadome. Z tych dwóch wártościów zrób nowe zrównanie, które iuż tylko drugą niewiadomą w ſobie zawiérać będzie, a zatém doydzieſz tey wártości podług reguł poprzédzaiących. To maiąc, położyſz takową wártość w piérwſzém albo w drugiém zrównaniu, gdzie znaydówała ſię wyrażona przez niewiadomą; i tym ſpoſobém miéć będzieſz wártość piérwſzéy niewiadoméy.

Np. gdybym miał dwa zrównania, $2x + y = 24$ i $5x + 3y = 65$. Piérwſze daie mi $x = \frac{24 - y}{2}$, a drugie, $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

Z tych dwóch wártościów ilości x czynię nowe zrównanie, piſząc $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$, w którém nieznayduie ſię iuż tylko druga niewiadoma y, i z ktorégo podług reguł wzwyż przepiſanych wyciąga ſię, $y = 10$.

Żeby miéć x, kładę zamiaſt y wártość onego 10, w któréykolwiek z dwóch ilościów równaiących ſię głoſce x; co mi da $x = \frac{24 - 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

67. Weźmy znowu na drugi przykład dwa naſtępuiące zrównania, $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$ i $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$.

Zaczynam naprzód od przemiany tych zrównań na te (57), $24x - 25y = 60$ i $8x + 9y = 228$.

Z piérwſzego wyciągnąwſzy x, mam $x = \frac{60 + 25y}{24}$

Z

Z drugiégo wypada - - $x = \frac{228 - 9y}{8}$

Zrobiwſzy zrównanie z tych dwóch wártościów głoſki x, mam $\frac{60 + 25y}{24} = \frac{228 - 9y}{8}$, w którém iuż nieznayduie ſię tylko iedna niewiadoma, to ieſt y, i wypada $y = 12$.

Zebym miáł x, kładę zamiaſt y wynalezioną wártość iego 12, w któréykolwiek z dwóch ilościów równaiących ſię głoſce x, *np.* w tém piérwſzém zrównaniu $x = \frac{60 + 25y}{24}$, co mi da $x = \frac{60 + 25 \times 12}{24} = \frac{360}{24} = 15$.

68. Weźmy ieſzcze na trzeci przykład te dwa zrównania, $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$ i $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$.

Znióſłſzy mianowniki będzie (57), $56x = 35x + 60y - 1260$, i $56x - 20y = 35y - 420$.

Z piérwſzego zrównania wyciągnąwſzy x, będzie $x = \frac{60y - 1260}{21}$, z drugiego zaś wypada $x = \frac{55y - 420}{56}$.

Zrobione nowe zrównanie z tych dwóch wártościów głoſki x, będzie $\frac{60y - 1260}{21} = \frac{55y - 420}{56}$, z którego wyciąga ſię $y = 28$.

Zebym miáł x, kładę zamiaſt y wártość iego 28 w zrównaniu wyżéy wynalezionėm, co mi daie $x = \frac{60 \times 28 - 1260}{21} = \frac{420}{21} = 20$.

69.

69. Weźmy ſobie nakoniec na oſtatni przykład dwa zrównania lireralne, $ax + by = c$ i $dx + fy = e$, w których głoſki a, b, c, d, e, f, wyrażaią ilości wiadome, bądźto twiérdzące bądź téż przeczące. Piérwſze zrównanie da mi, $x = \frac{c - by}{a}$, a drugie, $x = \frac{e - fy}{d}$. Z tych dwóch wártościów robię nowe zrównanie i mam, $\frac{c - by}{a} = \frac{e - fy}{d}$, które po znieſiéniu ułamków i po przeſtawiéniu, przemiénia ſię na $afy - bdy = ae - cd$, i daie mi $y = \frac{ac - cd}{af - bd}$.

Zebym miáł x, kładę zamiaſt y wártość iego $\frac{ac - cd}{af - bd}$ w którémkolwiék z dwóch zrównań wyżéy położonych, *np.* w zrównaniu $x = \frac{c - by}{a}$; ſkąd wnoſzę bydź $x = \frac{c - b \times \frac{ac - cd}{af - bd}}{a}$,

albo (przemiéniwſzy także c w ułamek), $x = \frac{\frac{afc - bcd - abc + bcd}{af - bd}}{a}$,

albo $x = \frac{afc - abc}{aaf - abd}$ albo naoſtatek (33), $x = \frac{fc - bc}{af - bd}$.

70. Dotąd rozumiało ſię, że obie niewiadome, znayduią ſię w obu zrównaniach. Lecz gdyby tak niebyło, rachunek przeto różnić ſię niebędzie od poprzédzaiących, chyba w tém że ſię odprawia z większą łatwością.

Np.

Np. maiąc dwa zrównania, $5ax = 3b$ i $cx + dy = c$. Z piérwſzego zrównania wyciągam $x = \frac{3b}{5a}$, a z drugiego $x = \frac{c - dy}{c}$. Złożywſzy nowe zrównanie z tych dwóch wártościów, mam $\frac{3b}{5a} = \frac{c - dy}{c}$, z którego po wyrugówaniu mianowników, po przeſtawiéniu i po zebraniu, wypada mi $y = \frac{5ac - 3bc}{5ad}$

O Zrównaniach piérwſzego ſtopnia z trzema i więcéy niewiadomémi.

71. Zrozumiawſzy dobrze to wſzyſtko co dotąd powiedziało ſię, łatwo będzie wniéść ſobie, iak ſię potrzeba obéyśdź w przypadku większéy liczby ilościów niewiadomych i zrównań.

Rozumieiąc że zawſze znayduie ſię tyle niewiadomych co zrównań: Jeżeli ich będzie trzy, wyciągnieſz z każdego wártość teyże niewiadoméy iak gdyby wſzyſtkie inne ilości były wiadome, potém przyrównaſz piérwſzą wártość do drugiéy, i też piérwſzą znowu do trzeciéy, albo też piérwſzą do drugiéy, a drugą do trzeciéy. Tym ſpoſobém, zoſtaną tylko dwie niewiadome i dwa zrównania, z którémi poſtąpiſz ſobie podług reguły wyżéy podanéy (66).

Np. niech będą dane trzy zrównania następuiące, $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$ i $5x - y + 3z = 75$.

Z piérwſzego wyciągam $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$

Z drugiego - - $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$

Z trzeciego - - $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$

Przyrównawſzy piérwſzą wártość głoſki x do drugiéy, mam $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$, przyrównawſzy podobnież piérwſzą do trzeciéy, mam $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$. A tak maiąc iuż tylko dwie niewiadome i dwa zrównania, poſtępuię ſobie z niémi podług reguły wyżéy przepiſanéy (6).

To ieſt z każdego z tych zrównań wyciągam wártość głoſki y; z piérwſzego wypada mi $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, z drugiego zaś $y = \frac{670 - 26z}{28}$.

Przyrównawſzy te dwie wártości iednę do drugiéy, wypada mi nowe zrównanie $\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}$, w którém iuż nieznayduie ſię tylko iedna niewiadoma, to ieſt $z = \frac{13950}{930} = 15$.

Zebym miał y, kładę zamiaſt z wártość iego 15 w zrównaniu $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, ſkąd mi wypada $y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{310}{31} = 10$.

Naoſtatek żebym miał x, kładę zamiaſt y wártość iego 10, a zamiaſt z wártość iégo 15 w któreykolwiek z trzech wyżéy wynalezionych wártościów ilości x, *np.* w tém zrównaniu $x = \frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Jeżeli niewſzyſtkie niewiadome wchodzą w każde zrównanie, rachunek wypadnie tylko tèm proſciéyſzy, ale zawſze podobny będzie działaniom dopiéró wyżéy opiſanym.

Np. gdyby dane były te trzy zrównania, $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$. Z piérwſzego zrównania wypada $x = \frac{65 - 3y}{5}$, a z trzeciego $x = \frac{57 - 4z}{3}$, bo w drugiém x nieznayduie ſię; w tym razie tedy będą tylko dwie wártości do przyrównania, to ieſt $\frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$, ſkąd x iuż ieſt wyrugówane. A zatém poſtąpiwſzy ſobie z tém zrównaniém, iak z drugiém $2y - z = 11$ podług reguł przepiſanych do zrównań z dwiema niewiadomémi, wynaydą ſię wártości głoſek y i z, które po ſkończonym rachunku bydź pokażą ſię $z = 9$, $y = 10$, naoſtatek $x = 7$.

72. Stąd pokazuie ſię, że gdyby było ieſzcze więcéy zadanych zrównań, nietrzeba więcéy tylko zachować regułę powſzechną naſtępuiącą: *Wyciągniy z każdego zrównania wártość téyże niewiawiadoméy, iednę z tych wártościów przyrównay do każdéy innéy z oſobna, tym ſpoſobém wyruguieſz iednę niewiadomą i iedno zrównanie. Obéydź ſię z témi drugiémi zrównaniami tak iak uczyniłeś z piérwſzémi, i znowu ci ubędzie iedno zrównanie i iedna niewiadoma; i tak daléy poſtępuy ſobie aż nakoniec zoſtanie ci ſię tylko iedna niewiadoma.*

73. Nie bez pożytku podobno będzie, gdy tu podamy ieſzcze drugi ſpoſób, podług którego wynaydówać ſię mogą wártosci ilościów niewiadomych w zrównaniach piérwſzego ſtopnia.

Np. niechay będą te dwa zrównania, $3x + 4y = 81$, i $3x - 4y = 9$. Jeżeli odéymieſz drugie zrównanie od piérwſzego, miéć będzieſz $8y = 72$, a zatém $y = \frac{72}{8} = 9$. Przeciwnym ſpoſobém, ieżeli dodaſz piérwſze do drugiego, miéć będzieſz $6x = 90$, a zatém $x = \frac{90}{6} = 15$. Jawna tedy ieſt, że kiedy dwa zrównania ſą takie, iż ſpółczynnik iednéy z niewiadomych ieſt iednakowy w obu zrównaniach, można bardzo łatwo przez ſamo dodanie albo odięcie, dwa zrównania przyprowadzić do tego ſtanu, żeby zawiérały w ſobie tylko iednę niewiadomą.

Ale czyż da ſię przywieśdź do tego ſtanu każde zrównanie, żeby w niém taż niewiadoma miała iednakowego ſpółczynnika? da zawſze; doſyć ieſt tym końcém rozmnożyć iedno z zrównań przez przyzwoitą liczbę. W czém można ſobie poſtąpić w naſtępuiący ſpoſób. *Np.* niech będą dane te dwa zrównania $4x + 3y = 65$ i $5x + 8y = 111$.

Oznaczam ſobie przez m liczbę o którą mi idzie, i rozmnażam przez to m iedno z danych zrównań *np.* drugie, co mi da $5mx + 8my = 111m$. Tak rozmnożone zrównanie dodaię do piérwſzego, i mam z tamtych dwóch to iedno, $4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m$, któremu można dać taką poſtać $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Zeby teráz z tego zrównania wyrugówać x, nietrzeba więcéy tylko zmyślić ſobie m bydź liczbą taką, że $4 + 5m = 0$, ſkąd wnoſi ſię $m = -\frac{4}{5}$. To przypuſzczenie przemiénia zrównanie wyżéy położone na to; $(3 + 8m)\, y = 65 + 111\, m$, z którego wyciąga ſię $y = \frac{65 + 111\, m}{3 + 8m}$, gdzie zamiaſt m położywſzy onego wártość $-\frac{4}{5}$, będzie . . .

$$y = \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = 7.$$

Gdybym zaś chciał był wyrugówać nie x ale y, zmyśliłbym ſobie był m liczbą taką, że $3 + 8m = 0$, to ieſt uczyniłbym był ſpółczynniki głoſki y równe zerowi, ſkąd miałbym $m = -\frac{3}{8}$. Takowe przypuſzczenie przemiéniłoby mi zrównanie na $(4 + 5m)$ $x = 65 + 111\, m$, z którego wyciągnąwſzy x, miałbym $x = \frac{65 + 111 m}{4 + 5m}$, a położywſzy w niém zamiaſt m wártość iego $-\frac{3}{8}$, miałbym naoſtatek . .

$$x = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = 11.$$

Gdyby były dane trzy zrównania i trzy niewiadome, trzeba rozmnożyć drugie zrównanie przez m, a trzecie przez n, a tak rozmnożone dodawſzy do piérwſzego, zmyślić ſobie ſpółczynniki dwóch z trzech niewiadomych x, y, z. równe zerowi, ſkąd powſtaną dwa zrównania ſłużące do wynaleziénia wártościów m i n, z któremi poſtąpiſz ſobie iak w razie poprzédzaiącym.

Obierz-

Obierzmy ſobie na przykład te trzy zrównania które iuż były wyżéy, $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$, $5x - y + 3z = 75$. Mnożę drugie zrównanie przez m, trzecie prze n, a dodawſzy ie tak rozmnożone do piérwſzego, mam $3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n$; co da ſię napiſać w téy poſtaci, $(3 + 8m + 5n)\, x + (5 + 3m - n)\, y + (7 - 2m + 3n)\, z = 179 + 64m + 75n$.

Jeżeli zechcę mieć z, zmyślę ſobie $3 + 8m + 5n = 0$, i $5 + 3m - n = 0$, przez co odmiéni ſię zrównanie na $(7 - 2m + 3n)\, z = 179 + 64m + 75n$, z którego wyciągam $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$; teráz nietrzeba więcéy tylko wynaléśdź wártości głoſek m i n, co wykonywam przy pomocy dwóch zrównań $3 + 8m + 5n = 0$. i $5 + 3m - n = 0$, z któremi powinienem obéyśdź ſię iak w przypadku wyżéy położonym, to ieſt rozmnożyć drugie zrównanie przez liczbę p, i rozmnożone dodać do piérwſzégo, ſkąd mieć będę $3 + 5p + 8m + 3pm + 5n - pn = 0$, co można tak napiſać, $3 + 5p + (8 + 3p)\, m + (5 - p)\, n = 0$. Zeby mieć n, zmyślam ſobie $8 + 3p = 0$, przez co zrównanie odmiénia mi ſię na $3 + 5p + (5 - p)\, n = 0$. z którego wyciągam $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p}$; zrównanie zaś $8 + 3p = 0$, daie mi $p = -\frac{8}{3}$, więc $n = \frac{31}{23}$; podobnymże ſpoſobém znaydę że $m = -\frac{28}{23}$: takowe wártości położywſzy w ilości równaiącéy ſię głoſce z, mieć będę $z = 15$. A ſtąd iawnie pokazuie ſię, jakby ſobie trzeba poſtąpić, w dochodzeniu wártości y albo x. Lecz byleby tylko znaléśdź iednę z niewiadomych, niéma potrzeby odprawiać dla każdéy podobnego rachunku: bo można użyć wártości téy niewiadoméy, kładąc ią w zrównaniach zadanych; a gdy tak ubędzie iedno

zró-

zrównanie, wynaydą ſię inne wartości, ſpoſobém który opiſał ſię wyżéy do takowego przypadku.

Przyſtóſowanie poprzédzaiących regul do rozwiązania niektórych zagadnién, w któréby wchodziło więcéy iak iedna niewiadoma.

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Maiąc dwa gatunki kul takich, że ſześć większego gatunku z dzieſięcią drugiego gatunku, ważą 304 ſty; *tudzież dzieſięć pierwſzego gatunku z piętnaſtą drugiego gatunku, ważą 480* ſtów; *ieſt pytanie iak wielefuntowy będzie każdy gatunek tych kul?*

Gdybym wiedział wagę każdéy kuli oboiego gatunku, rozmnożywſzy wagę pierwſzego gatunku przez 6, a drugiego gatunku przez 10, i dodawſzy te dwie mnogości iedna do drugiéy miałbym 304 *ſtów*; podobnież rozmnożywſzy wagę iednéy kuli pierwſzego gatunku przez 10, a drugiego przez 15, i dodawſzy z ſobą te drugie dwie mnogości miałbym 480*ſtów*. To na przód założywſzy, oznaczam ſobie wagę iednéy kuli pierwſzego gatunku przez x, a wagę drugiego gatunku przez y, i rozumuiąc w ſpoſób dopiero poprzédzaiący, wypadną mi te dwa zrównania, $6x + 10y = 304$, i $10x + 15y = 480$.

Teraz nietrzeba więcéy, tylko ſzukać wartościów głoſek x i y. Tym końcém z każdego zrównania wyciągam wartość głoſki x; pierwſze po przeſtawiéniu i rozdzieleniu, daie mi $x = \frac{304 - 10y}{6}$, z drugiégo wypada mi $x = \frac{480 - 15y}{10}$. Te ilości równaiące ſię głoſce x przyrównywam iednę do dru-

giéy, i mam to nowe zrównanie, $\frac{304 - 10y}{6} = \frac{480 - 15y}{10}$, z którego przez poprzédzaiące reguły wyciągam $y = 16$.

Żebym miał x, kładę w pierwſzém zrównaniu $x = \frac{304 - 10y}{6}$ zamiaſt y wartość iego 16, ſkąd mi wypada $x = \frac{144}{6} = 24$; więc iedna kula większego gatunku waży 24 *ſty*, a mnieyſzego gatunku 16 *ſtów*. Jakoż 6 kul 24*ſwych* czynią 144*ſtów*, do których dodawſzy 10 kul 16 *ſtwych*, albo 160 *ſtów*, ſumma uczyni 304 *ſty*. Podobnież 10 kul 24 *ſwych*, ważą 240 *ſtów*, a dodawſzy do nich 15 kul 16 *ſwych* ważących razém także 240 *ſtów*, ſumma uczyni 480 *ſtów*.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

Armata 24 ſwa *ſkładaiąca ſię z miedzi i cyny, waży* 5531 ſtów, *i zawiera w ſobie materyi* 8,95 *ſtóp ſześciénnych; wiedząc że ſtopa ſześciénna miedzi waży* 630 ſtów, *a ſtopa ſześciénna cyny* 512 ſtów, *ieſt pytanie wiele mieści ſię w tèy armacie miedzi, a wiele cyny?*

Gdybym wiedział liczbę ſtóp ſześciénnych każdego gatunku materyi wchodzących w tę armatę, dodawſzy te dwie liczby, powinnyby mi uczynić 8,95 *sss*. Potém powtórzywſzy 630 *ſtów* tyle razy, ile ſtóp ſześciénnych miedzi znayduie ſię, miałbym wagę miedzi wchodzącéy w tę mieſzaninę; podobnież rozmnożywſzy 512 przez liczbę ſtóp ſześciénnych cyny, miałbym wagę téy cyny; naoſtatek wypadłe dwie mnogości dodawſzy iedna do drugiéy, ſumma dačby mi powinna 5531*ſtów*.

Rozumuiąc iak wyżéy, i oznaczywſzy przez x liczbę ſtóp ſześciénnych miedzi, a przez y liczbę bę stóp sześciennych cyny, będzie $x + y = 8{,}95$ i $630x + 512y = 5531$.

Z tych obu zrównań wyciągnąwszy x, mam $x = 8{,}95 - y$, tudzież $x = \frac{5531 - 512y}{630}$ więc $8{,}95 - y = \frac{5531 - 512y}{630}$, skąd wnosi się $y = \frac{107{,}5}{118} = 0{,}911$.

Położywszy tę wartość zamiast y w zrównaniu $x = 8{,}95 - y$, wypadnie $x = 8{,}039$.

Gdyby dwie materye wchodzące w mieszaninę, miały ważności swoie przyrodne * odmienne od tych które im tu naznaczyliśmy, i gdyby obiętość iako też cała waga zadanéy mieszaniny trafiła się różna od téy, iaką tu obraliśmy sobie na przykład, sposób wynalezienia ilościów oboiego rodzaiu materyi niebyłby przeto odmienny. A tak ażeby w iedném zagadnieniu zamknąć wszelkie rozwiązania tego gatunku, daymy w powszechności, że liczba stóp sześciennych całéy mieszaniny iest wyrażona przez - - - - - a

Waga téyże całéy mieszaniny wyrażona w funtach przez - - - - - b

Wa-

* *To co nazywa się* ważnością przyrodną, (gravitas specifica) *iest waga iakiegokolwiek ciała wiadoméy obiętości. Kiedy się mówi* że to a to ciało waży 12 *ftów, tym sposobém niewyraża się tylko waga tego ciała, a nie ważność przyrodna téy materyi, z któréy składa się to ciało; lecz powiedziawszy* np. *że* 12 calów sześciennych wody pospolitéy ważą 7 uncyi *i* 7 ziarn, *w tém wyrażeniu iuż naznacza się ważność przyrodna wody tego gatunku, i daie się fundament, przy pomocy którego można wynaléśdź wagę iakiéykolwiek innéy obiętości téyże wody.*

Waga stopy sześciennéy piérwszéy materyi niech będzie - - - - - - c

Waga stopy sześciennéy drugiey materyi d.

c i d rozumieią się bydź wyrażone także w funtach.

Teraz oznaczywszy przez x, liczbę stóp sześciennych piérwszéy materyi, a przez y liczbę stóp sześciennych drugiéy materyi, wypadną dwa zrównania następuiące, $x + y = a$, i $cx + dy = b$.

To założywszy, z piérwszego zrównania wyciągam $x = a - y$, a z drugiego $x = \frac{b - dy}{c}$. Te dwie ilości równaiące się głosce x przyrównawszy iednę do drugiéy, mam $a - y = \frac{b - dy}{c}$, skąd wyciągam $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Zebym miał x, kładę zamiast y wartość iego $\frac{ac - b}{c - d}$ w zrównaniu $x = a - y$, i mam $x = a + \frac{b - ac}{c - d}$, co można zebrać (43) na $x = \frac{b - ad}{c - d}$.

Z tych dwóch zrównań iakoto $x = \frac{b - ad}{c - d}$, i $y = \frac{ac - b}{c - d}$, można sobie wnieść regułę ułożoną w prościéyszém wyrażeniu, służącą powszechnie do rozwiązania wszelkich zagadnień tego gatunku; w czém iednak należy uważyć 1ód Ze przez b oznacza się cała waga mieszaniny. 2re Ze ponieważ a wyraża liczbę części sześciennych zawartych w całéy mieszaninie, a d wagę przyrodną drugiéy materyi, więc ad wyraża wieleby ważyła

żyła obiętość całéy miészaniny, gdyby była złożona z saméy materyi drugiego gatunku. Naostatek że mianownik $c-d$ oznacza różnicę między ważnościami przyrodnémi materyi oboiego gatunku.

Uczyniwszy także temu podobny rozbiór wártości głoski y, pokaże się że ac oznacza wiele ważyłaby obiętość całéy miészaniny. złożonéy iedynie z gatunku piérwszéy materyi. A stąd dopiéro wnosi się reguła następuiąca.

Wyrachuy wieleby ważyła obiętość miészaniny, gdyby tylko była złożona z saméy drugiéy materyi, odéym tę wagę od prawdziwéy wagi całéy miészaniny, a resztę rozdziél przez różnicę między ważnościami przyrodnémi obu materyi, wieloraz pokaże ci liczbę części sześciénnych piérwszéy materyi w tę miészaninę wchodzących.

Przeciwnie, *żeby miéć liczbę części sześciénnych drugiéy materyi, wyrachuy coby ważyła obiętość całéy miészaniny, gdyby tylko z saméy piérwszéy materyi była złożona, tę wynalezioną wagę odéym od prawdziwéy wagi całéy miészaniny, a resztę rozdziél przez tęż samę ilość co wyżéy,*

Ta reguła, iest właśnie taż sama którą w Arytmetyce pospolicie nazywaią *Regułą Miészaniny* (Regula Alligationis).

Pod to zagadnienie można podciągnąć nieskończoną liczbę innych zagadnień, które z piérwszego wéyźrzenia zdawać się mogą nieiednakowego gatunku. *Np. gdyby potrzeba było odliczyć w Francuzkiéy monecie 522 liwrów, w czterdziestu dwóch sztukach dwoiakiego gatunku, to iest iedne sztuki żeby ważyły po 24 liw: a drugie po 6 liw.* Zastanowiwszy się cokolwiek nad tém, łatwo rozeznać można, że to zagadnienie nieróżni się od następuiącego: *Miészanina trzymaiąca w sobie 24 stóp sześciénnych, waży 522 fty, a z dwóch gatunków materyi w tę miészaninę wchodzących, iednéy stopa sześciénna waży 24 fty, a drugiéy 6 ftów.* A zatém postąpiwszy sobie podług reguły poprzédaiącéy, pokazałoby się że

że na 522 liwrów trzebaby 15 sztuk wártaiących po 24 liw: a 27 sztuk po 6 liw.

Taż sama reguła służyłaby ieszcze do rozwiązania następuiącego zagadnienia. *Stopa sześciénna wody morskiéy waży 74 fty, stopa sześciénna wody dészczowéy waży 70 ftów, wieleby trzeba każdego gatunku wody zmiészać, żeby zrobionéy z nich miészaniny stopa sześciénna ważyła 73 fty.*

A stąd iuż iawnie pokazuie się, iak rzecz iest użyteczna przyzwyczaiać się zawczasu, do oznaczania ilościów wiadomych w zagadnienie wchodzących w sposób powszechny, tudzież do wyrozumienia i tłómaczenia sobie wypadków Algebraicznych wynikaiących z rozwiązanych zagadnień.

ZAGADNIENIE TRZECIE.

Mam trzy sztaby metalu, z których w każdą wchodzi złoto, śrébro, i miédź; proporcya miészaniny w piérwszéy sztabie iest taka, że w 16 uncyach znayduie się 7 unc: złota, 8 śrzébra, a 1 uncya miedzi. W drugiéy sztabie 16 uncyi składaią się z 5 unc: złota, 7 śrzébra; a 4 unc: miedzi. W trzeciéy zaś sztabie, na 16 uncyi wchodzi 2 unc: złota, 9 śrzébra, a 5 miedzi. Teráz z różnych części wziętych z każdéy z tych trzech sztab, trzeba mi złożyć czwartą sztabę takiéy proporcyi między pomiénionémi trzema metalami, żeby na 16 unc: wchodziło 4 unc: i $\frac{15}{16}$ złota, 7 $\frac{10}{16}$ śrzébra, a 3 $\frac{7}{16}$ miedzi.

Oznaczmy sobie przez x ilość uncyi iaką trzebaby wziąść z piérwszéy sztaby, przez y ilość uncyi z drugiéy sztaby, a naostatek przez z ilość uncyi wziąść mianą z trzeciéy sztaby.

Ponieważ w 16 uncyach piérwszéy sztaby zawiéra się 7 uncyi złota, więc można wynaléśdź wiele złota bydź musi w x uncyach téyże sztaby, a to wyrachowawszy czwárty wyráz następuiacéy proporcyi, $16 : 7 : : x$; na takowy czwárty wyráz wypapadnie $\frac{7x}{16}$; przez temuż podobne rozumowanie wynaydzie ſię także, że w y uncyach drugiéy ſztaby, powinno znaydować ſię złota $\frac{5y}{16}$ uncyi, a w z uncyach trzeciéy ſztaby, $\frac{2z}{16}$ unc. Te trzy ilości razém złączone uczynią $\frac{7x+5y+2z}{16}$ unc: złota, które powinny równać ſię $4\frac{15}{16}$ unc. albo $\frac{79}{16}$; więc będzie $\frac{7x+5y+2z}{16}=\frac{79}{16}$.

Zeby zowu drugi warunek zoſtał dopełniony, uważam podobnież iż biorąc x uncyi metalu z piérwſzéy ſztaby, biorę naſtępnie $\frac{8x}{16}$ unc. ſrzébra, z drugiéy $\frac{7y}{16}$, a z trzeciéy $\frac{9z}{16}$; te trzy ilości razém złączone uczynią $\frac{8x+7y+9z}{16}$, a ponieważ chcę ażeby uczyniły $7\frac{10}{16}$ albo $\frac{122}{16}$, więc miéć będę $\frac{8x+7y+9z}{16}=\frac{122}{16}$.

Tymże ſamym ſpoſobém dopełniaiąc trzeciego warunku, wypadnie trzecie zrównanie, $\frac{x+4y+5z}{16}=\frac{55}{16}$.

A że we wſzyſtkich trzech dopiéro wynalezionych zrównaniach, liczba 16 ieſt obu części ſpólnym

nym

nym dziélnikiém, więc możémy ią wyrzucić, i miéć będziém zamiaſt piérwſzych naſtępuiące zrównania: $7x+5y+2z=79$, $8x+7y+9z=122$, $x+4y+5z=55$.

Z każdego z nich wyciągnąwſzy wártość głoſki x, mam $x=\frac{79-5y-2z}{7}$, $x=\frac{122-7y-2z}{8}$, $x=55-4y-5z$.

Zrównawſzy piérwſzą wártość głoſki x z drugą i trzecią wártością (71), miéć będę $\frac{79-5y-2z}{7}=\frac{122-7y-9z}{8}$, i $\frac{79-5y-2z}{7}=55-4y-5z$.

W tych zrównaniach iuż nieznayduią ſię tylko dwie niewiadome, a zatém z niémi obéyśdź ſię trzeba, iak ſię powiedziało wyżéy (66).

Poczynam tedy naprzód od wyrugówania dziélników, a dopiéro wyciągam z każdego zrównania wártość głoſki y, i mam $y=\frac{222-47z}{9}$, – – i $y=\frac{306-33z}{23}$.

Zrównawſzy znowu te dwie wártości głoſki y iednę z drugą, będzie $\frac{222-47z}{9}=\frac{306-33z}{23}$, a po odprawiéniu działań zwyczaynych znaydzie ſię $z=\frac{2352}{784}=3$.

Zeby miéć wártość głoſki y wyrażoną w ilościach wiadomych, kładę w którémkolwiek zrównaniu z wyżéy położonych, zamiaſt z wártość iego 3 dopiéro wynalezioną, *np.* w zrównaniu $y=\frac{222-47z}{9}$, co mi daie $y=\frac{81}{9}=9$.

Na-

Naoſtatek żeby miéć x, kładę w którémkolwiek zrównaniu należącém do x, zamiaſt y i z wártości ich 9, i 3, *np.* w tém zrównaniu, $x = 55 - 4y - 5z$; któ- re tym ſpoſobém odmiéni ſię w naſtępuiące, $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$. Skąd wnoſzę że po- nieważ mam $x = 4$. $y = 9$, $z = 3$. więc trzeba mi wziąść z piérwſzéy ſztaby 4 unc: metalu, z drugiéy 9, a z trzeciéy 3 unc. ażeby w miéſzaninie złożo- néy z tych trzech ſztabów, znaydówało ſię $4\frac{15}{16}$ unc. złota, $7\frac{10}{16}$ śrzébra, a $3\frac{7}{16}$ unc. miedzi.

Jakóż ponieważ w 16 uncyach piérwſzéy ſztaby zawiéra ſię 7 unc. złota, 8 śrzébra, a 1 miedzi, więc iawna ieſt, że ieżeli z téy ſztaby wezmę tylko 4 unc. w tych 4. uncyach znaydó- wać ſię będzie $\frac{28}{16}$ unc. złota, $\frac{32}{16}$ śrzebra, i $\frac{4}{16}$ miedzi.

Z téyże przyczyny wziąwſzy z drugiéy ſztaby 9 uncyi, zawiérać ſię w nich będzie $\frac{45}{16}$ unc. złota, $\frac{61}{16}$ śrzébra. i $\frac{36}{16}$ miedzi; nakoniéc w 3 uncyach wzię- tych z trzeciéy ſztaby, będzie $\frac{6}{16}$ unc. złota, $\frac{27}{16}$ śrzé- bra, i $\frac{15}{16}$ miedzi.

Te trzy ilości każdego rodzaiu metalu z ka- żdéy ſztaby wzięte i razém dodane, uczynią $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, i $\frac{55}{16}$, to ieſt że czwarta ſztaba ſkładać ſię bę- dzie z $4\frac{15}{16}$ unc. złota, $7\frac{10}{16}$ śrzébra, i z $3\frac{7}{16}$ uncyi miedzi.

O Przypadkach w których zagadniénia ſtaią ſię nieokréślonémi, lubo do rozwiązania ich znaydówać ſię będzie tyle zrównań co niewiadomych; tudzież o przypadkach w których zagadniénia bywaią do rozwiązania niepodobne.

75. Trafia ſię czaſém, że lubo znaydó- wać ſię będzie tyle zrównań co niewiadomych, iednakże zagadniénie z któ-

którègo ſkładaią ſię zrównania może bydź nieokrèślone, to ieſt podlegać może nie- okrèślonèy liczbie rozwiązań.

To zaś zdarza ſię w ten czas, kiedy niektóre warunki lubo na pozór między ſobą różne, iednakże co do iſtoty będą też ſame. W tym razie, zrównania zawiéra- iące w ſobie takowe warunki, będą albo *wielokrotne* drugich (multipla), albo w powſzechności, niektóre z nich ſkładać ſię będą z iednego lub wielu innych zró- wnań bądź to dodanych, bądź odiętych, bądź téż rozmnożonych albo rozdzielo- nych przez pewne liczby. *Np.* zaga- dniénie z któregoby wypadły te trzy zró- wnania,

$$8x + 3y + 2z = 17$$
$$8x + 2y + 4z = 20$$
$$18x + 8y + 8z = 54$$

podpadałoby nieokréślonéy liczbie roz- wiązań, lubo ſtąd cośmy widzieli wyżéy zdawałoby ſię, że każda z tych głoſek x, y, z, niémoże miéć więcéy tylko iednę wártość. Z tych trzech zrównań oſta- tnie ſkłada ſię z drugiego, dodanego do podwóyności piérwſzego. Jawna zaś ieſt, że przypuściwſzy dwa piérwſze, trze- cie wynika z nich koniecznie, a zatèm żadnego nowego warunku niewyraża,

prze-

przeto też rozwięzaiący zagadniénie znayduie ſię w takim przypadku, iak gdyby niémiał więcèy tylko dwa zrównania. Zobaczymy zaś wkrótce, że gdy do trzech niewiadomych niebędzie tylko dwoie zrównań, każda niewiadoma może mieć nieokréśloną liczbę wártościów.

76. Takie przypadki o których tu mowa, zawſze pokażą ſię z rachunku w ſpoſób naſtępuiący. Nietrzeba więcèy, tylko przyſtąpić do wyciągniénia wártościów głoſek niewiadomych podług reguł wyżéy podanych, natenczas ieżeli które zrównanie znaydować ſię będzie złożone z drugiego, to w dalſzym przeciągu rachunków wypadnie w zrównaniu *toſamość*, to ieſt że dwie części zrównania nietylko będą ſobie równe, ale też będą złożone z wyrazów iednakowych i równych; a ile znaydzie ſię zrównań taką toſamością zarażonych, tyle z nich poczytać trzeba za niezdatne do dalſzych działań.

Np. ieżeli z każdego z tych zrównań, $6x + 8y = 12$, i $x + \frac{4}{3}y = 2$, wyciągnę wártość głoſki x, mieć będę $x = \frac{12 - 8y}{6}$, i $x = 2 - \frac{4}{3}y$. Te dwie ilości równaiące ſię głoſce x przyrównawſzy iednę do drugiéy, mieć będę $\frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, albo wyrugó-

rugówawſzy mianowników, $36 - 24y = 36 - 24y$; zrównanie maiące w obu częściach toſamość, które niémoże mi wſkazać wártości głoſki y; bo po przeſtawiéniu i zebraniu wypadłoby $0 = 0$.

Podobnież maiąc trzy zrównania naſtępuiące

$$5x + 3y + 2z = 24$$
$$\tfrac{25}{2}x + \tfrac{15}{2}y + 5z = 60$$
$$15x + 9y + 6z = 72$$

Z piérwſzego wyciągam $x = \frac{24 - 3y - 2z}{5}$, drugie, po wyrugówaniu mianowników, po przeſtawiéniu i po zebraniu, daie mi $x = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$, a z trzeciego wypada $x = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$. Zrównawſzy piérwſzą wártość głoſki x, z drugą i z trzecią wártością, mieć będę naſtępuiące zrównania, $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$, i $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$, albo po wyrugówaniu mianowników, $600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, i $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$, zrownania w obu częściach zawiéraiące toſamość, z których ani wártości y ani wártości z wyciągnąć niémożna; bo w każdém z nich wypada $0 = 0$. W niniéyſzym tedy przypadku, właściwie mówiąc niéma tylko iedno zrównanie.

Zagadniénia prowadzące do tym podobnych wypadków, ſą wprawdzie nieokréślone, ale nieſą niepodobne. Zobaczymy w krótce iak z niémi obéyśdź ſię trzeba.

77. Kiedy zagadniénie, które nieprowadzi wyżéy tylko do zrównań piérwszego stopnia, iest do rozwiązania niepodobne, natenczas to niepodobiéństwo daie się stąd poznać, że dokończony rachunek daie wypadek niepodobny, *np.* $4=3$.

I tak daymy że mamy te dwa zrównania, $5x+3y=30$, i $20x+12y=135$. Z piérwszego wyciągam $x=\frac{30-3y}{5}$, a z drugiego $x=\frac{135-12y}{20}$. Zrównawszy te dwie wartości głoski x, iedna z drugą, mieć będę $\frac{30-3y}{5}=\frac{135-12y}{20}$, a wyrugówawszy mianowników, będzie $600-60y=675-60y$, skąd wnosi się ten niepodobny wypadek, $600=675$; więc i zagadniénie z którego wynikaią takie dwa zrównania iest do rozwiązania niepodobne.

78. Rozwiązania wyrażone w ilościach przéczących, oznaczaią także iakieś niepodobiéństwo w zagadniéniu; atoli takie niepodobiéństwo nieiest bezwzględne, ale tylko stosuie się do rozumiénia w iakiém ilości były wzięte w rachunku; bo pomiénione ilości wzięte w pewném rozumiéniu, mogą dać rozwiązania naturalnie wypadaiące i zagadniéniu zadość czyniące. *Zobacz co iuż powiedziało się o tém wyżéy* (62).

O Zagadnieniach nieokréślonych.

79. Każde zagadniénie które może bydź rozwiązane wielorakiém sposobami, iednakże tak, że między tèmi wszystkiémi sposobami niémożna bydź pewnym tego sposobu, który właśnie daie materyą do zagadniénia, nazywa się zagadniénie nieokréślone. W takich zagadniéniach, zawsze znayduie się mniéyiza liczba warunków iak niewiadomych; a mówiąc w powszechności, zagadniénia nieokréślone, mogą miéć nieskończoną liczbę rozwiązań; iednakże trafia się częstokroć że liczba ich bywa określona, z przyczyny pewnych warunków, które niémogąc bydź wyrażone w zrównaniach, niedopuszczaią ażeby sposobém prosto do tego zmiérzaiącym, dała się naznaczyć liczba rozwiązań, iaką miéć może zagadniénie.

Np. gdyby zadano było: *Wynaléźdź dwie liczby takie, które dodane z sobą uczyniłyby 24.* Jednę z tych liczb oznaczywszy przez x, a drugą przez y, miéć będę $x+y=24$, skąd wyciągam $x=24-y$. To zagadniénie może miéć nieskończoną liczbę rozwiązań, ieżeli przez x i przez y, bez wyłączenia rozumiéć się będą liczby czyto całe czy łamane, twiérdzące al-

albo przeczące. Żeby rozwiązać zagadnienie, doſyć ieſt położyć zamiaſt y liczbę taką iaka ſię ſpodoba, a potém z niéy wnieść ſobie wártość głoſki x przy pomocy zrównania $x = 24 - y$, tak iż rozumieiąc koléyno $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$, i.t.d. miéć będę $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$ i.t.d. Lecz chcąc ażeby w rozwiązaniu wypadały tylko ſame liczby całe i twiérdzące, natenczas liczba rozwiązań iuż będzie określona; albowiém ażeby głoſka x wyrażała ilość twiérdzącą, trzeba ażeby y niebyło więkſze nad 24. A że ieſzcze te ilości maią bydź oráz liczbami całémi, więc iawna ieſt, że wzwyż położone zrównanie niémoże miéć ze wſzyſtkiém więcéy iak 25 rozwiązań, iużto rachuiąc i z zerèm: tak że biorąc koléyno $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, i.t.d. będzie $x = 23$, $x = 22$, $x = 21$, i.t.d.

80. Atoli kiedy będzie założony ten warunek, ażeby liczby wypadaiące z rozwiązania były liczbami całèmi i twiérdzącèmi, niezawſze tak łatwo daie ſię poſtrzédz iak w poprzédzaiącym przykładzie, iakimby ſpoſobèm temu warunkowi zadość uczynić: naſtępuiące zagadnienia pokażą nam do tego drogę.

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Niech będzie zadano iak wielą ſpoſobami można wypłacić 542 złł. daiąc ſztuki wartaiące po 17 złł, a w zamian odbiéraiąc ſztuki wartaiące po 11 złł?

Oznaczmy ſobie liczbę 17 złotówek przez x, a liczbę 11 złotówek przez y; płacąc x ſztuk każda od 17 złł, płacę x razy 17 złł. albo $17x$, a odbiéraiąc w zamian y ſztuk od 11 złł. odbiéram $11y$: a że mam wypłacić 542 złł, więc miéć będę $17x - 11y = 542$. Wyciągam z tego zrównania wártość głoſki y, to ieſt niewiadoméy maiącéy mniéyſzego ſpółczynnika, i mam $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Ponieważ niémam tylko iedno zrównanie a dwie niewiadome, przeto rzecz oczywiſta, że zamiaſt x położywſzy taką liczbę iaka mi ſię ſpodoba, będę mógł wnieść ſobie z niéy wártość głoſki y, która pewnie uczynić muſi zadość zrównaniu; lecz że oráz zagadnienie wyciąga ażeby te wártości były liczbami całémi, więc poſtępuię ſobie w naſtępuiący ſpoſób.

Wártość $y = \frac{17x - 542}{11}$ po odprawionèm dzieleniu ile można, przemiénia ſię na $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; trzeba więc ażeby $\frac{6x - 3}{11}$ było liczbą całą; niechay takowa liczba cała będzie oznaczona przez u, w tym razie miéć będę $\frac{6x - 3}{11} = u$, a zatém $6x - 3 = 11u$, ſkąd wnoſi ſię $x = \frac{11u + 3}{6}$, a po odprawionèm dzieleniu $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; trzeba tedy ieſzcze ażeby $\frac{5u + 3}{6}$ było liczbą całą, oznaczmy przez t tę liczbę całą, i mieć będziém $\frac{5u+3}{6}=t$, a zatém $5u+3=6t$, ſkąd wnoſi ſię $u=\frac{6t-3}{5}=t+\frac{t-3}{5}$; trzeba tedy znowu ażeby $\frac{t-3}{5}$ było liczbą całą. daymy że s ieſt takową liczbą całą, co nam da $\frac{t-3}{5}=s$, a zatém będzie $t=5s+3$, i działanie kończy ſię na tém. Albowiém iawna ieſt, że obrawſzy ſobie na wártość głoſki s taką liczbę całą iaka ſię ſpodoba, na wártość głoſki t zawſze wypadnie liczba cała, to ieſt taka iakiéy wyciąga zagadnienie, bo iuż niéma mianownika.

Powróćmy teráz do wártości głoſek x i y; znalazłém wyżéy $u=\frac{6t-3}{5}$, więc położywſzy w tém zrównaniu zamiaſt t wártość iego $5s+3$, mieć będę $u=\frac{30s+18-3}{5}=6s+3$; a że znowu miałém $x=\frac{11u+3}{6}$, więc w tém zrównaniu położywſzy zamiaſt u wártość iego dopiéro wynalezioną, mieć będę, $x=\frac{66s+33+3}{6}=11s+6$; naoſtatek ponieważ było $y=\frac{17x-542}{11}$ więc i w tém zrównaniu położywſzy zamiaſt x wártość iego, będzie $y=\frac{187s+102-542}{11}=17s-40$. A zatém na wártości odpowiadaiące głoſkóm x i y, mam $x=11s+6$, $y=17s-40$. Co ſię tycze piérwſzego zrównania, w niém zamiaſt s można po-

ło-

łożyć taką liczbę iaka ſię ſpodoba, ale w zrównaniu wyrażaiącém wártość głoſki y, zamiaſt s nieda ſię wziąć mnieyſza liczba iak 3: bo ponieważ y ma bydź liczbą twierdzącą, więc trzeba ażeby $17s$ czyniły więcéy iak 40, albo żeby s wártało więcéy iak $\frac{40}{17}$, to ieſt więcéy iak 2.

Można tedy rozwiązać to zagadnienie niezliczenie różnemi ſpoſobami, kładąc w wynalezionych wártościach głoſek x i y, zamiaſt s koléyno wſzyſtkie liczby twierdzące co ich bydź może począwſzy od 3 aż nieſkończenie; i tak rozumieiąc porządkiém $s=3$, $s=4$ $s=5$, $s=6$, $s=7$, i. t. d. znaleźlibyśmy wártości odpowiadaiące głoſkóm x i y, iak naſtępuią.

$x=39$	$y=11$
$=50$	$=28$
$=61$	$=45$
$=72$	$=62$
$=83$, i. t. d.	$=79$, i. t. d.

Z których każda ieſt taka, że płacąc 17 złotówek liczbę razy oznaczoną przez x, a odbiéraiąc w zamian 11 złotówek liczbę razy oznaczoną przez y, 542 zł. zoſtałyby wypłacone.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

Niech będzie potrzeba zrobić 741 złotych, w 14 ſztukach troiakiego gatunku, tak żeby ſztuki piérwſzego gatunku wárte były po 24 złt. drugiego po 19, a trzeciego po 10 złt?

Oznaczywſzy przez x, y, z, ilość ſztuk potrzebnych każdego z tych trzech gatunków; ponieważ ma bydź ze wſzyſtkiém 41 ſztuk, więc będzie 1ód $x+y+z=41$.

2re Każda ſztuka piérwſzego gatunku wárta będąc 24 zł, x ſztuk muſzą bydź wárte x razy 24 zł, albo $24x$; z téyże przyczyny y ſztuk drugiego gatunku będą wárte $19y$, a z ſztuk trzeciego gatunku uczynią $10z$; te trzy ilości razém złączone wynoſzą $24x+19y+10z$, a że podług treści zagadnienia ſkładać powinny 741 zł, więc będzie $24x+19y+10z=741$.

 Z ka-

Z każdego z tych zrównań wyciągnąwſzy wártości iednéyże niewiadoméy bądź któréykolwiek np. x, mieć będę $x = 41 - y - z$, $x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; a zrównawſzy te dwie ilości wyrażaiące wártość głoſki x iedna z drugą, mam $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$, albo wyrugówawſzy mianownika $984 - 24 - 24z = 741 - 19y - 10z$, po przeſtawiéniu i po zebraniu $243 = 5y + 14z$.

Teráz wyciągam wártość głoſki y, która ma mniéyſzego ſpółczynnika, i mam $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$. A że ilości y i z powinny bydź liczbami całémi, więc trzeba ażeby ilość $\frac{3 - 4z}{5}$ była także liczbą całą; niechay ta liczba cała będzie oznaczona przez t, naténczas będzie $\frac{3 - 4z}{5} = t$, ſkąd wyciągam $z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4}$; trzeba tedy ieſzcze ażeby $\frac{3 - t}{4}$ było liczbą całą; oznaczam ſobie takową liczbę całą przez u, i mam $\frac{3 - t}{4} = u$, albo $3 - t = 4u$, a zatém $t = 3 - 4u$.

To maiąc powróćmy nazád do wártościów głoſek y, z, i x.

Ponieważ znalazłem wyżéy $z = \frac{3 - 5t}{4}$, więc położywſzy w tém zrównaniu, zamiaſt t wártość onego, mieć będę $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; tudzież ponieważ znalazłem wyżéy $y = \frac{243 - 14z}{5}$, więc położywſzy znowu w tém zrównaniu, zamiaſt z wártość onego, mieć będę $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Naoſtatek ponieważ miałem $x = 41 - y - z$, więc teráz mieć będę $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$: tak że wártości odpowiadaiące głoſkóm x, y, z, będą naſtępuiące, $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$, $z = 5u - 3$: w których zamiaſt u można położyć iakąkolwiek liczbę całą, byleby taką, ażeby wártości głoſek x, y, z wypadły w liczbach twiérdzących. W tym zaś warunku zawiéraią ſię ieſzcze trzy inne naſtępuiące, iakoto 1ód Ażeby $9u$ było wárto więcéy iak 13, to ieſt żeby ilość wzięta zamiaſt u była większa iak $\frac{13}{9}$ albo $1\frac{4}{9}$. 2re Ażeby 57 było ilością większą iak $14u$, to ieſt ażeby zamiaſt u obrana była ilość mniéyſza iak $\frac{57}{14}$, albo $4\frac{1}{14}$ 3cie Ażeby $5u$ było wárto więcéy iak 3, a zatém ilość położona zamiaſt u, żeby była większa iak $\frac{3}{5}$, co chybić niémoże ieżeli uczyni ſię zadość piérwſzemu warunkowi; a tak w ninieyſzym przypadku liczba rozwiązań ſtaie ſię bardzo określona, i kończy ſię na trzech ſpoſobach, to ieſt naznaczywſzy głoſce u za wártości tylko te trzy liczby, 2, 3, albo 4, które ſzczególnie z warunkami zagadnienia pogodzić ſię mogą. Niémożna tedy zrobić 741 złł. w 41 ſztukach troiakiego wyżéy opiſanego gatunku, tylko biorąc liczby niżéy wyrażone, które wypadaią, położywſzy w każdéy wártości głoſek x, y, z, zamiaſt u naſtępnie iedna po drugiéy liczby 2, 3, i 4.

x	y	z
5	29	7
14	15	12
23	1	17.

O Zrównaniach drugiego ſtopnia z iedną niewiadomą.

81. Nazywaią ſię *Zrównania drugiego ſtopnia*, w których naywyżſzy ſtopień niewiadoméy, ieſt też ſama niewiadoma rozmnożona ſama przez ſię, czyli podnieſiona do kwadratu.

Tak zrównanie $5x^2 = 125$, ieſt zrównanie drugiego ſtopnia; bo w wyrazie $5x^2$, ilość x znayduie ſię rozmnożona ſama przez ſię.

82. Kiedy zrównanie niezawiéra w ſobie innego ſtopnia ilości niewiadoméy, tylko kwadrat, w rozwiązaniu iego niebędzie żadnéy trudności: doſyć ieſt w takim razie oſwobodzić kwadrat téy niewiadoméy, z wſzelkiéy ilości któraby go mnożyła albo dzieliła, tudzież z ilościów połączonych z nim przez znaki + albo −, co ſię wykonywa podług reguł danych (53 i daléy); po czém niezoſtanie więcéy do działania, tylko z każdéy części zrównania wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy.

Np. w zrównaniu $5x^2 = 125$, miéć będę $x^2 = \frac{125}{5} = 25$, a wyciągnowſzy piérwiaſtek kwadratowy z każdéy części, będzie $x = 5$.

Podobnież gdybym miał zrównanie $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$; znioſſzy ułamki i przeſtawiwſzy, wypada mi $25x^2 - 12x^2 = 105$, albo $13x^2 = 105$, albo $x^2 = \frac{105}{13}$, a zatém $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

Znak

Znak $\surd$, oznacza że ma bydź wyciągniony piérwiaſtek kwadratowy. Kiedy trzeba oznaczyć wyciągniénie piérwiaſtka kwadratowego z ułamka, iak w teraznieyſzym przypadku, to ramiona tego znaku (który nazywa ſię *znakiém piérwiaſtkowym*) (ſignum radicale), ſpuſzczaią ſię poniżéy liniiki, oddziélaiącéy wyrazy ułamka ieden od drugiego. Lecz ieżeliby przyſzło wyrazić, że piérwiaſtek kwadratowy ma bydź wyciągniony tylko z iednego wyrazu ułamka, natenczas cały znak piérwiaſtkowy kładzie ſię nad albo pod liniiką; tak chcąc wyrazić że piérwiaſtek kwadratowy z 40, ma bydź rozdzielony przez 3, piſzę $\frac{\sqrt{40}}{3}$. Gdyby ilość, z którey piérwiaſtek kwadratowy ma bydź wyciągniony była wieloſłowna, natenczas od znaku piérwiaſtkowego trzebaby pociągnąć liniią, nakrywaiącą tę całą ilość; *np.* chcąc naznaczyć że z ilości $3ab + b^2$ ma bydź wyciągniony piérwiaſtek kwadratowy, piſzę $\sqrt{3ab + b^2}$. Czaſém także niedaie ſię liniiki, ale tylko ilość wieloſłowna zamyka ſię między dwóma nawiaſami, położywſzy na początku znak $\surd$, iakoto $\surd(3ab + b^2)$.

82.

83. Widzieliſmy indziéy (24) kiedy tak mnozny iak mnożnik to ie oba maią znaki iednakowe, mnogości ie ſię zawſze znak $+$; ſkąd naſtępuie, maiąc wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy z ilości poprzédzonéy znakiém $+$, piérwiaſtkowi można zarówno dać znak $+$ albo $-$.

Tak w zrównaniu poprzédzaiącém $x^2 = 25$ można zarówno powiedzieć, że piérwiaſtek 25 ieſt $+5$. albo -5; albowiém każda z tych dwóch liczb, rozmnożona ſama przez ſię oddaie zawsze na zad $+25$, przeto też rozwiązanie zrównania $x^2 = 25$. piſze ſię tak $x = \pm 5$. wymawia ſię *x równe więcey lub mniéy* 5. i tyle waży iak dwa zrównania następuiące $x = +5$. i $x = -5$ *

Podobnież drugie wyżéy położone zrównanie ma ſię piſać. $x = \pm \sqrt{\frac{105}{13}}$.

* *Mógłby tu kto zapytać ſię, czemu piérwſzéy części zrównania niedaiémy także tego dwoiakiego znaku $\pm$. Na to ſię odpowiada, iżby go można dać i piérwſzéy części; ale ſtąd nicby niewyniknęło nowego. Jakoż napiſawſzy $\pm x = \pm 5$. z tego wyrażenia wypadną te cztéry zrównania, $+x = 5$. $+5 = -5$. $-x = +5$. $-x = -5$. Z których oſtatnie wychodzi na piérwſze, przemièniwſzy tylko w niém znaki. Toż ſamo powiedzieć można o trzeciém względem drugiego.*

Trzeba dać baczenie ażeby wartości głoſki x położonéy w piérwſzém zrównaniu x = 5, niepoczytać za tęż ſamę ilość iaka ieſt w drugiém x = −5 lubo obie przez tęż ſamę cyfrę. czyli tęż ſamę głoſkę x ſą oznaczone. Głoſka x ſłuży za znak przez który oznacza ſię ilość ſzukana; i może wyrażać różne ilości, tak iak np. ſłowo Taler, podług różności krajów znaczy różne wartości.

84. Kiedy piérwiaſtek kwadratowy ma bydź wyciągniony z ilości poprzédzoney znakiém $-$, natenczas téy całéy ilości daie ſię znak piérwiaſtkowy, a przed znakiém kładzie ſię także dwoiaki znak $\pm$

I tak maiąc $x^2 = -4$. piſze ſię $x = \pm \sqrt{(-4)}$; i lubo z 4 dałby ſię wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy 2. iednakże nienależy piſać $x = \pm 2$; w takim razie ieſt rzeczą iſtotną żeby pamiętać na znak $-$, którym ieſt poprzédzona ilość pod znakiém piérwiaſtkowym położona.

85. kiedy zrównanié iakie prowadzi tym ſpoſobém do wyciągniénia piérwiaſtka kwadratowego z ilości przéczącéy, natenczas można ſobie ſtąd wnieść że zagadniénie, z którégo takie zrównanie wynika, ieſt niepodobne do rozwiązania. W rzeczy ſamèy ilość przécząca niémoże miéć piérwiaſtka kwadratowego ani doſkonałego, ani nawet przybliżonego; bo niéma żadnéy ilości tekiéy ani twiérdzącèy ani przéczącèy, która będąc rozmnożona ſama przez ſię mogłaby dać na mnogość ilość przéczącą: pawda że *np.* -4. mogą bydź uważane, iakby pochodziły z rozmnożenia $+2$ przez -2; ale te dwie ilości poprzédzone różnémi znakami nieſą ſobie równe, a zatèm mnogość z nich powſtaiąca niémoże bydź kwadratèm. A tak, kiedy ieſt zadano żeby wyciągnąć pié-

piérwiaſtek kwadratowy z ilości przéczącéy, ieſt zadana rzecz niepodobna; więc też każde zagadniénie prowadzące do takiego działania, ieſt zagadniénie do rozwiązania niepodobne. I toć to ieſt po czém poznaie ſię niepodobiéńſtwo zagadniéń drugiego ſtopnia.

Z tèm wſzyſtkiém nienależy dla tego poczytać za rzecz nieużyteczną wiadomości o piérwiaſtkach kwadratowych ilościów przèczących; albowiém zdarza ſię dosyć często, że zagadniénie które nieieſt niepodobne, nieda ſię inaczèy rozwiązać, tylko przy pomocy takich ilościów, gdy z nich uſtępuie naoſtatek to co było niepodobnego. Ilości tego gatunku nazywaią ſię, *ilościami zmyślonémi* (quantitas imaginaria).

I tak $\sqrt{(-a)}$, ieſt ilość zmyślona; $a + \sqrt{(-b)}$, ieſt także ilość zmyślona.

86. Na tém co dotąd powiedziało ſię dosyć będzie do rozwiązania zrównań drugiego ſtopnia, kiedy w zrównaniu ilość x niebędzie miała inſzego ſtopnia tylko ſam kwadrat. Lecz przytrafić ſię może, (iak w rzeczy ſamèy trafia ſię bardzo często), że piérwſzy ſtopiéń niewiadomèy znaydówać ſię będzie rozmnożony albo rozdzielony przez iaką ilość niewiadomą, *np.* iak

iak w tèm zrównaniu $x^2 - 4x = 12$. Natenczas cała ſztuka w rozwiązaniu zrównania na tém zależy, żeby z piérwſzéy części zrobić kwadrat doſkonały. Do wykonania zaś tego, trzeba trzech rzeczy: 1ód Ażeby wſzyſtkie wyrazy zawiéraiące w ſobie x przeſtawić do iednéy części, a wſzyſtkie ilości wiadome do drugiéy części, co odbywa ſię podług przepiſu wyżéy danego (53). 2re Ażeby wyráz zawiéraiący w ſobie x^2 był ilością twiérdzącą; zatèm ieżeliby ten wyráz znaydówał ſię poprzèdzony znakiém —, to w zrównaniu trzebaby wſzyſtkie znaki przemiénić, co nieznoſi równości. 3cie Ażeby wyráz zawiéraiący w ſobie x^2, był od wſzekiego mnożnika iako też i od wſzelkiego dziélnika oſwobodzony; zawſze zaś można go do tego ſtanu przyprowadzić, rozmnożywſzy wſzyſtkie inne wyrazy zrównania przez takowego dziélnika, albo rozdzieliwſzy przez mnożnika.

Np. gdybym miał zadane do rozwiązania to zrównanie, $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$. 1ód Przeſtawiam wſzyſtkie x do piérwſzéy części, położywſzy na ſamym początku wyráz x^2, ſkąd wypada mi, $-\frac{3}{5}x^2 + 4x + 2x = 4$, albo $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$. 2re Żeby zrobić x^2 ilością twiérdzącą, przemiéniam w zrównaniu wſzyſtkie znaki, co mi da $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$. 3cie Mnożę przez 5 całe zrównanie, i mam, $3x^2 - 30 = -20$; naoſtatek dzielę przez 3, wypada mi $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Po-

Ponieważ każde zrównanie drugiego ſtopnia, zawſze może bydź do tego ſtanu przyprowadzone, więc to wſzyſtko co teráz naſtępówać ma, rozumiéć ſię powinno o zrównaniu iuż przygotówaném w taki ſpoſób.

87. To założywſzy, żeby rozwiązać zrównanie drugiego ſtopnia, trzeba zachować regułę naſtępuiącą:

Weźmiy połowę ilości wiadoméy, która mnoży głoskę x w drugim wyrazie, tę połowę podniéś do kwadratu, i doday go do każdéy części zròwnania, coć w równości nic nieodmiéni. Tym ſpoſobém piérwſza część zrobi ſię doskonałym kwadratém. Wyciągniy z każdéy części piérwiaſtek kwadratowy, połóż przed drugą częścią dwòiaki znak $\pm$*; po tych działaniach zrównanie przemiéni ſię w zrównanie piérwſzego ſtopnia.*

Co ſię zaś tyczé wyciągniénia piérwiaſtka kwadratowego z piérwſzéy części; trzeba wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy z kwadratu niewiadoméy, iako też piérwiaſtek kwadratowy z ilości doданéy; potém ten drugi wypadek trzeba przyłączyć do piérwſzego z takim znakiém iaki miał drugi wyráz zrównania.

Np. maiąc to zrównanie, $x^2 + 6x = 16$; biorę połowę ilości wiadoméy 6, która mnoży x w drugim wyrazie, podnoſzę tę połowę do kwadratu, i kwadrat 9 dodawſzy do każdéy części, mam $x^2 + 6x + 9 = 16 + 9 = 25$; teráz niezoſtaie mi tylko wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy, co wykonywam biorąc piérwiaſtek kwadratowy głoſki x^2, którym ieſt x, iako téż piérwiaſtek kwadratowy liczby 9, którym ſą 3; a ponieważ w zrównaniu wyżéy położoném drugi wyráz $6x$, znayduie ſię bydź poprzédzony znakiém $+$, więc wnoſzę ſtąd, że piérwiaſtkiém kwadratowym piérwſzéy części ieſt ilość $x + 3$; drugiéy zaś części piérwiaſtek kwadratowy będzie 5, albó raczéy (83) ± 5; a zatém będzie $x + 3 = \pm 5$. Zeby miéć ſamo x, nietrzeba tylko przeſtawić 3 do drugiéy części, co mi da $x = \pm 5 - 3$; ſkąd widzę że x ma dwie wártości, z których iedna daie $x = + 5 - 3 = 2$, a druga, $x = - 5 - 3 = - 8$. Zobaczymy niżéy co znaczy ta druga wártość.

Zeby poiąć przyczynę téy reguły, należy ſobie przypomniéć co iuż było wyżéy (25), to ieſt że kwadrat ilości złożonéy z dwóch wyrazów, zawiéra w ſobie kwadrat piérwſzego wyrazu, podwóyność piérwſzego rozmnożonego przez drugi, i kwadrat drugiego wyrazu.

To założywſzy, kiedy trzeba dodać do ilości iakiéy *np.* iak do téy $x^2 + 6x$, to co iéy brak do kwadratu doſkonałego, uważyć należy 1ód Ze ta ilość iuż zawiéra w ſobie kwadrat x^2, który poczytać można za kwadrat piérwſzego wyrazu ilości dwuſłownéy. 2re Ze naſtępuiący drugi wyraz $6x$, zawſze da ſię uważać, iakoby był podwóynością głoſki x rozmnożoną przez inną ilość. 3^{cie} Że ta inna ilość, muſi bydź koniecznie połową mnożnika 6, mnożącego x. Żeby tedy zadana ilość była doſkonałym kwadratèm, niebrakuie iéy więcéy, tylko kwadratu zrobionego z połowy tego mnożnika, który mnoży x w drugim wyrazie. Jawna zaś ieſt, że to rozumowanie ieſt powſzechne, pomiéniony mnożnik głoſki x niech będzie iaki chce.

Co ſię tyczé reguły podanéy do wyciągniénia oraz z piérwſzéy części kwadratowego piérwiaſtka, ta podobniéż wynika z układu ſamego kwadratu; albowiém dwa kwadraty ſkrayne znayduiące ſię w kwadracie ilości dwuſłownéy, będąc kwadratami dwóch wyrazów piérwiaſtka, iawna ieſt, że nietrzeba tylko z każdego z oſobna z tych dwóch wyrazów wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy, żeby miéć te dwa wyrazy. Ale drugiému wyrazowi piérwiaſtka trzeba dać tenże ſam znak iaki miał drugi wyraz zrównania; bo iako rachunek pokazuie, że kwadratèm ilości $a+b$ ieſt $a^2+2ab+b^2$, tak niemniéy tenże rachunek przekonywa, że kwadratèm ilości $a-b$ ieſt $a^2-2ab+b^2$.

Przyſtóſowanie Reguły poprzédzaiącéy do rozwiązania niektórych zagadnién dru-

drugiego ſtopnia.

88. Niechay ma bydź zrównanie iakiego chce ſtopnia, żeby dane zagadniénie ułożyć w zrównaniu, zawſze trzeba użyć reguły wyżéy podanèy (60).

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Znaléśdź liczbę taką, ażeby do iéy kwadratu dodawſzy 8 razy tęż ſamę liczbę, ſumma uczyniła 33?

Gdybym miał wiadomą tę liczbę, którą tu nazywám x; rzecz oczywiſta, że wziąłbym iéy kwadrat to ieſt x^2, do tego kwadratu dodałbym 8 razy tęż liczbę to ieſt $8x$, a ſumma x^2+8x, uczyniłby mi powinna 33; więc muſi bydź $x^2+8x=33$.

Maiąc rozwiązać to zrównanie, dodaię do każdéy części liczbę 16. która ieſt kwadratém połowy liczby 8 mnożącéy x w drugim wyrazie, i mam $x^2+8x+16=33+16=49$. Zrównanie, w którém piérwſza część iuż ieſt doſkonałym kwadratém. Wyciągam z każdéy części piérwiaſtek kwadratowy, zachowuiąc regułę przepiſaną (87), co mi daie $x+4=\pm 7$, a zatém $x=\pm 7-4$; ſkąd na x wypadaią mi te dwie wártości, $x=+7-4=3$ i $x=-7-4=-11$.

Z tych wártościów piérwſza, rozwiązuie zagadniénie; bo 9 które ieſt kwadratém 3ech, będąc dodane do 8 razy 3. to ieſt do 24, czyni 33.

Co ſię tyczé drugiéy wártości. ta ponieważ ieſt przécząca, więc znaczy że ieſt drugie zagadniénie, w którém biorąc x w rózumiéniu wcale przeciwném, na rozwiązanie tego drugiego zagadniénia wypadłoby 11; to ieſt że druga wártość rozwiązałaby naſtępuiące zagadniénie: *Znaléśdź liczbę taką, od któréy kwadratu odiąwſzy 8 razy tęż liczbę, reſzta wynoſiłaby 33?* iak ieſt w ſaméy rzeczy; bo kwadratém 11ſtu ſą 121, a 8 razy 11 uczynią 88, które odiąwſzy od 121, zoſtaie 33.

 Dla

Dla pótwierdzenia tego co ſię iuż wyżéy powiedziało (62) o ilościach przéczących, uważmy, że ułożywſzy zrównanie z tego drugiego zagadnienia, byłoby $x^2 - 8x = 33$; ſkąd podług zwyczaynych reguł wyciągnąwſzy wártość głoſki x, miałbym $x = \pm 7 + 4$, co mi daie te dwie wártości $x = 11$ i $x = -3$, to ieſt wártości w brew przeciwne wypadkóm rozwięzuiącym piérwſze zagadnienie.

89. A ſtąd pokazuie ſię, że każde zrównanie drugiego ſtopnia z iedną niewiadomą, zawſze ma dwa rozwiązania.

Albowiém wártości 11 i -3 położone w zrównaniu $x^2 - 8x = 33$ zamiaſt x, zarówno obie rozwięzuią to zrównanie, to ieſt że tak z piérwſzéy iak z drugiéy wártości wypada na piérwſzą część 33. Widzieliśmy to iuż względém 11. Co zaś należy do -3; kwadratém téy liczby ieſt $+9$; a 8 razy -3 uczynią -24, które odięte od $+9$ dadzą $+9+24$, podług tego co w téy miérze przepiſało ſię wyżéy (11).

Lecz tu oráz pokazuie ſię, że lubo każde zrównanie drugiego ſtópnia ma dwoiakie rozwiązanie, niezawſze atoli zagadnienie do tego zrównania prowadzące, da ſię rozwiązać obóma ſpoſobami.

I tak w terazniéyſzym przypadku, wártość -3 nierozwięzuie zadanego zagadnienia, ale iemu przeciwne. Wreſzcie częſtokroć trafiać ſię zwykło, że obie wártości rozwiązanego zrównania, rozwięzuią oráz i zagadnienie. Zobaczymy to w trzeciém zagadnieniu.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

175 Złt. miały bydź rozdzielone między pewną liczbę oſòb, ale z nich dwie będąc nieprzytomne niepowinny należyć do podziału. Ta okoliczność pomna-

ża

ża część każdego przytomnego o 10 złt; ieſt pytanie wiele więc było wſzyſtkich oſób i z nieprzytomnémi, co do tego podziału należyć miały?

Gdybym wiedział ich liczbę, rozdzieliłbym przez nię 175 złł: ſkądbym doſzedł wieleby doſtał każdy gdyby wſzyſcy byli przytomni. Potém rozdzieliłbym przez tęż ſamę liczbę oſób, zmniéyſzoną o dwa, i miałbym wiele prawdziwie doſtało ſię każdemu dla nieprzytomności dwóch oſób; naoſtatek od tego drugiego wielorazu odiąwſzy 10, uważałbym, ieżeli reſzta równa ſię piérwſzemu wielorazowi. Odprawmy porządkiém te działania, oznaczywſzy ſobie przez x liczbę ſzukaną.

Gdyby więc wſzyſcy byli przytomni, każdy doſtałby $\frac{175}{x}$, ale że brakuie dwóch oſób, dla tego przypadnie na każdego przytomnego $\frac{175}{x-2}$; a ponieważ ta oſtatnia liczba ma przewyżſzać piérwſzą liczbę o 10, więc muſi bydź $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Zeby rozwiązać to zrównanie, ruguię naprzód mianowników i podług danéy uwagi (59) piſzę, $175x - 10(x-2)x = 175 \times (x-2)$, co po odprawiéniu wſkazanych działań, da mi $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$, albo $10xx - 20x = 350$, nakoniec rozdzieliwſzy przez 10, będzie $xx - 2x = 35$. Zrównanie, do którego niepotrzeba tylko przyſtóſować régułę wyżéy podaną (87). Biorę więc ilość -1, to ieſt połowę mnożnika -2 mnożącego głoſkę x. Tę połowę podnoſzę do kwadratu, co mi daie $+1$, ten kwadrat dodaię do każdéy części, i mam $x^2 - 2x + 1 = 36$; a wyciągnąwſzy piérwiaſtek kwadratowy, będzie $x - 1 = \pm 6$, a zatém $x = \pm 6 + 1$; ſkąd wypadaią mi dwie wártości, to ieſt $x = 7$, i $x = -5$. Piérwſza z nich ieſt liczbą ſzukaną: bo 175 rozdzielone przez 7, da-

ią

ią za wieloráz 25; tudzież, też 175 rozdzielone przez 7 — 2 albo przez 5 daią 35, które w rzeczy famey liczbę 25 przewyżfzaią o 10. Druga zaś wártość rozwięzuie zagadnienie wzięte w takiém rozumiéniu, gdyby potrzeba było rozdzielić 175 złł. przypuszczaiąc do podziału dwie ofoby nowo przybyłe; którato okoliczność zmniéyfzyłaby każdego część o 10 złł.

ZAGADNIENIE TRZECIE.

Pewny człek kupuie kónia, którego po nieiakim czafie przedaie za 24 czerw. złł. W téy przedaży traci tyle na ftu, ile go kóń kofztowáł. Ieft pytanie wiele go mufiáł kofztować?

Gdyby mi powiedziano wiele ten koń kofztowáł, fprawdziłbym tę liczbę w naftępuiący fpofób. Odiąłbym ią od 100, a potém ułożyłbym tę regułę trzech: *Jeżeli 100, daie mi liczbę ktòra wypadła przez odięcie, wiele? mi da liczba fzukana?* Znalázłfzy czwárty wyráz, takowy powinién bydź równy liczbie 24.

Oznaczmy fobie przez x liczbę fzukaną, to ieft liczbę czerwonych złotych które kóń kofztowáł. Natenczas, ponieważ 100 podług przypufzczenia zmniéyfzaią fię na $100 - x$, więc znaydę na iak wiele x powinno fię zmniéyfzyć, ułożywfzy tę regułę trzech, $100 : 100 - x :: x :$; fkąd wypada mi na czwárty wyráz $\frac{(100 - x)x}{100}$ (*Arytm.* 169), albo $\frac{100x - xx}{100}$; a że podług warunku zagadnienia, cena kupionego konia zmniéyfzyła fię na 24 czerw. złł. więc mufi bydź $\frac{100x - xx}{100} = 24$.

Zeby rozwiązać to zagadnienie, ruguię mianownika, i mam $100x - xx = 2400$, albo przemieniwfzy znaki $xx - 100x = -2400$. Biorę daléy (87) połowę ilości -100 to ieft -50, podnofzę ią do kwadratu, i mam $+2500$, które powinienem dodać

dać do każdéy części. A tak zrównanie poprzédzaiące przemiéni fię w naftępuiące, $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100$; z którego wyciągnąwfzy pierwiaftek kwadratowy, będzie $x - 50 = \pm 10$, a zatém $x = 50 \pm 10$; fkąd na x wypadaią te dwie wártości, to ieft $x = 60$ i $x = 40$, i każda z nich rozwięzuie zagadnienie, tak że cena kupionego kónia mogła zarówno wynofić 60 albo 40 czerw. złł.; bo wyrażenie zagadnienia nieieft dofyć dokładne, żeby z niego wnieść fię mogło, która z téy dwoiakiéy ceny w rzeczy faméy użyta była. Gdybyśmy chcieli fprawdzić te oba rozwiązania; zobaczylibyśmy, wziąwfzy za cenę kónia 60 czerw. złł., ponieważ w tym razie 100 zmniéyfza fię na 40, że 60 zmniéyfzyłyby fię na 24 czerw. złł.; w drugim razie ponieważ 100 zmniéyfza fię na 60, 40 zmniéyfzyłyby fię także na 24 czerw. złł.

90. W zagadnieniach poprzédzaiących, zrównania miały dwa rozwiązania, iedno twierdzące, drugie przéczące. Oftatnie zaś zagadnienie ma oba rozwiązania twierdzące; może także mieć czafém oba rozwiązania przéczące; ale to tylko w ten czas trafiać fię zwykło, kiedy zagadnienie będzie błędnie wyrażone: i w takim przypadku każde z dwóch rozwiązań przéczących, znaczy (62), że niewiadoma powinna bydź wzięta nie w tém rozumieniu iak zagadnienie opiéwa, ale w przeciwném.

Np. niech będzie dane to zagadnienie: *Wynaléśdź liczbę taką, do któréy kwadratu dodawfzy 9 razy też fámę liczbę i iefzcze nad to liczbę 50, ażeby to wfzyftko uczyniło 30.*

 Z

Z tego zagadniénia ułożywſzy zrównanie, bę-dzie $x^2 + 9x + 50 = 30$, które podług reguł wyżéy podanych przemiéni ſię naſtępnie, w $x^2 + 9x = -20$, $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$; a wyciągnąwſzy pierwiaſtek kwadratowy, będzie $x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$; ſkąd wy-padaią na x dwie wártości, iakoto $x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, i $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$; a że obie ſą ilościami przéczącémi, więc przez to daią mi znać, że dane zagadniénie trzeba przemiénić w naſtępuiące: *Znaléśdź liczbę taką, do któréy kwadratu dodawſzy 50, a od téy ſummy odiąwſzy też liczbę 9 razy powtórzoną, ażeby reſzy zoſtało ſię 30.*

91. Algebra tedy ma tę użyteczność, że nietylko rozwięzuie zagadniénia, ale też rozeznawa, ieżeli te zagadniénia ſą dobrze albo zle wyrażone; a gdyby były do rozwiązania niepodobne, to ona także pokaże to niepodobiéńſtwo: widzieliśmy iuż wyżéy (85) po czém go poznać.

Ktoby zechciał lepiéy przekonać ſię o tem w przykładzie, niech ſobie tylko rozwiąże zagadnié-nie trzecie, położywſzy w niém 26 czew: złł: za-miaſt 24. Podług tego przypuſzczenia, wypadłoby takie zrównanie, $\frac{100x - xx}{100} = 26$, albo $100 - xx = 2600$, albo $xx - 100x = -2600$, które podług re-guły (87) przemiénia ſię w naſtępuiące, $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2600 = -100$; wyciągnąwſzy zaś pierwiaſtek kwadratowy, będzie $x - 50 = \pm\sqrt{(-100)}$, a naoſtatek $x = 50 \pm \sqrt{(-100)}$. Widzieliśmy zaś (85), że ilość przécząca niémoże miéć piérwiaſtka kwadratowego.

ZAGADNIENIE CZWARTE.

Dwie oſoby przedſięwzięły z ſobą ſpólny handel; ie-dna włożyła weń 30 luidorów, które zoſtawały w tym handlu przez 17 mieſięcy; druga oſoba dopiéro po wyſzłych pięciu mieſiącach dała część ſwoię, to ieſt że część téy drugiéy oſoby nie robiła w handlu tylko przez 12 mieſięcy. Taż druga część ieſt nie-wiadoma, to tylko wiadomo, że wzięta wráz z za-robkiém czyni 26 luidorów. Zarobek zaś cały wy-noſi $18\frac{3}{4}$ luidorów. Ieſt pytanie wiele na tę ſkładkę dała druga oſoba, i co każda z nich zarobiła.

Zagadniénie wychodzi na to, żeby znaléśdź wiela dała druga oſoba; albowiém iawna ieſt, że potém łatwo będzie znaléśdź zarobek każdéy oſo-by. Oznaczmy ſobie przez x, liczbę luidorów wło-żonych w ten handel od drugiéy oſoby. Ponieważ 30 luidorow piérwſzéy oſoby przez 17 mieſięcy w handlu robiły, więc powinny były zarobić iéy ty-le, wieleby iéy zarobiły 17, razy 30, albo 510 luid: przez ieden mieſiąc. Podobnież ponieważ przy-kładka drugiéy oſoby, zoſtawała w handlu przez 12 mieſięcy, więc powinna iéy była tyle zarobić, coby iéy zarobiły 12 razy x luidorów, albo $12x$ przez ieden mieſiąc; a tak tę ſpółkę uważać mo-żna iakby trwała tylko przez mieſiąc, a ſkładki iak-by były piérwſza 510, a druga $12x$ luid:; To za-łożywſzy, żeby dóyśdź zarobku drugiéy oſoby, trzeba (Arytm. 187) wyrachówać czwárty wyráz téy proporcyi: $510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x :$

Takowy czwárty wyráz pokaże ſię bydź $\frac{12x \times 18\frac{3}{4}}{510 + 12x}$, co wychodzi na $\frac{225x}{510 + 12x}$; lecz iak wy-rażenie zagadniénia opiéwa, zarobek i przykładka drugiéy oſoby, czyni razém 26 luidorów, więc muſi bydź $\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26$.

Zeby rozwiązać to zrównanie, rugnię naprzód mianownika, i mam $225x + x\,(510 + 12x) = 26\,(510 + 12x)$, albo odprawiwſzy mnożenia wſkazane, $225x + 510x + 12xx = 13260 + 312x$. Po prze-ſtawiéniu zaś i po zebraniu będzie, $12xx + 423x =$

1326

13260; a rozdzieliwſzy przez 12, $x^2 + \frac{423}{12} x = \frac{1326}{12}$

co można zebrać na $x^2 + \frac{141}{4} x = 1105$; bi

daléy połowę ilości $\frac{141}{4}$, to ieſt $\frac{141}{8}$, i podnieſio do kwadratu, przyłączywſzy do każdéy części zrównania, mam $x^2 + \frac{141}{4} x + \frac{19881}{64} = \frac{19881}{64} + 110$ $= \frac{90601}{64}$. A wyciągnąwſzy piérwiaſtek kwadratowy, będzie $x + \frac{141}{8} = \pm \sqrt{(\frac{90601}{64})} = \pm \frac{301}{8}$

więc $x = -\frac{141}{8} \pm \frac{301}{8}$; ſkąd wypada na iednę wártościów która tylko ſama rozwięzuie zagadnienie, $x = \frac{-141 + 301}{8} = \frac{160}{8} = 20$: Druga oſoba tedy dała na ſpółkę 20 luidorów, a zatém zarobek iéy wynoſi 6, a zarobek piérwſzéy oſoby wynoſi $12\frac{3}{4}$ luidorów.

92. Co ſię tyczé zrównań literalnych, reguła do nich ſłużyć będzie zgoła taż ſama.

Np. gdyby było dane do rozwiązania to zrównanie, $abx - axx = b^2c$; podług tego co już wyżéy powiedziało ſię (86 i 87), odmiéniam poprzédzaiące zrównanie, na $axx - abx = -b^2c$, a potém, na $xx - bx = \frac{-b^2c}{a}$; do każdéy części zrównania dodaię kwadrat ilości $-\frac{b}{2}$, to ieſt $+\frac{bb}{4}$, i mam

mam $xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}$, a po wyciągnieniu piérwiaſtka kwadratowego, $x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{(\frac{bb}{4} + \frac{b^2c}{a})}$;

a naoſtatek $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a})}$.

93. Zrównanie literalne może częſtokroć przytrafić ſię wyrażone w poſtaci, na pozór bardziéy poſkładanéy, aniželi nam dotąd zdarzało ſię widziéć, ale zawſze można go zebrać tylko na trzy wyrazy w naſtępuiący ſpoſób.

Np. niech będzie dane to zrównanie, $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx$. Przeſtawiam wſzyſtkie wyrazy zawiéraiące w ſobie x, do iednéy części, tak ażeby iednakowe ſtopnie głoſki x zaráz po ſobie i porządkiém naſtępówały, co mi daie $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$. Teráz uważam, że $ax^2 - bx^2$ nieieſt co innego, tylko $(a - b) \times x^2$ albo $(a - b)x^2$, podobnież $bcx + acx$ nieieſt co innego, tylko $(ac + bc)x$, tak iż zrównanie $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$ można napiſać w takiéy poſtaci, $(a - b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$: gdzie ponieważ głoſki a, b, c, wyrażaią ilości wiadome, przeto też i ilości $a - b$, $bc + ac$, i $a^2b - ab^2$ można poczytać wſzyſtkie za ilości wiadome, więc dla ſkrócenia, można każdą z tych ilościów oznaczyć tylko przez iednę głoſkę, tak iż zrobiwſzy $a - b = m$, $bc + ac = n$, $a^2b - ab^2 = p$, zrównanie przemiéni ſię, na $mx^2 + nx = p$, które oczywiście należy do przypadków wyżéy opiſanych, i które będąc rozwiązane podług tychże ſamych reguł, da naſtępnie $x^2 + \frac{n}{m} x = \frac{p}{m}$, potém $x^2 + \frac{n}{m} x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$

(do-

(dodawſzy do obu części kwadrat połowy iloś[illegible] $\frac{n}{m}$, to ieſt kwadrat ilości $\frac{n}{2m}$); wyciągnąwſzy z[illegible] piérwiaſtek kwadratowy będzie, $x + \frac{n}{2m} = \pm\sqrt{}$ $(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m})$; a naoſtatek $x = \frac{-n}{2m} \times \pm\sqrt{(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m})}$

94. Lecz takowego przekſztáłcenia poſpoli[illegible] nieużywa ſię tylko w ten czas. kiedy bez niego r[illegible] chunek wypadáłby nazbyt zawikłany; albowiém i w teraznieyſzym przykładzie, napiſawſzy zrównanie po[illegible] tą poſtacią $(a-b)\,x^2 + (bc+ac)\,x = a^2b-a[illegible]$ można bez wielkiéy trudności obéyśdź ſię z nie[illegible] iak z poprzédzaiącémi, naprzód dzieląc przez $a-b$[illegible] ſkądby wypadło $x^2 + \frac{bc+ac}{a-b}x = \frac{a^2b-ab^2}{a-b}$; a po- tém dodaiąc do obu części zrównania kwadrat po- łowy ilości $\frac{bc+ac}{a-b}$, to ieſt kwadrat ilości $\frac{bc+ac}{2a-2b}$; lecz można przeſtać tylko na ſamém onego wſka- zaniu, w ten ſpoſób $(\frac{bc+ac}{2a-2b})^2$; co mi da $x^2 + \frac{bc+ac}{a-b}x + (\frac{bc+ac}{2a-2b})^2 = (\frac{bc+ac}{2a-2b})^2 + \frac{a^2b-ab^2}{a-b}$; wyciągnąwſzy zaś piérwiaſtek kwadratowy, będzie $x + \frac{bc+ac}{2a-2b} = \pm\sqrt{[(\frac{bc+ac}{2a-b}) + \frac{a^2b-ab^2}{a-b}]}$, a naoſtatek $x = \frac{-bc-ac}{2a-2b} \pm \sqrt{[(\frac{bc+ac}{2a-2b}) + \frac{a^2b-ab^2}{a-b}]}$.

O

O podnoſzeniu do różnych ſtopniów ilościów iednosłownych, o wyciąganiu z nich piér- wiaſtków, i o rachunkach ilościów poprzé- dzonych znakami piérwiaſtkowémi, iako téż i o tych co maią wykładniki.

95. Już wyżéy powiedzieliśmy że *ſtopniém* ilości iakiéykolwiek, nazywa ſię mno- gość z téy ilości, wielokrotnie rozmożo- néy przez ſiebie ſamę ráz po ráz; a^3 ieſt trzécim ſtopniém albo ſześcianém ilości a; ponieważ a^3 powſtaie z $a \times a \times a$. Ilość rozmnożona, znayduie ſię bydź w ſtopniu podnieſiénia ſwego, tyle razy czynnikiém, ile zawiéra w ſobie iednościów wykła- dnik tégóż ſtopnia.

I tak w a^5, a ieſt czynnikiém 5 razy; w ilo- ści $(a+b)^6$, $a+b$ ieſt czynnikiém 6 razy.

96. Ponieważ do rozmnożenia ilo- ściów literalnych iędnoſłownych, maią- cych wykładniki, doſyć ieſt (20) dodać wykładnika każdéy głoſki mnożnego do wykładnika podobnéyże głoſki mnożnika, więc idzie zatém, że *ażeby ilość iakąkol- wiek iednosłowną podnieść do ſtopnia zada- nego, nietrzeba więcéy, tylko rozmnożyć wykładnika położonego przy każdéy głoſce téy ilości, przez liczbę wyrażaiącą do ia- kiego ſtopnia ma bydź podnieſiona zadana*

ilość

ilość. Takową liczbę my tu nazywać będziémy *wykładnikiém ſtopnia*.

I tak maiąc podnieść do czwártego ſtopnia ilość a^2b^3c, napiſzę $a^8b^{12}c^4$, mnożąc wykładniki 2. 3 i 1 głoſek a, b, c, przez wykładnika tego ſtopnia do którego miała bydź podnieſiona zadana ilość, to ieſt przez 4. Jakóż ażeby zwyczaynym ſpoſobém podnieść do czwártego ſtopnia ilość a^2b^3c, trzebaby rozmnożyć a^2b^3c przez a^2b^3c, a mnogość z tego rozmnożenia wynikaiącą znowu przez a^2b^3c, nakoniec tę drugą mnogość ieſzcze ráz przez a^2b^3c; lecz żeby odbydź takowe mnożenia, trzeba dodać wykładniki (20); które ponieważ ſą też ſame w każdym czynniku, więc trzeba dodać każdego wykładnika do tegóż wykładnika 3 razy, to ieſt rozmnożyć go przez 4. Rozumówanie zawſze ſłużyć będzie toż ſamo, chociażby potrzeba było do iakiegokolwiek innego ſtopnia podnieść ilość iednoſłowną, i chociażby wykładniki téy ilości iednoſłownéy trafiły ſię wcale inakſze.

Kiedy o wykładnikach ilościów maią zachodzić iakie rozumówania, albo też iakie działania z niémi, któreby niezawiſły od pewnych ſzczególnych wartościów tychże wykładników, ale które i owſzém byłyby ſtoſówne do wſzelkich wykładników, natenczas takowe wykładniki oznaczaią ſię przez głoſki.

I tak żebyśmy to przyſtóſówali do reguły podanéy dopiéro wyżéy, gdyby potrzeba było podnieść do ſtopnia iakiegokolwiek r, ilość iakąkolwiek a^mb^ncp, napiſałbym $a^{mr}b^{nr}c^{pr}$.

97. Gdyby ilość która ma bydź podnieſiona do ſtopnia zadanego, była ułamkiém, trzebaby podnieść do takowego ſtopnia tak licznika iako też i mianownika.

I tak $\frac{a^2b^3}{cd^2}$ podnieſione do piątego ſtopnia uczyni $\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$; podobnież $\frac{a^mb^n}{c^pd^q}$ podnieſione do ſtopnia r, da $\frac{a^{mr}b^{nr}}{c^{pr}d^{qr}}$.

98. Gdyby ilość miała ſpółczynnika, trzebaby także tego ſpółczynnika podnieść do ſtopnia zadanego, mnożąc go ſamego przez ſię podług reguł Arytmetycznych.

I tak $4a^3b^2$ podnieſione do piątego ſtopnia, dałyby $1024a^{15}b^{10}$.

Częſtokroć, zwłaſzcza w głoſkach, przeſtawać ſię zwykło tylko na ſamém wſkazaniu takowego podnieſiénia.

I tak w poprzédzaiącym przykładzie, moznaby napiſać $4^5a^{15}b^{10}$.

99. Co zaś należy do znaków, ieżeli wykładnik tego ſtopnia do którego ilość iakowa ma bydź podnieſiona ieſt parzyſty, wypadek zawſze mieć będzie znak +; ale ieżeli ieſt nieparzyſty, to wypadek może mieć znak + albo —, podług tego gdy ſama zadana ilość ma znak + albo —; ieſt to wnioſek beśrzedni z reguły wyżéy przepiſanéy do znaków (24).

100. Z tego wſzyſtkiego co do
powiedziało ſię, naſtępuie, że w każd
iakimkolwiek ſtopniu ilości, wykład
przy każdéy głoſce położony, zawiéra
ſobie wykładnika ſwego piérwiaſtka ty
razy, ile ieſt iedności6w w wykładni
ſtopnia który ſię uważa.

Np. w czwartym ſtopniu wyładnik każd
głoſki ieſt czworokrotny względém ilości począt
wéy, która była iego piérwiaſtkiém.

101. Więc ażeby od iakiegokolwie
ſtopnia powrócić nazád do iakiego pié
wiaſtka, to ieſt *ażeby wyciągnąć piérwia
ſtek ſtopnia zadanego z iakiéykolwiek iloś
iednosłowné́y, trzeba rozdzielić wykładni
ka położonego przy każdéy głoſce, prze
liczbę oznaczaiącą ſtopién piérwiaſtka iak
ma bydź wyciągniony.* Takowa liczba zno
wu nazywa ſię *wykładnikiém piérwiaſtka.*

I tak ażeby wyciągnąć trzeci albo ſześciénny
piérwiaſtek z ilości $a^{12}b^{6}c^{3}$; dzielę każdego z wykła
dników przez 3, i mam $a^{4}b^{2}c$. Podobnież, żeby
wyciągnąć piąty piérwiaſtek z ilości $a^{20}b^{15}c^{5}$; dzie
lę każdego z wykładników przez 5, i mam $a^{4}b^{3}c$.
W powſzechności, ażeby wyciągnąć piérwiaſtek
ſtopnia r, z ilości $a^{m}b^{n}$, napiſzę $a^{\frac{m}{r}}b^{\frac{n}{r}}$.

102. Co ſię tyczé znaku piérwiaſtka,
ten zarówno może bydź + albo —, ieżeli
ſtopién piérwiaſtka będzie parzyſty; ale
kie-

kiedy ſtopién piérwiaſtka ieſt nieparzyſty, to piérwiaſtkowi daie ſię taki znak, iaką miała ſama ilość.

I tak piérwiaſtek czwárty ilości $a^{12}b^{8}$ ieſt $a^{3}b^{2}$; piątym zaś piérwiaſtkiém ilości $-a^{5}b^{10}$ będzie $-ab^{2}$.

103. Gdyby ilość zadana była ułamkiém, natenczas trzebaby wyciągnąć oſobny piérwiaſtek tak z licznika iak z mianownika.

104. Jeżeliby znaydówały ſię ſpółczynniki, trzebaby z nich wyciągnąć piérwiaſtki kwadratowe albo ſześciénne ſpoſobami w Arytmetyce przepiſanémi; gdyby zaś zdarzył ſię do wyciągniénia piérwiaſtek wyżſzego ſtopnia, to będzie można wyciągnąć go podług reguł, o których niżéy.

105. Kiedy wykładnik piérwiaſtka zadanego do wyciągniénia, niedzieli ſpełna każdego z wykładników ilości danéy, to będzie dowodém że takowa ilość nieieſt ſtopniém doſkonałym o który rzecz idzie. W takim przypadku wykładnik zoſtaie ułamkowy, i oznacza ſtopién iaki zoſtaie do wyciągniénia.

I tak gdyby potrzeba było wyciągnąć piérwiaſtek ſześciénny z ilości $a^{9}b^{3}c^{4}$, miałbym $a^{3}bc^{\frac{4}{3}}$ albo $a^{3}bcc^{\frac{1}{3}}$; gdzie wykładnik $\frac{1}{3}$ pokazuie mi że z głoſki c ieſzcze zoſtaie do wyciągniénia piérwiaſtek ſześciénny.

106. Wyciągniénie piérwiaſtków przy wyżſzaiących drugi ſtopiéń, zwykło ſię także wſkazówać przez znak $\sqrt{}$; ale między ramionami tego znaku, umieſzcza ſię liczba oznaczaiąca ſtopiéń piérwiaſtka o który rzecz idzie.

I tak $\sqrt[3]{a}$, znaczy piérwiaſtek ſześciénny z ilości a; $\sqrt[7]{a}$, znaczy piérwiaſtek ſiodmy téyże ilości. A zatém te dwa wyrażenia $\sqrt[3]{a}$ i $a^{\frac{1}{3}}$ maią iednakowe znaczenie; toż rozumié ſię o tych dwu wyrażeniach $\sqrt[5]{a^4}$ i $a^{\frac{4}{5}}$.

107. Uwaga wyżéy położona (105) może ſłużyć do przemiany w prościéyſze wyrażenie ilościów poprzédzonych znakiém $\sqrt{}$.

Np. gdyby było zadano $\sqrt[3]{a^4b^5}$; ponieważ ta ilość to ſamo znaczy co $a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}}$ albo $aa^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, i wychodzi na $ab\sqrt[3]{ab^2}$ (105); więc miéć będę $\sqrt[3]{a^4b^5} = ab\sqrt[3]{ab^2}$.

Podobnież będzie $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a\frac{a^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a\sqrt{\frac{a}{f}}$; albo też rozmnożywſzy licznika i mianownika przez $\sqrt{f}$, $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \sqrt{\frac{a^3f}{f^2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}f^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{2}{2}}} = \frac{a}{f}a^{\frac{1}{2}}f^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{f}\sqrt{af}$.

108. Gdyby znaydówał ſię ſpółczynnik, trzebaby ſtarać ſię rozłożyć go na czynników, z których wynikaiąca mnogość

gość byłaby doſkonałym ſtopniém tego porządku iaki ma bydź piérwiaſtek wyciągniony, albo też wielokrotnością tego ſtopnia, wreſzcie trzebaby poſtąpić ſobie iak w przykładach poprzédzaiących.

Np. gdyby było zadano $\sqrt{48a^2b^3}$, możnaby to przemiénić na $\sqrt{3\times16a^2b^3}$, albo na $\sqrt{3\times4^2a^2b^3}$, co wychodzi na $4ab\sqrt{3b}$. Podobnież $\sqrt[3]{81a^5b^4} = \sqrt[3]{3\times27a^5b^4} = 3ab\sqrt[3]{3a^2b}$.

109. Kiedy ilość ieſt wielo-ſłowna, niéma potrzeby dzielić każdego z wykładników; ale należy uważać całość wſzyſtkich części iakoby nieſkładały tylko iednę ilość, któréy wykładnikiém naturalnie będzie 1, i ta dzieli ſię przez wykładnika piérwiaſtka, iaki ma bydź wyciągniony; właściwie mówiąc ieſt to tylko wſkazanie tego piérwiaſtka.

Np. zamiaſt $\sqrt[4]{a^2+b^2}$ co na iedno wychodzi iak $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^1}$, piſze ſię $(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$ albo $\overline{a^2+b^2}^{\frac{1}{4}}$.

Gdyby cała ilość okryta znakiém piérwiaſtkowym iuż miała wykładnika, takowego wykładnika podobnież rozdzielićby trzeba przez wykładnika piérwiaſtka iaki ma bydź wyciągniony.

I tak zamiaſt $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}$, napiſać można $(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}$.

110. Dodawanie i odéymówanie ilo-ściów piérwiaſtkowych wychodzi na to, ażeby ie tylko połączyć iedne z drugiémi przez znaki należące do tych działań, ie-żeli ſą pomiénione ilości ſobie niepodobne, albo też ażeby dodać lub odiąć ich ſpół-czynniki iak ſię robi w zwyczaynem do-dowaniu i odéymówaniu, ieżeli ilości bę-dą ſobie podobne.

I tak żeby dodać $\sqrt[3]{a}$ do $\sqrt[4]{b}$; piſze ſię $\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}$. Zeby odiąć $7a\sqrt[3]{b}$ od $9a\sqrt[3]{b}$, piſze ſię $2a\sqrt[3]{b}$.

111. Zeby rozmnożyć albo rozdzie-lić ilości piérwiaſtkowe iednakowego ſto-pnia, trzeba odprawić działanie tak iak gdyby niebyło znaku piérwiaſtkowego, a potém wypadłéy mnogości albo wielo-razowi dać ſpólny znak piérwiaſtkowy.

I tak $\sqrt[7]{a^5}\times\sqrt[7]{a^3}=\sqrt[7]{a^8}=\sqrt[7]{a^7a}=a\sqrt[7]{a}$. $\sqrt[5]{a^2b^3}\times\sqrt[5]{a^3b^2}=\sqrt[5]{a^5b^5}=ab$; $a\times\sqrt[5]{\frac{b}{a}}=\sqrt[5]{a^5}\times\sqrt[5]{\frac{b}{a}}=\sqrt[5]{\frac{a^5b}{a}}=\sqrt[5]{a^4b}$.

Podobnież $\sqrt{(-a)}\times\sqrt{b}=\sqrt{(-ab)}$; $\sqrt{(-a)}\times\sqrt{-b}=\sqrt{(-a\times-b)}=-\sqrt{(ab)}$.

Ten oſtatni przykład potrzebuie wy-tłómaczenia: zdawałoby ſię że ponieważ $\sqrt{(-a)}\times\sqrt{(-b)}$ winno podług reguły dać po-$\sqrt{ab}$, iako też ponieważ każdy znak piér-wia-

wiaſtkowy parzyſty (102) może zawſze mieć dwa znaki, to ieſt $\pm$, zdawałoby ſię mówię że w oſtatnim przykładzie powin-noby było wyniknąć $\pm\sqrt{ab}$; ale uważyć trzeba że $\sqrt{(-a)}=\sqrt{a}.\sqrt{(-1)}$, a $\sqrt{(-b)}=\sqrt{b}.\sqrt{(-1)}$, więc $\sqrt{(-a)}\times\sqrt{(-b)}=\sqrt{a}.\sqrt{(-1)}.\sqrt{b}.\sqrt{(-1)}=\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{(-1)}.\sqrt{(-1)}=\sqrt{ab}.\sqrt{(-1)}^2$. W niniéyſzym zaś razie, ilości $\sqrt{(-1)}^2$ niémożna dać po-dług upodobania znaku dwoiakiego $\pm$, bo przytomność znaku — w wyrazie $\sqrt{(-1)}^2$, pokazuie przez iakie działania przyſzło ſię do kwadratu $(-1)^2$, z którego ma bydź wyciągniony piérwiaſtek.

112. Zeby rozdzielić $\sqrt[7]{a^5}$ przez $\sqrt[7]{a^3}$, trzeba rozdzielić a^5 przez a^3 i wielora-zowi a^2 dać znak $\sqrt[7]{}$, ſkąd wypadnie $\sqrt[7]{a^2}$.

Podobnież będzie $\frac{\sqrt[5]{a^4b^3}}{\sqrt[5]{a^2b}}=\sqrt[5]{\frac{a^4b^3}{a^2b}}=\sqrt[5]{a^2b^2}$;

$\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}}=\frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}}=\sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}}=\sqrt[5]{a^2}$; $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}=\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}}=\sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}}=$ . .

$\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$; albowiém piąty piérwiaſtek iedności ieſt 1. W powſzechności wſzelki ſtopień i wſzel-ki piérwiaſtek iedności, ieſt zawſze iedność.

113. Zeby ilość iakąkolwiek położną pod znakiém piérwiaſtkowym podnieść do ſtopnia, któregoby wykładnik był te, że ſam co wykładnik piérwiaſtka, nietrzeba więcéy tylko odrzucić znak piérwiaſtkowy; i tak $\sqrt[5]{(a)} = a$; co ieſt rzeczą oczywiſtą mówiąc w powſzechności, i uważając że w tym razie nie co innego przedſiębierze ſię, tylko żeby przyprowadzić ilość do ſwego piérwſzego ſtanu.

Zeby iakąkolwiek ilość piérwiaſtkową iednoſłowną, podnieść do ſtopnia iakiegokolwiek, trzeba podnieść każdego z iéy wykładników do tegóż ſtópnia podług reguły danéy (96).

I tak $\sqrt[7]{a^2b^3}$ podnieſione do czwartego ſtopnia, dadzą $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$, co wychodzi na $ab\sqrt[7]{ab^5}$. Taż ilość $\sqrt[7]{a^2b^3}$ podług (106) da ſię ieſzcze tak wyrazić $a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$; to zaś wyrażenie chcąc podnieść do czwartego ſtopnia, mnożę wykładników przez 4, co mi da $a^{\frac{8}{7}}b^{\frac{12}{7}}$ $= ab^{\frac{1}{7}}b^{\frac{5}{7}} = ab\sqrt[7]{ab^5}$.

114. Zeby wyciągnąć piérwiaſtek iakikolwiek z ilości piérwiaſtkowéy, trzeba rozmnożyć wykładnika piérwiaſtka danego, przez wykładnika tego nowego piérwiaſtka.

I tak maiąc wyciągnąć trzeci piérwiaſtek z ilości $\sqrt[5]{a^4}$, napiſzę $\sqrt[15]{a^4}$, ro zmnożywſzy 5 przez 3. Ja-

Jakóż $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; żeby zaś z téy ilości wyciągnąć piérwiaſtek, trzeba rozdzielić iéy wykładnika przez 3 (101), co mi da $a^{\frac{4}{15}}$, które tož ſamo znaczą co $\sqrt[15]{a^4}$.

115. Kiedy ilosci piérwiaſtkowe zadane, nieſą wſzyſtkie iednakowego ſtopnia, żeby z niém można było odbydź działania mnożenia i dzielenia, trzeba ie wprzód przyprowadzić do iednakowego ſtopnia, co łatwo da ſię wykonać przy pomocy reguły naſtępuiącéy.

Jeżeli będą zadane dwie ilości piérwiaſtkowe; rozmnóż wykładnika iednéy przez wykładnika drugiéy, wynikaiąca ſtąd mnogość będzie ſpólnym wykładnikiém obu ilościów piérwiaſtkowych; podnieś oráz ilość położoną pod każdym znakiém piérwiaſtkowym do ſtnpnia oznaczonego przez wykładnika drugiéy ilości piérwiaſtkowéy.

Np. chcąc przyprowadzić do iednakowego znaku piérwiaſtkowego dwie ilości $\sqrt[5]{a^3}$ i $\sqrt[7]{a^4}$, mnożę 5 przez 7, i mam na wykładnika nowego piérwiaſtka 35, co mi da $\sqrt[35]{}$; podnoſzę a^3 do ſiodmego ſtopnia a a^4 do piątego, ſkąd wypada mi a^{21} i a^{20}; tak że ilości zadane odmiénią ſię w naſtępuiące $\sqrt[35]{a^{21}}$ i $\sqrt[35]{a^{20}}$.

Jeżeli zaś znaydówać ſię bedzie więcéy iak dwie ilościów piérwiaſtkowych, *rozmnóż między ſobą wykładniki wſzyſtkich ilo-*

ilościów piérwiaſtkowych, mnogość z nich bę-dzie wykładnikiém ſpólnym. Podnieś oraz iloś położoną pod każdym znakiém piér-wiaſtkowym do ſtopnia oznaczonego przez mnogość z wſzyſtkich wykładników oprócz tego o który rzecz idzie.

Np. maiąc te trzy ilości piérwiaſtkowe $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$ i $\sqrt[8]{a^7}$; mnożę ieden przez drugi trzech wykła-dników 5, 7 i 8, co mi da 280 na ſpólnego nowego wykładnika; podnoſzę a^3 do ſtopnia 7×8 albo 56, a^2 do ſtopnia 5×8 albo 40, i a^7 do ſtopnia 5×7 albo 35, i miéć będę $\sqrt[280]{a^{168}}$ $\sqrt[280]{a^{80}}$ $\sqrt[280]{a^{245}}$.

Przyczyna téy reguły łatwo daie ſię poiąć, uważaiąc co do piérwſzego przy-kładu, że podnoſząc (podług reguły) a^3 do ſiódmego ſtopnia, przez to a ſtaie ſię czynnikiém 7 razy tyle, ile razy iuż było czynnikiém; ale czyniąc wykładnika piér-wiaſtkowego 7 razy tak wielkim iak był, a ſtaie ſię przez to 7 razy mniéyſzą licz-bę czynnikiém; więc nadgradza ſię iedno drugiém, i nieczyni ſię odmiana tylko w poſtaci.

116. Z tego rozumówania wnieść ſo-bie można, że kiedy wykładnik ilości po-łożonéy pod znakiém piérwiaſtkowym i wykładnik znaku piérwiaſtkowego maią ſpólnego dziélnika, ilość zadana zawſze może bydź przyprowadzona do prościéy-ſze-

ſzego wyrażenia, rozdzieliwſzy przez ta-kowego ſpólnego dziélnika obu pomié-nionych wykładników.

Np. $\sqrt[12]{a^8}$, da ſię przemiénić na $\sqrt[3]{a^2}$, rozdzieli-wſzy tak 12 iak 8 przez 4. Podobnież $\sqrt[4]{a^2}$ prze-miénia ſię na $\sqrt{a}$; iako też $\sqrt[6]{a^3}$ na $\sqrt{a}$.

117. Wnieśmy ſobie tedy ieſzcze ſtąd, że kiedy wykładnik piérwiaſtka który ma bydź wyciągniony, ieſt liczbą ſkładaiącą ſię z dwóch lub więcéy innych liczb, mo-żna odbydź wyciągniénie piérwiaſtka nie o ieden ráz, ale naſtępnie w ten ſpoſób:

Daymy że z ilości a^{24} potrzeba wyciągnąć ſzoſty piérwiaſtek; mogę tedy naprzód wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy, a potém zrowu ſześcién-ny, i tak miéć będę wyciągniony piérwiaſtek ſzó-ſty. Jakoż $\sqrt[6]{a^{24}}$ da przemiénić ſię (116) na $\sqrt[3]{a^2}$, a ta ilość znowu na $\sqrt[1]{a^4}$ albo a^4, co na iedno wycho-dzi, iak gdyby ſię był zaráz proſto wyciągnął piér-wiaſtek ſzóſty z ilości a^{24}, dzieląc wykładnika 24 przez 6 (101).

Wreſzcie, ponieważ wykładniki ułam-kowe zaſtępuią miéyſce znaków piérwia-ſtkowych, i że piérwſze ſą wygodniéyſze do rachówania iak drugie, przeto ieſzcze zaſtanowimy ſię cokolwiek nad rachunka-mi wykładników.

Gdybym miáł $\sqrt[5]{a^3}$ rozmnożyć przez $\sqrt[5]{a^4}$, to działanie odmiéniłbym w naſtępuiące $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, ſkąd mam

mam (20) $^{\frac{7}{5}}$ albo $aa^{\frac{2}{5}}$; co wychodzi na $a\sqrt[5]{a^2}$. Gdy-bym miał $\sqrt[5]{a^3}$ rozmnożyć przez $\sqrt[7]{a^4}$, napiszę $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$, albo $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$, albo (przywiódłszy oba ułamki do spól-nego mianownika), $a^{\frac{21+20}{35}}$, albo $a^{\frac{41}{35}}$, co wychodzi na $aa^{\frac{6}{35}}$, albo naostatek $a\sqrt[35]{a^6}$.

W powszechności, $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$, przemienia się na $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$, i znowu na $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, albo (przywiódłszy ułamki do spólnego mianowni-ka będzie $a^{\frac{qn+mr}{mq}} b^{\frac{pq+ms}{mq}}$, albo naostatek (105) $\sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$. — Toż samo rozumieć trzeba o dzieleniu; $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ przemienia się na $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}}$ (31), albo naostatek $\sqrt[5]{a}$. Podobnież $\frac{\sqrt[5]{a^3 a^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}}$ przemienia się na $\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}} = a^{\frac{3}{5}-\frac{2}{7}} b^{\frac{4}{5}-\frac{3}{7}}$, albo (przywiódłszy ułamki do spólnego mianownika) $a^{\frac{21-10}{35}} b^{\frac{28-15}{35}}$, co wychodzi na $a^{\frac{11}{35}} b^{\frac{13}{35}}$, albo naostatek na $\sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$.

W powsze-chności $\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} = \frac{a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}}$

$= a^{\frac{qn-mr}{qm}} b^{\frac{pq-ms}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{qn-mr} b^{pq-ms}}$.

118.

118. W ostatnim przykładzie odięliśmy wykładnika należącego do każdéy głoski mianownika, od wykładnika odpowiadaiącéy głoski w liczniku. Reguła podana wyżéy do dzielenia (31), niezdaie się tego pozwalać tylko w ten czas, kiedy wykładnik mianownika iest mniéyszy iak wykładnik licznika; atoli mówiąc w powszechności można to zawsze uczynić, byleby zbytkowi dać znak — po wykonaném zebraniu; tak iż w powszechności każdy ułamek Algebraiczny da się wyrazić w postaci ilości całéy.

Np. zamiast $\frac{a^3}{b^2}$, można napisać $a^3 b^{-2}$. Jakoż podług tego poięcia które iuż wyżéy powzięliśmy o dzieleniu, skutek dzielnika powinien bydź ten, ażeby z dzielnego wyrugówać wszystkich czynników znayduiących się w dzielniku; w ilości $\frac{a^5}{a^2}$ która przemienia się na a^3, dzielnik a^2 ruguie z ilości a^5 dwóch czynników równaiących się ilośai a. Podobnież w ilości $\frac{a^3}{b^2}$, skutkiém ilości b^2 powinno bydź, żeby z a^3 wyrugówać dwóch czynników równaiących się ilości b. A lubo w niéy te czynniki nieznayduią się iawnie, iednakże można ich sobie zawsze w myśli wystawić: albowiém daie się to poiąć, że a zawiéra w sobie b pewną liczbę razy, bądźto całą bądź ułamkową; niechay będzie m tą liczbą razy; na ten czas a będzie wárto m razy b albo mb; ilość tedy $\frac{a^3}{b^2}$ odmiéni się

w

w tę $\frac{m^3b^3}{b^2}$, która wychodzi na m^3b; lecz w takim przypadku ilość a^3b^{-2} może bydź wyrażona przez $m^3b^3b^{-2}$, albo (20) m^3b^{3-2}, to iest przez m^3b; więc $\frac{a^3}{b^2}$ ieſt iedno co a^3b^{-2}.

Więc w powſzechności, *można przeſtawić wſzelką ilość z mianownika do licznika, napiſawſzy ią w liczniku iakoby czynnika i dawſzy wykładnikowi iéy znak przeciwny temu iaki miała w mianowniku.*

I tak zamiaſt $\frac{1}{a^3}$ można napiſać $1 \times a^{-3}$, albo proſto a^{-3}; zamiaſt $\frac{1}{a^m}$ można napiſać a^{-m}; zamiaſt $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ można napiſać $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$. Zamiaſt $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^3}$ można napiſać $(a^3 + b^3 \times (a^2 + b^3)^{-1}$; iako też maiąc wzgląd na to wſzyſtko co poprzédziło, zamiaſt $\frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}}$ można napiſać $\frac{(a^2 + b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}}$, albo naoſtatek $(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

119. I odwrotnie, *kiedy ilość iakowa składać ſię będzie z wyrazów maiących wykładniki przéczące, takowe wyrazy zawſze można przeſtawić do mianownika, przemiéniwſzy wykładniki na wykładniki twiérdzące.*

I

I tak zamiaſt a^3b^{-4} można napiſać $\frac{a^3}{b^4}$; zamiaſt a^{m-3} co wychodzi na iedno iak $a^m \times a^{-3}$, można napiſać $\frac{a^m}{a^3}$, to rozumiéć trzeba o innych tym podobnych przypadkach.

O podnoſzeniu do różnych ſtopniów ilościów wielosłownych, i wyciąganiu z nich piérwiaſtków.

120. Podług tego wyobrażenia które iuż powzięliśmy o ſtopniach, do iakich ilości bywaią podnoſzone, żeby iakąkolwiek ilość wieloſłowną podnieść do ſtopnia zadanego, nietrzeba więcéy tylko takową ilość rozmnożyć ſamę przez ſię tyle razy mniéy iednym razém, ile znayduie ſię iednościów w wykładniku tego ſtopnia: lecz przeſtaiąc iedynie na tym ſpoſobie, częſtokróć wpadłoby ſię w rachunki nazbyt długie dla znaleziénia wypadków, które można miéć daleko prędzéy, zaſtanowiwſzy ſię cokolwiek nad właſnościami ilościów wynikaiących z niektórych takowych mnożéń.

My tu zabawimy ſię naprzód nad ſtopniami ilościów dwuſłownych, bo te pokażą nam drogę do obéyścia ſię z ilościami zawiéraiącémi w ſobie większą liczbę

czbę

czbę wyrazów; lecz żebyśmy lepiéy d
wyrozumiénia podali to wſzyſtko co n
naſtąpić, muſimy nieco wyżéy zaſ
gnąć: rozbierzémy tedy własności mn
gościów wynikaiących z naſtępnego roz
mnożenia czynników dwuſłownych, kt
reby miały wſzyſtkie ieden wyráz ſpó
ny; a ten rozbiór nietylko doprowadz
nas proſto do naſzego célu, ale téż wſk
że różne podania, które nam w dalſzym
przeciągu będą bardzo użytecznémi.

121. Niechay będzie zadano $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, i. t. d. kilka ilościów dwuſłownych, które wſzyſtkie miałyby ſpólny wyráz x, i które trzebaby rozmnożyć iedne przez drugie.

Mnożąc - - $x+a$
przez $x+b$

będzie - - - $x^2+ax+ab$
$\quad +bx$

Tę mnogość mnożąc znowu przez $x+c$

$$\begin{array}{llll} x^3 & +ax^2 & +abx & +abc \\ & +bx^2 & +acx & \\ & +cx^2 & +bcx & \end{array}$$

Tę drugą mnogość mnożąc daléy przez $x+d$, będzie

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +ax^3 & +abx^2 & +abcx & +abcd \\ & +bx^3 & +acx^2 & +abdx & \\ & +cx^3 & +adx^2 & +acdx & \\ & +dx^3 & +bcx^2 & +bcdx & \\ & & +bdx^2 & & \\ & & +cdx^2 & & \end{array}$$

i

i tak daléy; ſkąd wynikaią naſtępuiące uwagi, biorąc za ieden wyráz to wſzyſtko co znayduie ſię położono w teyże kolumnie.

1ód Ze piérwſzym wyrazém każdéy mnogości, ieſt zawſze piérwſzy wyráz x każdéy ilości dwuſłownéy, podnieſiony do ſtopnia oznaczonego przez liczbę tychże ilościów dwuſłownych; tak że gdyby liczba ich była m, piérwſzym wyrazém mnogości byłoby x^m.

2re Ze począwſzy od piérwſzego wyrazu, naſtępuiące ſtopnie ilości x, coraz zniżaią ſię o iednę iedność, aż do oſtatniego wyrazu, w którym iuż x znaydować ſię niebędzie.

3cie Ze mnożnikiém każdego ſtopnia ilości x, (które odtąd nazywać będziémy mnożnikiém tego wyrazu gdzie ſię znayduią takowe ſtopnie) będzie w drugim wyrazie, ſumma drugich wyrazów ilościów dwuſłownych a, b, c, d, i. t. d; w trzecim wyrazie, ſumma mnogościów z tychże ilościów a, b, c, i. t. d. rozmnożonych między ſobą dwie a dwie; w czwartym wyrazie ſumma mnogościów z tychże ilościów a, b, c, i. t d. rozmnożonych między ſobą trzy a trzy; i tak daléy aż do oſtatniego wyrazu, który będzie mnogo-

ścią

ścią wynikaiącą z tych wſzyſtkich ilo-ściów. Te wnioſki ſą oczywiſte, liczba wyrazów romnożonych $x + a$, $x + b$, i.t.d. niech będzie iaka chce.

122. Teráz przypuściwſzy że wſzyſtkie ilości a, b, c, i.t.d. ſą równe, w którymto przypadku wſzyſtkie ilości dwuſłowne rozmnożone będą także między ſobą równe; to mówię przypuściwſzy mnogości wyżéy wynalezione, będą kolèynémi ſtopniami którèykolwiek z tych ilościow dwuſłownych, *np.* ilości $x + a$, ieżeli każda z ilościów b, c, d, i.t.d. równa ſię ilości a. Jeżeli tedy w tych mnogościach zamtaſt każdéy z głoſek b, c, d, i.t.d. położymy a, miéć będziemy naſtupuiące wypadki na wártości ſtopniów; które tu znayduią ſię wſkazane na boku.

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$.

$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4$.

Gdzie łatwo można widziéć że ieżeli m ieſt wykładnikiém ſtopnia, do którego ma bydź podnieſiona ilość dwuſłowna, ſtopnie naſtępne głoſki x byłyby wyrażone przez x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, i. t. d.

Lecz nietak widocznie daie ſię doſtrzédz, iakim ſpoſobém ſpółczynniki różnych

żnych wyrazów każdego ſtopnia pochodzą iedne z drugich, tudzież że zawiſły od wykładnika m, iak zobaczymy niżéy.

123. Żeby wynaléśdź regułę do ſkładania ſobie tych ſpółczynnikow, muſimy powrócić do naſzych piérwſzych mnogościów i uważyć, że ponieważ mnożnikiém drugiego wyrazu ieſt ſumma wſzyſtkich ilościów a, b, c, i.t.d. więc kiedy każda z tych ilościów będzie równać ſię ilości a, pomiéniony drugi wyráz muſi ſkładać ſię z a tyle razy powtórzonego, ile znayduie ſię owych ilościów; więc ieżeli ich liczba ieſt m, mnożnikiém będzie m razy a, albo ma, to ieſt że ſpółczynnik ilości a równać ſię będzie wykładnikowi piérwſzego wyrazu tego ſtopnia; iako to zobaczyć można w trzech ſtopniach wyżéy położonych.

Zobaczmy teráz iakie powinny bydź mnożniki innych wyrazów. Jawna ieſt, że wſzyſtkie mnogości ab, ac, ad, bc, bd, i. t. d. podług teraźniéyſzego przypuſzczenia, każda z nich równa ſię ilości a^2; podobnież wſzyſtkie mnogości abc, abd, każda z nich równa ſię ilości a^3, i tak o innych. Więc mnożnik trzeciego wyrazu każdéy z piérwſzych naſzych mnogościów wychodzi na a^2 powtórzone tyle razy, wiele mogą dać mnogościów głoſki, *a,b,c,* i. t. d. będąc rozmnożone dwie a dwie. Podobnież mnożnik czwartego wyrazu, wychodzi na a^3 powtórzone tyle razy ile dać mogą mnogościów głoſki *a,b,c,* i. t. d. bedąc rozmnożone trzy a trzy, i tak daléy; więc żeby mieć ſpółczynnika liczebnego, trzeciego, czwartego, i. t. d. wyrazu ilości $x + a$ podnieſionéy do ſtopnia *m*, nietrzeba więcéy tylko mieć wiadomo wiele dać może różnych mnogościów liczba *m* głoſek *a, b, c,* i. t. d. rozmnożonych między ſobą dwie a dwie, trzy a trzy, i. t. d.

124. Lecz uważam, że maiąc iakąkolwiek liczbę *m* głoſek, i połączywſzy ie między ſobą na wſzelkie ſpoſoby iak tylko można po dwie, po trzy, po cztéry i. t. d. byléby żadnéy głoſki w iednymże połączeniu niepowtarzać, uważam mówię:

1^ód^ Ze liczba połączeń po dwie głoſki, będzie podwóynością liczby mnogościów powſtaiących z rozmnożenia między ſobą dwóch głoſek, rzetelnie od ſiebie różnych. Jakóż dwie głoſki mogą bydź między ſobą połączone dwóma ſpoſobami; *np. a* i *b*, daią te dwa połączenia *ab* i *ba*, ale te dwa połączenia niedaią dwóch różnych mnogościów.

2^re^

2^re^ Ze liczba połączéń kilku głoſek po trzy, będzie ſześć razy tak wielka iak liczba mnogościów powſtaiących z rozmnożenia między ſobą trzech głoſek rzetelnie od ſiebie różnych. Jakóż żeby mieć wſzyſtkie połączenia trzech ilościów *a, b, c,* trzeba połączywſzy z nich dwie *np. a* i *b*, co da *ab* i *ba*, trzeba mówię połączyć trzecią ilość *c* z każdém z dwóch piérwſzych połączeń, to ieſt dać mu wſzelkie iakie tylko mieć może położenie względém głoſek *a* i *b*, wchodzących w *ab* i *ba*; ſkąd wynika ſześć połączéń złożonych z trzech głoſek, iakoto *abc, acb, cab, bac, bca, cba*; lecz każde z tych ſześciu połączéń niewyraża tylko iednę i też ſamę mnogość.

Przez temuż podobne rozumówanie, dałoby ſię okazać, że cztéry ilości mieć mogą dwadzieścia cztèry połączéń, z których każde wyraża też ſamę mnogość; więc liczba mnogościów od ſiebie różnych, wynikaiących z połączenia między ſobą wielu głoſek po cztéry, ieſt dwudzieſtą czwartą częścią całéy liczby takowych połączéń. Podobnież liczba mnogościów różnych, wynikaiących z rozmnożenia między ſobą wielu głoſek po pięć, po ſześć, po ſiedm, i. t. d. ieſt ſto dwudzieſtą, ſiemſet dwudzieſtą, pięćtyſięcy cztérdzieſtą i. t. d.

K 2

d. częścią całéy liczby takowych połączeń, to ieſt w powſzechności, można ią wyrazić przez ułamek maiący za licznika całą liczbę połączeń, a za mianownika mnogość wynikaiącą z wſzyſtkich liczb 1, 2, 3, 4; i.t.d. aż do liczby oznaczaiącéy z wiela głoſek ſkłada ſię każda mnogość.

125. Zobaczymy tedy wiele może dać połączeń liczba m głoſek a, b, c, i.t.d. wziętych po dwie, po trzy, i.t.d.

Co do połączeń po dwie głoſki, iawna ieſt że ponieważ taż ſama głoſka niémoże bydź łączona ſama z ſobą, więc da ſię połączyć tylko z innemi $m-1$, a zatém da téż tyleż połączeń, to ieſt $m-1$; a tak ponieważ znayduie ſię m wſzyſtkich głoſek, więc dadzą połączeń m razy $(m-1)$, albo $m.(m-1)$. Więc podług tego co ſię dopiéro wyżéy powiedziało (124), liczba mnogościów powſtaiących z dwóch głoſek rzetelnie różnych między ſobą, będzie $m.\frac{m-1}{2}$.

Co ſię tyczé połączeń po trzy głoſki, żeby ie miéć, trzeba każde z połączeń zrobionych po dwie głoſki, połączyć znowu z każdą głoſką która w piérwſzych połączeniach nieznayduie ſię, to ieſt z liczbą głoſek oznaczonych przez $m-2$; więc

więc każde z tych połączeń, da $m-2$ połączeń po trzy głoſki; a ponieważ z dwóch głoſek mieliśmy połączeń $m.(m-1)$, z których znowu każde powinno dać $m-2$ połączeń po trzy głoſki, więc wſzyſtkich połączeń po trzy głoſki będzie $m\,(m-1).(m-2)$; a że podług (124) liczba mnogościów rzetelnie między ſobą różnych, ieſt ſzóſtą częścią téy całéy liczby połączeń, więc będzie $m.\frac{(m-1).(m-2)}{6}$ albo $m\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$.

Podobnież dowiéśdźby można, że liczba połączeń po cztéry głoſki, byłaby $m.(m-1).(m-2).(m-3)$; bo trzebaby każde połączenie trzech głoſek połączyć znowu z wſzyſtkiémi innémi głoſkami, które w piérwſzych połączeniach nieznayduią ſię, a których liczba będąc $m-3$, z każdego połączenia po trzy głoſki wypadnie $m-3$ połączeń po 4 głoſki; więc kiedy liczba połączeń po trzy głoſki ieſt wyrażona przez $m.\,(m-1).(m-2)$, liczba połączeń po cztéry głoſki, będzie wyrażona przez $m.\,(m-1).(m-2).(m-3)$; że zaś liczba mnogościów rzetelnie od ſiebie różnych, powſtaiących z rozmnożenia po cztéry głoſki, ieſt dwudzieſtą czwartą częścią takowéy liczby połączeń, przeto to pomiéniona liczba mnogościów będzie wyrazona przez $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}$.

Toż ſamo rozumówanie okazałoby, że liczba mnogościów różnych powſtaiących z rozmnożenia liczby m. głoſek po pięć, po ſześć, i. t. d. byłaby wyrażona przez $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}$, i przez $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}.\frac{m-5}{6}$, i tak daléy.

126. Wnieśmy ſtąd i z tego co ſię powiedziało (122), że wyrazy koléyne ilości dwuſłownéy $x+a$ podnieſionéy do ſtopnia m, albo ilości $(x+a)^m$, będą naſtępuiące.

$$x^m + max^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} + \text{t. d.}$$

To ieſt, że piérwſzym wyrazém *rzędu* (ſeries) ſkładaiącego ten ſtopién, ieſt piérwſzy wyráz x ilości dwuſłownéy, podnieſiony do ſtopnia m; że potém daléy wykładniki głoſki x umniéyſzaią ſię coráz o iednę iedność, a odwrotnie wykładniki głoſki a roſną za każdym razém o iednę iedność, począwſzy od drugiego wyrazu, w który dopiéro poczyna wchodzić a.

Co

Co ſię tyczé ſpółczynników m, $m.\frac{m-1}{2}$, i. t.d. trzeba uważyć że ſpółczynnik drugiego wyrazu równa ſię wykładnikowi piérwſzego wyrazu; że ſpółczynnik $m.\frac{m-1}{2}$ trzeciego wyrazu, nieieſt co innego, tylko ſpółczynnik poprzédzaiącego wyrazu m, rozmnożony przez $\frac{m-1}{2}$, to ieſt przez połowę wykładnika głoſki x w tymże poprzédzaiącym wyrazie. Podobnież ſpółczynnik $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$ czwartego wyrazu, znowu nieco innego ieſt, tylko ſpółczynnik $m.\frac{m-1}{2}$ wyrazu poprzédzaiącego rozmnożony przez $\frac{m-2}{3}$, to ieſt przez trzecią część wykładnika głoſki x w poprzédzaiącym wyrazie, i tak daléy. Te wſzyſtkie wnioſki, wynikaiące z ſamego wéyźrzenia na wyrazy ilości podnieſionéy do iakiegokolwiek ſtopnia m, prowadzą nas do téy reguły powſzechnéy: *że ſpółczynnik iednego któregokolwiek wyrazu, znayduie ſię, rozmnożywſzy ſpółczynnika poprzédzaiącego wyrazu przez wykładnika głoski x w tymże poprzédzaiącym wyrazie położonego, a mnogość wypadaiącą rozdzieliwſzy przez*

 licz.

liczbę wyrazów poprzédzaiących ten wy-ráz o który rzecz idzie.

Podnieśmy podług téy reguły *np.* do fiodme-go ftopnia ilość $x + a$. Mieć będziém $(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. To ieft pifzę naprzód x^7, potém mno-żę ten wyráz przez 7, zmniéyfzam wykładnika o iednę iedność, i wfzyftko mnożę znowu przez a, co mi da $7ax^6$.

Ten drugi wyráz mnożę przez $\frac{6}{2}$, zmniéyfzam wykładnika głofki x o iednę iedność, a odwrotnie wykładnika głofki a pomnażam o iednę iedność, i mam na trzeci wyráz $21a^2x^5$.

Daléy ten trzeci wyráz mnożę przez $\frac{5}{3}$, zmniéy-fzam wykładnika głofki x o iednę iedność, a powię-kfzam wykładnika głofki a także o iednę iedność, fkąd mi wypada na czwarty wyráz $35a^3x^4$; réfztę można łatwo dokończyć podobnymże fpofobém.

Gdyby zamiaft $x + a$ zadano było $x - a$; natenczas wyrazy doftawałyby na przemian znaki $+$ i $-$ poczynaiąc od piér-wfzego; bo ieżeli *np.* w a^4 położy fię $-a$ zamiaft $+a$, w tym razie znak nieodmiéni fię (24), odmiénilby fię zaś, gdyby fię położyło $-a$, w ftopniu nieparzyftym ilości a.

Taż fama dopiéro wyżéy podana for-muła flużyć może, nietyko do podniefié-nia do iakiegokolwiek ftopnia ilości pro-ftéy dwuflownéy iakoto $x + a$, ale téż choćby ta lub téy podobna ilość była w wyżfzym ftopniu zadana, *np.* $x^2 + a^2$ albo $x^3 + a^3$, i.t.d. a nawet podług téy formuły mo-

można podnieść ilość iakąkolwiek nietylko do takiego ftopnia któregoby wykładnik był liczbą całą twiérdzącą, ale téż choćby wykładnik był liczbą czyto twiérdzącą czy przéczącą, całą, czy ułamkową. Ale ta-kowe użycia wyciągaią, ażebyśmy nafzéy formule dali inakfzą poftać.

127. Powróćmy tedy do téy formu-ły $(x-a)^m = x^m + max^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}.a^2x^{m-2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.a^3x^{m-3}$ + i.t.d.

Podług tego co fię rzekło (119), można zamiaft x^{m-1}, napifać $\frac{x^m}{x}$, zamiaft x^{m-2}, napifać $\frac{x^m}{x^2}$, zamiaft x^{m-3}, napifać $\frac{x^m}{x^3}$: i tak daléy. Na tym fundamencie nafza formuła przemiéni fię w naftępuiącą,

$$(x+a)^m = x^m + \frac{max^m}{x} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{a^2x^m}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{a^3x^m}{x^3} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{a^4x^m}{x^4},\ \text{i. t. d.}$$

Teráz zaftanowiwfzy fię nad tém, że wfzyftkie wyrazy, maią x^m za fpólnego czyn-

czynnika, można będzie formule dać zno-
wu tę poſtać, $(x+a)^m = x^m\left(1 + \frac{ma}{x} +\right.$ $m.\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3} +$ i.t.d. gdzie rozumié ſię, że x^m mnoży wſzyſtkie wyrazy zamknięte między nawiaſami. A ſtąd wnoſi ſię reguła naſtępuiąca, ſłużąca do wygodnego złożenia rzędu wyrazów maiących ſkładać ſtopień m ilości dwuſłownéy $x+a$.

128. *Napiſz w piérwſzéy linii ilości iak naſtępuią.*

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \text{ i.t.d.}$$

$$1 + m.\frac{a}{x} + m.\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3}$$

$$+ m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}\frac{a^4}{x^4}, \text{ i.t.d.}$$

A napiſawſzy iedność poniżéy, i poſuniętą o iedno miéyſce w lewą ſtronę, ułożyſz ſpodni rząd naſtępuiącym ſpoſobém.

Rozmnóż tę iedność przez piérwſzy wyráz górnego rzędu i przez $\frac{a}{x}$, a miéć będzieſz drugi wyráz dólnego rzędu.

Rozmnóż ten drugi wyráz przez drugi wyráz górnego rzędu i znowu przez $\frac{a}{x}$, a miéć będzieſz trzeci wyráz dólnego rzędu.

Roz-

Rozmnóż ten trzeci wyráz przez trzeci wyráz górnego rzędu, i przez $\frac{a}{x}$, a miéć będzieſz czwarty wyráz dólnego rzędu, i tak daléy.

Doday razém wſzyſtkie wyrazy dólnego rzędu, ſummę ich rozmnóż przez x^m, a wypadek pokaże ci wártość ilości $(x+a)^m$.

129. Gdyby zamiaſt $x+a$ zadano było x^2+a^2, albo x^3+a^3, albo t.d.; natenczas zamiaſt mnożenia naſtępnego przez $\frac{a}{x}$, trzebaby mnożyć w piérwſzym przypadku przez $\frac{a^2}{x^2}$, w drugim przez $\frac{a^3}{x^3}$, a mówiąc w powſzechności trzebaby mnożyć przez drugi wyráz ilości dwuſłownéy, rozdzielony przez piérwſzy wyráz; ſumma zaś wſzyſtkich wyrazów powinna bydź rozmnożona w piérwſzym przypadku przez x^2 podnieſione do ſtopnia m, a w drugim przypadku przez x^3 podnieſione do ſtopnia m; to ieſt powiedziawſzy w powſzechności, przez piérwſzy wyráz ilości dwuſłownéy podnieſiony do zadanego ſtopnia.

Naoſtatek, gdyby drugi wyráz ilości dwuſłownéy zamiaſt znaku + miał znak —, w takim razie zamiaſt koléynego mno-

mnożenia przez $\frac{a}{x}$, kiedy była zadana iloś[ć] $x + a$, albo zamiaſt $\frac{a^2}{x^2}$, kiedy ilość zada[na] była $x^2 + a^2$, trzebaby koléyno mnoży[ć] przez $-\frac{a}{x}$, albo przez $-\frac{a^2}{x^2}$, i tak daléy.

Daymy *np.* że ieſt zadano podnieść do ſzóſte[go] ſtopnia ilość $x^3 + a^3$; poſtępuię ſobie iak wyżéy.

$$\begin{matrix} 6 & \frac{5}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{6} \end{matrix}$$

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}$$

To ieſt, że napiſawſzy piérwſzy rzęd $6, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}$, i. t. d. który odpowiada rzędowi $m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}$ i. t. d. tudzież napiſawſzy poniżéy iedność na piérwſz[y] wyráz drugiego rzędu, mnożę ten piérwſzy wyr[áz] przez piérwſzy wyráz 6 górnego rzędu i przez $\frac{a^3}{x^3}$, c[o] mi daie na drugi wyráz $\frac{6a^3}{x^3}$. Mnożę $\frac{6a^3}{x^3}$ przez dru[gi] wyráz $\frac{5}{2}$ górnego rzędu i przez $\frac{a^3}{x^3}$, ſkąd mam na trzeci wyráz $\frac{15a^6}{x^6}$, i. t. d. Nakoniec, mnożę ſummę wſzyſtkich wyrazów tym ſpoſobém wynalezionych przez x^3 podnieſione do ſzóſtego ſtopnia, to ieſt (96) przez x^{18}, i mam $x^{18} + \frac{6a^3x^{18}}{x^3} + \frac{15a^6x^{18}}{x^6} + \frac{20a^9x^{18}}{x^9} + \frac{15a^{12}x^{18}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}x^{18}}{x^{15}} + \frac{a^{18}x^{18}}{x^{18}}$, co wychodzi na $x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12} + 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}$.

130. Gdyby zamiaſt ilości dwuſłownéy, zadana była ilość trzyſłowna do podnieſienia do iakowego ſtopnia, *np.* gdyby trzeba było podnieść do trzeciego ſtopnia ilość $a + b + c$; możnaby ſobie zmyślić $b + c = m$, a natenczas ilością zadaną do podnieſiénia do trzeciego ſtopnia, byłoby $a + m$; a zatém podług reguł wyżéy przepiſanych wypadłoby $a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3$. Teráz zamiaſt m, położywſzy nazad onego wártość $b + c$, miéć będziém $a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$; gdzie ponieważ ilości $(b + c)$, $(b + c)^2$, $(b + c)^3$ ſą wſzyſtkie ſtopniami ilości dwuſłownéy, więc także łatwo dadzą ſię znaléśdź przez reguły poprzédzaiące, niezoſtanie więcéy tylko rozmnożyć ie przez odpowiadaiące wyrazy, iakoto przez $3a^2$, $3a$, i przez 1. Dokończywſzy tedy rachunku będzie, $a^3 + 3a^2b + 3ac^2 + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

O wyciąganiu Piérwiaſtków z ilości wielosłownych.

131. Umieiąc złożyć ſobie wſzyſtkie wyrazy z których ſkładać ſię ma iakikolwiek ſtopień zadany, ilości dwuſłownéy, nietrudno będzie wnieść ſobie ſtąd ſpoſób wyciągnienia piérwiaſtka ſtopnia zadanego, z iakiéykolwiek ilości bądźto literalnéy, bądźto liczebnéy. *Np.* gdyby potrzeba było wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy, znalezlibyśmy (co nam iuż ſkądinąd ieſt wiadomo), że kwadrat ſkłada ſię z kwadratu piérwſzego wyrazu ilości dwuſłownéy, z podwóyności piérwſzego wyrazu rozmnożonego przez drugi wyráz, i

i z kwadratu drugiego wyrazu. Więc rozporządziwſzy wſzyſtkie wyrazy, można odprawić działanie iak naſtępuie.

PRZYKŁAD I.

$$
\begin{array}{l|l}
36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \text{ Piérwiaſtek} \\
-36a^2 & 12a + 5b \\
\hline
+60ab + 25b^2 & \\
-60ab - 25b^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Biorę kwadratowy piérwiaſtek piérwſzego wyrazu $36a^2$, którym ſą $6a$, i piſzę go obok ilości zadanéy.

Kwadruię ten piérwiaſtek i kwadrat iego $36a^2$ piſzę pod piérwſzym wyrazém z przydanym znakiém — dla odięcia. Po uczynioném zebraniu zoſtaie $+ 60ab$ $25b^2$.

Pod piérwiaſtkiém $6a$ piſzę podwóyność iego to ieſt $12a$, która mi ſłużyć ma do rozdzielenia piérwſzego wyrazu $60ab$ pozoſtałéy ilości $60ab + 25b^2$. Znayduię wieloráz $+ 5b$, który dodaię do piérwiaſtka $6a$, i mam na ſzukany piérwiaſtek $6a + 5b$; lecz dla ſprawdzenia tego działania, przypiſuię także tenże dopiéro wynaleziony wieloráz do $12a$, i całą ſummę $12a + 5b$ mnożę przez tenże ſam wieloráz $5b$, a wypadaiące mnogości z tego mnożenia koléyno przenoſzę pod ilość $60ab + 25b^2$, nieprzepominaiąc o przemianie znaków należących tym mnogościóm; po uczynioném zebraniu nic mi nie zoſtaie; ſkąd wnoſzę że piérwiaſtek kwadratowy $6a + 5b$, ieſt doſkonałym piérwiaſtkiém ilości $36a^2$ $+ 60ab + b^2$.

Obierzmy ſobie na drugi przykład tę ilość $4b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Roſporządziwſzy tę ilość względém głoſki a, mieć będę.

PRZY-

PRZYKŁAD II.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 4a^2\ 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & \text{Piérwiaſtek } 2a - 3b + 4c \\
 & -4a^2 & \\
\hline
1a \text{ Reſz.} & -12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & 4a - 3b \\
 & +12ab \qquad -9b^2 & 4a - 6b + 4c \\
\hline
2ga \text{ Reſz.} & +16ac \qquad -24bc + 16c^2 & \\
 & -16ac \qquad +24bc - 16c^2 & \\
\hline
\text{Oſtatnia Reſzta} & - \ - \ - \ - \quad 0 &
\end{array}
$$

Wyciągam piérwiaſtek kwadratowy z ilości $4a^2$, którym ſą $2a$, piſzę ie na boku, kwadruię $2a$, i kwadrat $4a^2$ piſzę z znakiém przeciwnym pod $4a^2$; po zebraniu zoſtaie mi ſię $- 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$.

Poniżéy piérwiaſtka $2a$, piſzę podwóyność iego $4a$, która mi ſłużyć ma za dziélnika piérwſzego wyrazu $-12ab$ pozoſtałéy reſzty; dzieląc, znayduię wieloráz $-3b$ który dopiſuię do piérwſzego wyrazu piérwiaſtka $2a$; przypiſuię go także obok podwóyności $4a$, i takową całość $4a - 3b$ rozmnażam przez tenże wieloráz $-3b$, napiſawſzy mnogości wypadaiące pod reſztą $-12ab + 16ac$, i. t. d. z znakami przeciwnémi, po zebraniu zoſtanie mi na drugą reſztę $+ 16ac - 24bc + 16c^2$.

Teráz uważam dwa wyrazy piérwiaſtka $2a - 3b$ iakby ſkładały tylko iednę ilość; biorę podwóyność téy ilości i piſzę ią poniżéy, iako maiącą mi ſłużyć za dziélnika drugiéy reſzty; lecz w wykonaniu tego dzielenia, przeſtaię (podług tego co ſię rzekło (36), na rozdzieléniu piérwſzego wyrazu $+ 16ac$ przez piérwſzy wyráz $+ 4a$ mego dziélnika; znayduię na wieloráz $+ 4c$, które przypiſuię do przeſzłego piérwiaſtka $2a - 3b$, i oráz do podwóyności $4a - 6b$: tę oſtatnią ſummę $4a - 6b + 4c$, rozmnażam przez nowo wynaleziony wyráz piérwiaſtka $+ 4c$; a mnogości koléyno wypadaiące wzięte z przeciwnémi znakami piſzę pod drugą reſztą; po

od-

odprawionem odięciu nic mi niezoftaie. Skąd wno-fzę że wynaleziony piérwiaftek, ieft piérwiaftkiém dofkonałym.

Z tego co powiémy záraz niżéy o piérwiaftku piątym, łatwo można zroz... miéć iakby fobie trzeba poftąpić w i... fzych ftopniach.

Podług formuły przepifanéy do pod... niefiénia iakiéykolwiek ilości dwufłown... do zadanego ftopnia, piąty ftopień iloś... $a+b$, wypada $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3$ $+5ab^4+b^5$. Z tych fześciu wyrazów d... fyć nam ieft na dwóch piérwfzych, do uft... nowiénia fobie reguły którey fzukamy.

Piérwfzym wyrazém ieft piąty fto... pień piérwfzego wyrazu ilości dwufło... wnéy, a drugim wyrazèm ieft czwarty ftopień tegóż piérwfzego wyrazu pięć ra... zy wzięty, i rozmnożony przez drug... wyráz; więc ażeby miéć piérwfzy wyrá... piérwiaftka, trzeba po rofporządzeni... wfzyftkich wyrazów ftopnia zadanego wyciągnąć piąty piérwiaftek, z piérwfze... go wyrazu tego ftopnia; żeby zaś miéć drugi wyráz piérwiaftka, trzeba rozdzie... lić drugi wyráz ilości zadanéy, przez czwarty ftopień pięć razy powtórzony piérwiaftka wynalezionego w poprzedza... iącém działaniu. Jakóż rzecz oczywifta ...e

że piérwiaftkiém piątym ilości a^5 ieft a, to ieft piérwfzy wyráz ilości dwufłownéy, którey ilość a^5+5a^4b+ i.t.d. ieft piątym ftopniém; niemniéy także ieft oczywifta, że $\frac{5a^4b}{5a^4}$ daie b, które ieft drugim wyrazém téyże ilości dwufłownéy. Ale ponieważ mogłoby przytrafić fię, iż zadana ilość niebyłaby dofkonałym piątym ftopniém, przeto znalazłfzy dopiéro opifanym fpofobém drugi wyráz piérwiaftka, trzeba fprawdzić takowy piérwiaftek, podnofząc go do piątego ftopnia, a potém odéymuiąc wypadek od ilości zadanéy. Zobaczmy to w przykładzie.

Niechay będzie zadano wyciągnąć piérwiaftek piąty z ilości:

$$\begin{array}{l|l}
32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & \text{Piérwiaftek} \\
-32a^5 & 2a+3b \\
\hline
\text{Refzta } +240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3 & \\
\qquad +810ab^4+243b^5 & 80a^4
\end{array}$$

Wyciągam piąty piérwiaftek z ilości $32a^5$, i mam $2a$, które pifzę na fwoiém miéyfcu.

Podnofzę $2a$ do piątego ftopnia, a wypadek $32a^5$ pifzę z znakiém przeciwnym, pod piérwfzém wyrazém $32a^5$ ilości zadanéy, tym fpofobém po odięciu, piérwfzy wyráz zoftanie wyrugówany.

Podnofzę piérwiaftek $2a$ do czwartego ftopnia, co mi daie $16a^4$, które wziąwfzy pięć razy, mam $80a^4$ i pifzę ie pod piérwiaftkiém $2a$; tych $80a^4$ używam do rozdzielenia piérwfzego wyrazu refzty, to ieft $240a^4b$; po rozdzieleniu wypada mi wieloráz $3b$, który przypifuię do piérwiaftka; tak iż cały ſzukany piérwiaſtek będzie $2a + 3b$. Ale żeby go ſprawdzić, podnoſzę $2a + 3b$ do piątego ſtopnia, i znayduię też ſame wyrazy które miałém w ilości zadanéy, po odprawioném odięciu nic mi nie zoſtaie, ſkąd wnoſzę, że $2a + 3b$ ſą doſkonałym piérwiaſtkiém piątym ilości zadanéy.

Gdyby w piérwiaſtku miał ſię znaydówać ieſzcze ieden wyráz więcéy, natenczas po tém piérwſzém działaniu zoſtałaby ſię reſzta; w takim razie wynaleziony piérwiaſtek $2a + 3b$ poczytałbym iakoby za iednę ilość, i dla wynaleziénia trzeciego wyrazu, odprawiłbym z nią też ſame działania, które oprawiłem z ilością $2a$, dla znaleziénia drugiego wyrazu.

132. Co ſię tyczé ilościów liczébnych, reguła do nich ſłużyć będzie zgoła także ſama co do literalnych; to tylko trzeba obiaśnić, iakim ſpoſobém poznać co w zadanéy liczbie ma odpowiadać piérwſzemu wyrazowi a^5, a co drugiému wyrazowi $5a^4b$.

Zeby ułatwić tę trudność, nietrzeba tylko zmyślić ſobie, że w ilości dwuſłownéy $a + b$, a znaczy dzieſiątki a b iedności; natenczas iawna ieſt że a^5 wyrażać będzie ſta tyſiąców, bo piąty ſtopién dzieſięciu czyni 100000; więc piérwſzy wyráz a^5 albo ilość z którèy ma bydź wyciągniony piérwiaſtek piąty, dla wynaleziénia piérwſzéy cyfry piérwiaſtka, niémoże mieścić ſię w pięciu oſtatnich cyfrach po prawéy ręce, trzeba tedy oddzielić te oſtatnie

tnie pięć cyfer, a tych co zoſtaną po lewèy ręce, (daymy, że ich będzie pięć albo mniéy iak pięć), trzeba ſzukać piątego piérwiaſtka, który łatwo da ſię wynaléśdź, bo niemoże ſkładać ſię tylko z iednéy cyfry.

Znalazłſzy piérwſzą cyfrę piérwiaſtka, i ~~onéy~~ piąty ſtopién odiąwſzy od ilości która ſłużyła do znaleziénia takowego piérwiaſtka, trzeba obok pozoſtałéy reſzty ſpuścić oddzielone pięć cyfer. Zeby zaś mieć tę część co ma bydź rozdzielona przez $5a^4$, to ieſt przez czwarty ſtopién wynalezionych dzieſiątków powtórzony pięć razy, trzeba oddzielić cztèry cyfry po prawéy ręce, i niedzielić tylko część pozoſtałą po lewéy ręce: albowiém $5a^4b$, to ieſt ilość, która ma bydź rozdzielona przez $5a^4$ żeby mieć b, niémoże zawiérać ſię w cztèrech oſtatnich cyfrach, bo będąc mnogością z $5a^4$ przez b, powinna miéć w ſobie przynaymniéy dzieſiątki tyſiąców, kiedy ſamo tylko a^4 iuż daie dzieſiątki tyſiąców.

To na przód założywſzy, wyciągnienie piérwiaſtka liczebnego, odprawi ſię w tenże ſpoſób co piérwiaſtka literalnego.

Np. gdyby zadano było wyciągnąć piąty piérwiaſtek z naſtępuiącéy ilości.

 3802

3802,04032 [52
3125
———
6770,4032
3125
380204032
———
0

Oddziélam naprzód pięć oſtatnie cyfry 04032, i ſzukam piątego piérwiaſtka ilości 3802, która zawiéraiąc w ſobie mniéy iak pięć cyfer, niemoże dać na piérwiaſtek tylko iednę cyfrę; takowym piérwiaſtkiém będą 5 które piſzę na boku.

Podnoſzę tę 5 do piątego ſtopnia, a wypadek piſzę pod 3802 dla odięcia, po którém zoſtanie mi ſię 677; obok tych 677 ſpuſzczam owe pięć cyfry z początku oddzielone, a od tego wſzyſtkiego odłączam cztéry cyfry po prawéy ręce i część pozoſtałą 6770 dzielę przez czwarty ſtopień wynalezionego piérwiaſtka 5 powtórzony pięć razy, to ieſt przez 5 razy 625, albo przez 3125. Znayduię na wieloráz 2, które przypiſuię obok piérwſzéy wynalezionéy cyfry 5. Zeby zaś ſprawdzić ten piérwiaſtek 52, podnoſzę go do piątego ſtopnia i znayduię tęż ſamę liczbę która była zadana; ſkąd wnoſzę że 52 ſą doſkonałym piérwiaſtkiém.

Gdyby ſię zoſtała reſzta, i gdyby potrzeba było piérwiaſtka doſkonaléy przybliżonego, trzebaby obok reſzty dopiſać pięć zerów. i z wynaleziéniém trzeciéy cyfry, która iuż byłaby dzieſiątną, poſtąpić ſobie tak iak ſię uczyniło z wynaleziéniém drugiéy.

W powſzechności, żeby wyciągnąć piérwiaſtek iakiegokolwiek ſtopnia m, trzeba (poczynaiąc od prawèy ku lewèy) porobić przedziały, każdy zawiéraiący w ſobie m cyfer, oprócz oſtatniego po lewèy ręce, który może miéć w ſobie i mniéy cyfer. Potèm z tego oſtatniego przedziału wyciąga ſię piérwiaſtek ſtopnia m, niezawiéraiący w ſobie nigdy więcéy nad iednę cyfrę; obok reſzty ſpuſzcza ſię naſtępuiący przedział, i po prawèy ręce iego oddziéla ſię $m-1$ cyfer, część zaś pozoſtała po lewèy ręce, dzieli ſię przez piérwiaſtek wynaleziony, m razy powtórzony, i podnieſiony do ſtopnia $m-1$; i tak daléy. Takowy dopiéro przepiſany ſpoſób zaſadza ſię na tèm, że dwa piérwſze wyrazy ilości dwuſłownèy $a+b$ podnieſionéy do iakiegokolwiek ſtopnia m, ſą $a^m + ma^{m-1}b$, i że ieżeli a wyraża dzieſiątki, a b iedności, a^m niémoże zawiérać ſię w liczbie m oſtatnich cyfer, iako tèż znowu $ma^{m-1}b$, niémoże zawiérać ſię w liczbie $m-1$ oſtatnich cyfer.

O ſpoſobie przybliżenia ſię do piérwiaſtka ſtopniów niedoſkonałych ilościów literalnych.

133. Kiedy ilość zadana wielosłowna, nieieſt doſkonałym ſtopniém tego wynieſiénia, iaki ma bydź piérwiaſtek wyciągniony, to tèż niémożna ſpodziéwać ſię i piérwiaſtka doſkonałego; trzeba tylko przeſtać na ſamèm przybliżeniu tak daleko pociągnionèm, iak zagadniénie wy-

wyciągać będzie. W takowém przybliżeniu możnaby ſobie poſtąpić tymże ſamym ſpoſobém który dopiéró podaliśmy do ſtopniów doſkonałych: dzieląc podług niego wypadłby rzęd wyrażów ułamkowych, których wártość coráz ubywaiąca pozwala przeſtać na pewnéy liczbie wyrazów, reſztę zaniedbawſzy: lecz takowe działanie byłoby długie i bardzo żmudne. Można tedy dóyśdź tegóż ſamego wypadku daleko krótſzą drogą, przy pomocy reguły wyżéy podanéy (128) do podnieſiénia ilości dwuſłownéy do ſtopnia zadanego. Tym końcém należy ſobie przypomniéć (109), że każdy piérwiaſtek, może bydź wyrażony w poſtaci ſtopnia ułamkowego. I tak ſzukać piérwiaſtka kwadratowego ilości $a+b$, albo ſzukać wártości tego wyrażenia $\sqrt{(a+b)}$, ieſt to podniéść ilość $a+b$ do ſtopnia $\frac{1}{2}$; albowiém (109), $(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(a+b)}$.

A zatém podług reguły wyżéy danéy (128), piſzę rzęd naſtępuiący

$$\tfrac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \text{i. t. d.}$$

który wychodzi na $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{10}$, i. t. d.

A położywſzy 1 na piérwſzy wyráz drugiego rzędu, ſkładam takowy drugi rzęd iak naſtępuie.

$$1+\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}-\tfrac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\tfrac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\tfrac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\tfrac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5},\ \text{i.t.d.}$$

Mnożę piérwſzy wyráz 1, przez piérwſzy wyráz $\frac{1}{2}$ piérwſzégo rzędu, i przez $\frac{b}{a}$, to ieſt przez

drugi wyráz ilości dwuſłownéy $a+b$, rozdzielony przez piérwſzy wyráz; i mam na drugi wyráz $\frac{1}{2}\frac{b}{a}$.

Trzeci wyraz ſkładam, mnożąc poprzédzaiący drugi wyráz przez drugi wyráz $-\frac{1}{4}$ piérwſzego rzędu i przez $\frac{b}{a}$, co mi da trzeci wyráz $-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$.

Dla znaleziénia czwartego wyrazu, mnożę ten trzeci wyráz przez trzeci wyráz $-\frac{1}{2}$ piérwſzego rzędu i przez $\frac{b}{a}$, ſkąd mam na czwárty wyráz $\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}$, i tak daléy.

Naoſtatek te wſzyſtkie wyrazy mnożę przez piérwſzy wyráz ilości dwuſłownéy podnieſiony do ſtopnia $\frac{1}{2}$, i mam na wártość wyrażenia $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ albo $\sqrt{(a+b)}$, naſtępuiącą ilóść:

$$a^{\frac{1}{2}}\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}-\tfrac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}-\tfrac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\tfrac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\tfrac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5},\right.$$

i. t. d.), którą łatwo będzie pociągnąć ſobie iak daleko potrzeba wyciąga.

Zobaczymy w dalſzym przeciągu, użycia takowych przybliżeń; teráz zaś przeſtaniémy tylko na pokazaniu w przykładzie, iak można przybliżyć ſię do piérwiaſtka ilościów liczebnych. Daymy że ma bydź wyciągniony, piérwiaſtek kwadratowy z liczby 101. Dzielę 101 na dwie części, z których iedna byłaby doſkonałym ile można naywiękſzym kwadratém, *np.* na takowe dwie części 100 i 1. Biorę piérwſzą część za a a drugą za b, to ieſt rozumiém bydź $a=100$, a $b=1$; a zatém będzie $a^{\frac{1}{2}}=(100)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$; zaś $\frac{b}{a}=\frac{1}{100}=0{,}01$; więc rzęd daiący wártość wyrażenia $\sqrt{(a+b)}$, to ieſt w ninieyſzym przykładzie $\sqrt{101}$, położywſzy zamiaſt $a^{\frac{1}{2}}$ i $\frac{b}{a}$ onych wártości, odmiéni ſię w rzęd naſtępuiący.

$10\left(1+\frac{0,01}{2}-\frac{(0,01)^2}{8}+\frac{(0,01)^3}{16}-\frac{5(0,01)^4}{128}\right.$ ...

$\frac{35(0,01)^5}{1280}$, i. t. d.

Daymy że chcielibyśmy mieć ten pierwiaſ... przybliżony, tylko o chybienie iedney dzieſięć t... ſiączney; w takim razie doſyć będzie wziąść pie... wſze trzy wyrazy, bo czwárty wyráz $\frac{(0,01)^3}{16}$ wych... dzi na $\frac{0.000001}{16}$, to ieſt na 0,0000000625; a lubo m... bydź ieſzcze rozmnożony przez 10, które mno... wſzyſtkie wyrazy złożonego rzędu, atoli i ty... ſpoſobem nieuczyni więcey nad 0,000000625, t... ieſt że czwarty wyráz już będzie wyrażony w... daleko mnieyſzych częściach iak w dzieſięć tyſią... cznych. Naſtępuiące zaś wyrazy będą ieſzcze tém... niżſze, gdyż maiąc bydź koleyno mnożone prze... 0,01 to ieſt przez ułamek, muſzą ſię co ráz umniey... ſzać; albowiém mnożąc przez ułamek, niebierze ſię... cały mnożny ale tylko część iego.

Wártość tedy ilości $\sqrt{101}$, wychodzi na $10\left(1+\frac{0,01}{2}-\frac{(0,01)^2}{8}\right)$, to ieſt na 10 (1 + 0,005 − 0,0000125), albo na 10 × 1,0049875. albo 10,049875; to ieſt 10,0499, przeſtaiąc na ſamych dzieſięć tyſiącznych.

Ten ſpoſób może bydź przyſtóſowany do pierwiaſtków i ilościów wſzelkiego gatunku; obierzmy ſobie tedy na drugi przykład ilość, $\sqrt[5]{(a^5-x^5)}$. To wyrażenie przemieniam, na $(a^5-x^5)^{\frac{1}{5}}$ i poſtępuiąc ſobie iak wyżey, piſzę

$\frac{1}{5}, \frac{\frac{1}{5}-1}{2}, \frac{\frac{1}{5}-2}{3}, \frac{\frac{1}{5}-3}{4}, \frac{\frac{1}{5}-4}{5}$, i. t. d.

albo $\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{19}{25}$, i. t. d.

Położywſzy 1 na pierwſzy wyráz drugiego rzędu, ſkładam daley tenże drugi rzęd iak naſtępuie.

1

$1-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}-\frac{2}{25}\frac{x^{10}}{a^{10}}-\frac{6}{125}\frac{x^{15}}{a^{15}}-\frac{42}{1250}\frac{x^{20}}{a^{20}}-\frac{798}{31250}\frac{x^{25}}{a^{25}}$, i. t. d.

Mnożę pierwſzy wyráz 1, przez pierwſzy wyráz $\frac{1}{5}$ górnego rzędu i przez $\frac{x^5}{a^5}$, to ieſt przez drugi wyráz ilości dwuſtowney rozdzielony przez pierwſzy wyráz, co mi da na drugi wyráz rzędu, $-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}$.

Zeby mieć trzeci wyráz, mnożę wyráz poprzedzaiący, przez drugi wyráz $-\frac{2}{5}$ górnego rzędu, i przez $-\frac{x^5}{a^5}$, co mi da $\frac{-2x^{10}}{25a^{10}}$.

Tymże ſamym ſpoſobem wyrachówawſzy dalſze wyrazy aż do ſzóſtego, a potém wſzyſtkie rozmnożywſzy przez pierwſzy wyráz a^5 ilości dwuſtowney podnieſiony do ſtopnia $\frac{1}{5}$, to ieſt, (96), przez $a^{5\times\frac{1}{5}}$ albo przez a, mieć będę na wártość przybliżoną wyrazu $\sqrt[5]{(a^5-x^5)}$, naſtępuiącą ilość:

$$a\left(1-\frac{x^5}{5a^5}-\frac{2x^{10}}{25a^{10}}-\frac{6x^{15}}{125a^{15}}-\frac{42x^{20}}{1250a^{20}}, \text{i.t.d.}\right).$$

134. Uważmy względem tego rzędu, i względem wſzelkich innych które mogą bydź złożone tymże ſpoſobem, że na pierwſzy wyráz ilości zadaney, zawſze brać trzeba większy wyráz; *np.* w ilości $\sqrt{(a+b)}$, wzięliśmy byli a na pierwſzy wyráz, ale gdyby b było większe nad a, to na pierwſzy wyráz należałoby było wziąść b. Przyczyna tego ieſt ta, że kiedy b ieſt wię-

większe nad a, piérwszy rzęd $a^{\frac{1}{2}}$ (1 $\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ i. t. d.) może bydź omylny; w takim razie $\frac{b}{a}$ będąc ilością większą iedność, następuiące wyrazy, które ko[...] no wszystkie maią bydź mnożone prz[...] $\frac{b}{a}$, wypadaią coráz większe, tak iż po zł[...] żeniu pewnéy liczby wyrazów, niéma ż[...] dnéy przyczyny zastanowić się. Ale i[...] żeli w tymże przypadku, do złożen[...] rzędu wezmiémy b na piérwszy wyráz, mieć będziém $b^{\frac{1}{2}}$ $(1+\frac{1}{2}\frac{a}{b}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}$, i. t. d.) gdzie wyrazy iedne po drugich wypadaią coráz mniéysze.

Rzędy których wyrazy tèm bardziéy rosną, im bardziéy oddalaią się od początku, nazywaią się *rzędy rosnące* (series di[...] vergentes), odwrotnie zaś nazywaią się *rzędy ubywaiące* (series convergentes), których wyrazy maią coráz tém mniéysza wártość, im bardziéy oddalaią się od początku.

135. Widzieliśmy wyżéy (118), że każdy ułamek Algebraiczny może bydź wyrażony w postaci całkowitki, przestawiwszy mianownika do licznika z wykła- dni-

dnikiém przéczącym. Ta uwaga, podaie nam sposób do ułożenia w rzęd wszelkiego ułamka, któregoby mianownik był ilością wielosłowną; co nam będzie pożytecznie służyć w dalszym przeciągu.

Np. gdybym miał $\frac{a^2}{a^2-x^2}$; zamiast téy ilości piszę $a^2\times(a^2-x^2)^{-1}$; a potém ilość a^2-x^2 podnoszę do stopnia -1, podług reguły danéy (128), to iest, układam sobie naprzód piérwszy rzęd, -1, $\frac{-1-1}{2}$, $\frac{-1-2}{3}$, $\frac{-1-3}{4}$, i. t. d. co się przemienia na $-1, -1, -1, -1$. Potém składam drugi rzęd iak następuie.

$$1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \text{ i. t. d,}$$

To iest, mnożę piérwszy wyraz 1. tego dólnego rzędu, przez piérwszy wyráz -1 górnego rzędu i przez $-\frac{x^2}{a^2}$, co mi da $+\frac{x^2}{a^2}$; ten wyráz dopiéro wynaleziony mnożę przez drugi wyráz -1 górnego rzędu, i przez $-\frac{x^2}{a^2}$, i tak daléy. Naostatek wszystkie wyrazy mnożę przez piérwszy wyráz a^2 podniesiony do stopnia -1, to iest (96), przez $a^{2\times-1}$; albo przez a^{-2}, skąd mi wypada

$$a^{-2}(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \text{ i. t. d.})$$

na wártóść ilości $(a^2-x^2)^{-1}$; więc żeby mieć wártość ilości $a^2(a^2-x^2)^{-1}$, nietrzeba więcéy tylko poprzédzaiący rzęd rozmnożyć przez a^2. Lecz że $a^2\times a^{-2}$ daie a^{2-2}, albo a^0, co iest wárto 1, przeto będzie $a^2(a^2-x^2)^{-1}=$

$$1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \text{ i. t, d.}$$

Tymże ſpoſobém poſtąpićby ſobie potrzeba, chcąc ułożyć w rzęd, ilość $\frac{a^2}{a^2+x^2}$; albowiém możnaby napiſać w téy poſtaci $a^2(a^2+x^2)^{-1}$. Podobnie zamiaſt $\frac{a^2}{\sqrt[5]{(a^2+x^2)^3}}$, można naprzód napiſać $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{5}}}$, a potém $a^2(a^2+x^2)^{-\frac{3}{5}}$. Toż rozumié ſię o innych.

O Zrównaniach z dwiema niewiadomémi kiedy przechodzą piérwſzy ſtopień.

136. Zrównanie z iedną niewiadomą, nazywa ſię bydź trzeciego, czwartego, piątego, i. t. d. ſtopnia, kiedy naywyżſzy ſtopień niewiadoméy ieſt trzeci, czwarty, piąty, i. t. d. ale oprócz tego naywyżſzego ſtopnia, zrównanie może ieſzcze zawiérać w ſobie wſzyſtkie inſze niżſze ſtopnie.

I tak $x^3=8$, $x^3+5x^2=4$, $x^3+6x^2-9x=7$, ſą trzy zrównania, wſzyſtkie trzeciego ſtopnia.

Zrównanie z dwiéma albo z większą liczbą niewiadomych, mówi ſię że przechodzi piérwſzy ſtopień, nietylko w ten czas kiedy iedna z niewiadomych przechodzi piérwſzy ſtopień, ale też kiedy niektóre z tych niewiadomych ſą rozmnożone iedna przez drugą; w powſzechności zaś ſtopień zrównania zawiſł, od naywię-

większéy ſummy iaką czynią wykładniki znayduiące ſię w iednymże wyrazie.

I tak zrównanie $x^3+y^3=a^2b$, ieſt trzeciego ſtopnia; zrównanie $bx^2+x^2y+ay^2=ab^2$ ieſt także trzeciego ſtopnia; bo ſumma którą daią wykładniki głoſek x i y, położone w wyrazie x^2y, czyni 3; w inſzych wyrazach iuż wykładniki ſą mniéyſze.

137. Żeby rozwiązać zagadniénia prowadzące do zrównań przechodzących piérwſzy ſtopień z wielą niewiadomèmi, trzeba iak w zrówaniach piérwſzego ſtopnia, tak ie rugówać po iednemu, żeby niezoſtało tylko iedno zrownanie i iedna niewiadoma.

Jeżeli będą dwa zrównania i dwie niewiadome, i ieżeli oráz w iedném z tych zrównań iedna z niewiadomych nieprzechodzi piérwſzego ſtopnia: *Weźmiy w tém zrównaniu wártość téy niewiadoméy, i takową połóż w drugiém zrównaniu; tym ſpoſobém miéć będzieſz iuż tylko iedno zrównanie i iednę niewiadomą.*

Np. gdyby trzeba było rozwiązać to zagadnienie: *Znaléśdź dwie liczby takie, których ſumma czyniłaby* 12, *a mnogość z nich żeby czyniła* 35. Oznaczywſzy te dwie liczby przez x i przez y, miéć będę $x+y=12$ i $xy=35$.

Z piérwſzego zrównania wyciągam $x=12-y$; tę wártość położywſzy w drugiém zrównaniu zamiaſt x, mam $(12-y)y=35$, albo $12y-yy=35$; zrównanie drugiego ſtopnia, które będąc rozwiązane podług reguł wyżéy przepiſanych (87 i daléy), da

da $y = 6 \pm 1$, to ieſt $y = 7$ albo $y = 5$; a poniew
$x = 12 - y$, więc będzie $x = 5$ albo $x = 7$, to ie
że dwie liczby ſzukane ſą 5 i 7, albo 7 i 5.

Podobnież gdybym miał te dwa zrówna
$x + 3y = 6$ i $x^2 + y^2 = 12$; z piérwſzego wyciąg
$x = 6 - 3y$, a położywſzy tę wártość w drugié
zrównaniu, mam $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; odprawiwſz
wſkazane działanie, będzie $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 1$
albo po przeſtawiéniu wſzyſtkiego do iednéy czę
i po zebraniu, $10y^2 - 36y + 24 = 0$; zrównanie dr
giego ſtopnia, które rozwięzuie ſię podług reg
wyżéy podanych (87 i daléy).

Obiérzmy ſobie ieſzcze na trzeci przykład
dwa zrównania, $xy + y^2 = 5$ i $x^3 + x^2y = y^2 +$
Z piérwſzego wyciągam $x = \frac{5 - y^2}{y}$, a położywſz
tę wártość w drugiém zrównaniu, mam $(\frac{5-y^2}{y})$
$+ (\frac{5 - y^2}{y})^2 y = y^2 + 7$; co po odprawieniu wſk
zanych działań i po zwyczayném zebraniu, prz
miénia ſię na $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$
zrównanie, w którém nieznayduie ſię już tylko ie
dna niewiadoma y, ale która ieſt piątego ſtopnia.

138. *Jeżeli w zrównaniu które ie niżſzego ſtopnia, iedna z niewiadomych nie przechodzi drugiego ſtopnia; weźmiy w takowém zrównaniu wártość kwadratu niewiadoméy maiącéy naymniéyſzego wykładnika, i połóż tę wártość w drugiém zrównaniu zamiaſt kwadratu téyże niewiadoméy i innych ſtopniów onéyże, i tym ſpoſobém daléy póty ſobie poſtępuy, póki ta niewiadoma nieznaydzie ſię bydź w piérwſzym ſtopniu. Natenczas z takowego oſtatniego zrównania wyciągniy wártość téyże niewiadoméy, i połóż ią w zrównaniu które ieſt niżſzego ſtopnia.*

Np. gdybym miał te dwa zrównania, $x^2 + 3y^2 = 6x$ i $2x^3 - 3y^2 = 8$; wyciągam z piérwſzego zrównania wártość ilości x^2, która ieſt $x^2 = 6x - 3y^2$; tę wártość położywſzy w drugiém zrównaniu (i dawſzy baczenie na to że $x^3 = x^2 \times x$), będzie $2(6x - 3y^2)x - 3y^2 = 8$, co wychodzi na $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$. A że w tém zrównaniu ieſzcze znayduie ſię x^2, przeto kładę w niém znowu tęż wártość ilosci x^2 co wyżéy, i mam $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$; zrównanie, w którèm x iuż tylko w piérwſzém ſtopniu znayduie ſię bydź położone.

Wyciągam tedy z niego wártość głoſki x, i mam $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$; tę wártość położywſzy w piérwſzém zrównaniu $x^2 + 3y^2 = 6x$, wypada mi $(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2})^2 + 3y^2 = 6(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2})$ albo $\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2} + 3y^2 = \frac{234y^2 + 48}{72 - 6y^2}$ albo $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)$; zrównanie, w którém niepozoſtaie tylko odprawić wſkazane mnożenia, i uczynić zebranie.

O Zrównaniach o dwu wyrazach.

139. Nazywaią ſię *Zrównania o dwu wyrazach*, te w które niewchodzi więcéy tylko ieden ſtopień niewiadoméy; dla tego że zawſze mogą bydź przyprowadzone tylko do dwu wyrazów.

Np.

Np. Zrównanie $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, ieſt zrównanie o dwu wyrazach; bo napiſawſzy go w téy poſtaci $(a + b)\,x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, iawna ieſt, iż a i b będąc ilościami wiadomémi, można $a + b$ wyrazić tylko w iednéy ilości, i $a^4b^2 - a^3b^3$ podobnież w iednéy ilości, tak iż poprzédzaiące zrównanie może bydź odmiénione w naſtępuiące, $px^5 = q$.

Takowe zrównania ſą bardzo łatwe do rozwiązania; albowiém iawna ieſt, że oſwobodziwſzy ſtopień niewiadoméy przez też ſame reguły co w innych zrównaniach, niezoſtanie więcéy do czyniénia, tylko wyciągnąć piérwiaſtek ſtopnia oznaczonego przez wykładnika niewiadoméy.

Np. zrównanie $px^5 = q$, da mi $x^5 = \frac{q}{p}$, a po wyciągnieniu piątego piérwiaſtka, będzie $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

140. Kiedy wykładnik ieſt nieparzyſty, to niémoże bydź nigdy więcéy tylko iedna wártość rzetelna.

Np. gdyby było dane takie zrównanie, $x^5 = 1024$, wypadłoby $x = \sqrt[5]{1024} = 4$; iawna zaś ieſt, że niéma tylko iedna taka liczba, która podnieſiona do piątego ſtopnia mogłaby nazad oddać 1024.

Gdyby druga część zrównania miała znak —, wártość ilości x miałaby także znak —; bo — rozmnożone przez — liczbę razy nieparzyſtą, daie —; ale kiedy wykładnik będzie parzyſty, niewiadoma miéć

miéć będzie dwie wártości, które mogą bydź albo obie rzetelne albo też obie tylko zmyślone. Ten drugi przypadek prawdzi ſię w ten czas, kiedy druga część zrównania ma znak —.

Maiąc zrównanie $x^4 = 625$, wnoſi ſię $x = \sqrt[4]{625} = 5$; ale że — rozmnożone przez — liczbę razy parzyſtą, daie tenże ſam wypadek co rozmnożone przez +, więc — 5 może tak dobrze uczynić zadość zagadniéniu iak + 5; a zatém należy piſać $x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5$, iak w zrównaniach drugiego ſtopnia. Gdyby zaś przeciwnym ſpoſobém dane było $x^4 = -625$, wnioſłoby ſię ſtąd $x = \pm\sqrt[4]{(-625)}$; ale te dwie wártości ſą tylko zmyślone; bo niéma żadnéy takiéy liczby ani twiérdzącéy ani przéczącéy, która będąc rozmnożona ſama przez ſię libzbę razy parzyſtą, mogłaby dać na wypadek ilość przéczącą.

Przyſtóſuymy te zrównania do rozwiązania iakiego zagadniénia: *Daymy że trżeba znaléśdź dwie śrzednie proporcyonalne między* 5 *i* 625. Oznaczywſzy te dwie niewiadome przez x i y, będzie $\div 5 : x : y : 625$, ſkąd wypedaią naſtępuiące proporcye.

$$5 : x :: x : y$$
$$\text{i } x : y :: y : 625.$$

Z tych dwóch proporcyi, po rozmnożeniu między ſobą ſkraynych i śrzednich wyrazów, zrobią ſię te dwa zrównania, $5y = x^2$, i $625x = y^2$. Z piérwſzego wyciągnąwſzy $y = \frac{x^2}{5}$, i wártość iego położywſzy w drugiém zrównaniu, będzie $625x = \frac{x^4}{25}$; rozdzieliwſzy przez x, a rozmnożywſzy przez 25, będzie znowu $x^3 = 15625$, a naoſtatek $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; więc $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

O Zrównaniach które mogą bydź rozwiązane podług ſpoſobu przepiſanego do zrównań drugiego ſtopnia.

141. Takowe zrównania niepowinny zawiérać w ſobie tylko dwa różne ſtopnie ilości x, i to takie, ażeby wykładnik iednego ſtopnia był podwóynością drugiego. *Np.* $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$, ſą zrównania tego gatunku, i rozwięzuią ſię tymże ſpoſobém co zrównanie drugiego ſtopnia; to ieſt, niewiadomą maiącą naywiękſzego wykładnika, zrobiwſzy ilością twiérdzącą, (ieżeli taką nie ieſt), i oſwobodziwſzy ią z ilościów które ią mnożyły albo dzieliły, biérze ſię połowa ilości mnożącéy niżſzy ſtopień niewiadoméy, i z téy połowy zrobiony kwadrat dodaie ſię do każdéy części zrównania, przez co piérwſza część zrobi ſię doſkonałym kwadratem. Natenczas z każdéy części wyciąga ſię piérwiaſtek kwadratowy, dawſzy drugiéy części podwóyny znak $\pm$. I tak zrównanie przemiéni ſię w zrównanie o dwu wyrazach.

Np. gdyby było zadano: *znaleśdź dwie liczby takie, żeby ſumma ich ſześcianów czyniła 35, mnogość zaś z nich żeby czyniła 6.* Z tego zagadnienia wy-

wypadaią dwa zrównania naſtępuiące: $x^3 + y^3 = 35$ i $xy = 6$; z tego znowu oſtatniego zrównania wnoſi ſię $y = \frac{6}{x}$, wártość którą położywſzy w piérwſzém zrównaniu, będzie $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; a wyrugówawſzy mianownika i przeſtawiwſzy, wypada mi $x^6 - 35x^3 = -216$. Biorę tedy połowę mnożnika 35 to ieſt $\frac{35}{2}$, i téy połowy kwadrat dodawſzy do każdéy części, mam $x^6 - 35x^3 + (\frac{35}{2})^2 = (\frac{35}{2})^2 - 216$; wyciągnąwſzy piérwiaſtek kwadratowy, będzie $x^3 - \frac{35}{2} = \pm[\sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}]$, po przeſtawieniu zaś $x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]}$; a naoſtatek po wyciągnieniu piérwiaſtka ſześciénnego, $x = \sqrt[3]{[\frac{35}{2}] \pm \sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]}}$; że zaś $(\frac{35}{2})^2 = \frac{1225}{4}$, a $(\frac{35}{2})^2 - 216 = \frac{1225-864}{4} = \frac{361}{4}$, więc $\sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]} = \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2}$; więc $x = \sqrt[3]{(\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2})}$; ſkąd wypadaią te dwie wártości, $x = \sqrt[3]{(\frac{35+19}{2})} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$, i $x = \sqrt[3]{(\frac{35-19}{2})} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; a ponieważ znalezliśmy wyżéy $y = \frac{6}{x}$, więc mieć będziém $y = 2$ i znowu $y = 3$.

Kiedy naywiękſzym wykładnikiém będzie 4 albo wielokrotność cztérech, natenczas może bydź aż do cztérech rzetelnych piérwiaſtków.

O ſkładaniu Zrównan.

142. Widzieliśmy dopiéro, że zrównania o dwu wyrazach kiedy ſą ſtopnia nieparzyſtego, na wártość niewiadoméy niedaią tylko iednę ilość rzetelną, a dwie ieżeli będą ſtopnia parzyſtego; ale da-

daią także ieſzcze i inſze wártości, które lubo ſą tylko zmyślone, iednakże przecięż to niemniéy ſą użyteczne, iako ſię to da widziéć przy rozwięzówaniu zrównań, i indziéy. W powſzechności, *każde zrównanie daie zawſze tylé wártościów niewiadoméy, ile znayduie ſię iednościów w naywiększym wykładniku tegóż zrównania.* Spomiędzy tych wártościów które także nazywaią ſię piérwiaſtkami zrównania, iedne mogą bydź twiérdzące a drugie przéczące, iedne rzetelne a drugie tylko zmyślone.

143. Zeby te prawdy okazały ſię tèm iaśniéy, trzeba uważyć że kiedy w iakiém zrównaniu wſzyſtkie wyrazy przeſtawią ſię do iednéy części, i kiedy w niém wſzyſtkie ſtopnie ilości *x*, rozporządzą ſię koleią podług ſwoich wielkościów, takową część zrównania można zawſze zmyślić ſobie, iakoby była wypadkiém pochodzącym z rozmnożenia między ſobą wielu czynników dwuſłownych, nieſkładanych, z których każdy miałby za ſpólny wyráz *x*.

Np. Zrównaniu $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$, dawſzy naſtępuiącą poſtać za przeſtawiéniém wyrazów - - $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$; natenczas daie ſię to poymówać, że $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$, mogą powſtawać z rozmno-

mnożenia między ſobą tych trzech czynników dwuſłownych, nieſkładanych: $x - a$, $x - b$, $x - c$,

Jakóż rozmnożywſzy między ſobą te trzy czynnki, miéć będziém:

$$
\begin{aligned}
x^3 - ax^2 &+ abx - abc = 0 \\
- bx^2 &+ acx \\
- cx^2 &+ bcx
\end{aligned}
$$

Zeby zaś to oſtatnie zrównanie wychodziło na toż ſamo co poprzédzaiące, do tego nietrzeba więcéy, tylko głoſkóm a, b, c, naznaczyć wártości takie, aby było $a + b + c = 8$; $ab + ac + bc = 7$, i $abc = 9$.

Dla wynaleziénia tedy każdéy z tych ilościów *np.* a; rozmnożywſzy piérwſze zrównanie przez a^2, a drugie przez a, ſkąd wypadnie $a^3 + a^2b + a^2c = 8a^2$, $a^2b + a^2c + abc = 7a$, i $abc = 9$, trzeba mówię, odiąć drugie zrównanie od pierwſzego, a do wynikaiącego ſtąd nowego zrównania dodać trzecie, co da $a^3 = 8a^2 - 7a + 9$, albo przeſtawiwſzy, $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$.

Podobnymże ſpoſobém znalezlibyśmy, iż zrówoanie odpowiadaiące wártości głoſki b, byłoby $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, iako téż że zrównanie odpowiadaiące wártości głoſki c, byłoby znowu $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. Skąd wynikaią naſtępuiące podania.

M3 144.

144. 1^{ód} Ponieważ zrównanie które ma dać wártość głoſki a, ieſt takież ſamo iak te co daią wártości głoſek b, i c, i ponieważ nadto łatwo widziéć ſię daie, że te wártości głoſek a,b,c, niémogą bydź ſobie równe, przeto potrzeba ażeby iedno którekolwiek z tych trzech zrównań mogło dać wártości ilościów a, b i c; więc każde z tych trzech zrównań muſi miéć trzy piérwiaſtki, z których piérwſzy będzie wártością ilości a, drugi wártością ilości b, a tzeci wártością ilości c.

2re Każde z tych zrównań ieſt takież ſamo, iak zrównanie zadane $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, z tą tylko różnicą, że a, albo b, albo c, przemiénia ſię tu w x. Więc także i to zrównanie powinno miéć trzy piérwiaſtki, które muſzą bydź wártościami ilościów a,b,c.

Więc ilościami które potrzebaby położyć zamiaſt a, b, c, w wyrazach $x - a$, $x - b$, $x - c$, żeby z rozmnożenia tych trzech czynników nieſkładanych wypadło zrównanie $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, takowémi ilościami, mówię, ſą ſame piérwiaſtki tego zrównania.

145. Gdyby ſpółczynniki różnych ſtopniów ilości x, zamiaſt 8, 7, i.t.d. były inſzémi liczbami, albo gdyby zrównanie za-

zamiaſt trzeciego ſtopnia było czwartego, piątego, i.t.d. wnioſki któréśmy ſobie uczynili zoſtaną zawſze też ſame. I tak maiąc w powſzechności $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; gdzie p,q,r,s, rozumieią ſię bydź ilości wiadome. Tó zrównanie możnaby także uważać, iakoby wynikaiące z mnogości cztérech czynników nieſkładanych $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$. Jakóż te cztéry czynniki rozmnożone między ſobą dałyby:

$$
\begin{array}{lllll}
x^4 & - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\
 & - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\
 & - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\
 & - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\
 & & + bdx^2 & & \\
 & & + cdx^2 & &
\end{array}
$$

Zeby zaś to zrównanie było tóż ſamo co $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, trzeba ażeby wártości głoſek a,b,c,d, były takie, żeby było $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$,

Piérwſze z tych zrównań rozmnożywſzy przez a^3, drugie przez a^2, a trzecie przez a, i odiąwſzy drugie i czwarte zrównanie, od piérwſzego i trzeciego razèm złączanych, miéć będziém $a^4 = pa^3 - qa^2 + ra + ra - s$, albo $a^4 - pa^3 + qa^2$ —

$-ra + s = 0$; podobnież znalezlibyśmy iż zrównanie odpowiadaiące ilości b, wypadłoby $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$; zrównanie zaś należące do c, byłoby $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$; iako tèż że zrównanie należące do d, byłoby $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$. A zatèm zrównanie które daie a, powinno także dać $b, c,$ i d, więc muſi mièć cztéry piérwiaſtki daiące wártości ilościów a, b, c, d. A ponieważ każde z tych zrównań, ieſt toż ſamo co zrównanie $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, przeto ilościami które trzebaby ſobie obrać na wártość głoſek a, b, c, d, żeby z rozmnożenia cztèrech czynników nieſkładanych $x - a, x - b, x - c, x - d$, wynikło poprzédzaiące zrównanie, ilościami, mówię, takiémi, ſą ſame piérwiaſtki tego zrównania.

146. Więc w powſzechności $1^{\text{ód}}$ *Zrównanie iakiegokolwiek bądź ſtopnia może bydź zawſze uważane iakoby pochodziło z mnogości tylu czynników dwusłownych, nieſkładanych, (z których każdy miáłby za ſpólny wyráz głoſkę oznaczaiącą ilość niewiadomą), ile będzie iednościów w naywiększym wykładniku niewiadoméy.* 2^{re} *Drugie wyrazy tych ilościów dwusłownych, ſą piérwiaſtkami tego zrównania, każdy będąc wzięty z znakiém przeciwnym.*

147. Gdyby zrównanie zamiaſt znaków na przemian twiérdzących i przèczących, iak miéliśmy w poprzédzaiącém zrównaniu $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, gdyby mówię, zrównanie miało iakikolwiek inny porządek znaków, *np.* gdyby było takie, $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$; niemniéy, i tymże ſamym ſpoſobém dałoby ſię dowiéśdź, iż go zawſze wyrazićby można przez $(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d)$; gdzie a, b, c, d, ſą piérwiaſtkami tego zrównania.

148. Ponieważ a, b, c, d, i. t. d. ſą piérwiaſtkami zrównania, więc z tych zrównań $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$, wynika:

$1^{\text{ód}}$ Ze w zrównaniu $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, a w powſzechności mówiąc: *Ze w każdém zrównaniu, ſpółczynnik* $-$ p *drugiego wyrazu, wzięty z znakiém przeciwnym to ieſt* $+$ p, *równa ſię ſummie wſzyſtkich piérwiaſtków.*

2^{re} *Ze ſpółczynnik q trzeciego wyrazu, równa ſię ſummie mnogościów wynikaiących z rozmnożenia między ſobą tych piérwiaſtków po dwa.*

3^{cie} *Ze ſpółczynnik czwartego wyrazu wzięty z znakiém przeciwnym, równa* *ſię ſummie piérwiaſtków rozmnożonych po trzy*; i tak daléy; *i że nakoniec oſtatni wy-ráz, ieſt mnogością wynikaiącą z rózmno-żenia przez ſię wſzyſtkich piérwiaſtków.*

Są to prawdy powſzechne, niechay zachodzą bądź iak chce różne znaki w zrównaniu, byleby ſpółczynnika każdego wyrazu parzyſtego brać zawſze z zna-kiém przeciwnym.

Skąd naſtępuie: *Ze w zròwnaniu w ktòrém brakuie drugiego wyrazu, zapewne znaydówać ſię muſzą piérwiaſtki twiérdzą-ce, i piérwiaſtki przéczące, i w takowym razie ſumma iednych ròwna ſię ſummie drugich.*

I tak w zrównaniu $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = o$, ſummą trzech piérwiaſtków ſą -2, ſummą ich mno-gościów wynikaiących z rozmnożenia tychże pier-wiaſtków po dwa, ſą -23, ſummą mnogościów wy-nikaiących z rozmnożenia po trzy, albo mnogością trzech piérwiaſtków ſą $+60$. Jakóż témi trzema piérwiaſtkami ſą $+5$, -4, -3, iak ſię o tém przekonać można, położywſzy zamiaſt x każdą z tych liczb w zrównaniu, bo każda z nich obro-ci piérwſzą część zrównania w zero. Lecz iawna ieſt, że ſummą tych trzech liczb to ieſt $+5, -4, -3$, ſą -2; że ſumma ich mnogościów rozmnożo-nych po dwie, to ieſt $-20 - 15 + 12$, ſą -23; i że mnogość wynikaiąca z rozmnożenia wſzyſtkich trzech, ieſt $5 \times -4 \times -3$, to ieſt $+60$.

Podobnież, w zrównaniu $x^3 - 19x + 30 = 0$, ponieważ brakuie drugiego wyrazu, wnoſzę ſtąd że w poprzédzaiącém zrównaniu muſzą znaydówać ſię piérwiaſtki i przéczące i twiérdzące, i że w niém ſum-

ſumma iednych równa ſię ſummie drugich; iakóż takowémi trzema piérwiaſtkami ſą $+2 + 3$ i -5.

149. Uważaiąc zrównanie iakoby po-wſtaiące z wielu czynników dwuſtownych, nieſkładanych, łatwo poiąć można, iakim ſpoſobém wiele i różnych liczb, mogą wſzy-ſtkie rozwięzować zrównanie. *Np.* gdy-by zadane było to zagadnienie: *Znaléśdź liczbę taką, od ktòréy odiąwſzy* 3, *a doda-wſzy dó niéy koléyno liczby* 4 *i* 5, *ażeby dwie ſummy rozmnożone iedna przez dru-gą i przez reſztę, uczyniły zero.* Na-zwawſzy x, takową liczbę, będzie reſzta $x - 5$, a na dwie ſummy wypadnie, $x + 4$, i $x + 3$; muſi tedy bydź $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5) = o$, to ieſt $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = o$; oczywiſta zaś ieſt, że ta mnogość albo onéy równa $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5)$, może uczynić zero w trzech ró-żnych przypadkach; to ieſt, ieżeli będzie $x = -4$, albo $x = -3$, albo też $x = 5$. Jakóż w piérwſzym przypadku, wyżéy położona mnogość przemiéniłaby ſię na $o \times (-4 + 3) \times (-4 - 5)$ albo proſto na o; w drugim, na $(-3 + 4) \times (o) \times (-3 - 5)$, albo także na o; a w trzecim, na $(5 + 4) \times (5 + 3) \times (o)$, albo podo-bnież na o. Kiedy tedy będzie zadane takie zrównanie iako to, $x^3 + 2x^2 - 23x$ —

$-60=0$, natenczas niéma żadnéy przy-
czyny któraby zniewalała do obrania za
wártość głoſki x, raczèy ilość -4 aniże-
li -3, albo $+5$; bo każda z nich zarówno
przemiéniaiąc piérwſzą część w zero, roz-
zwięzuie zrównanie.

150. Położymy tu ieſzcze iednę uwa-
gę, która także może miéć ſwoię użyte-
czność. Zrównania $a+b+c+d=p$, $ab+$
$ac+ad+bd+cd=q$; $abc+abd+acd+bcd$
$=r$, $abcd=s$, przywiodły nas były do ie-
dnakowego zrównania, czyto względém a,
czyto względém b, czy też t. d. Przyczy-
na tego ieſt, bo wſzyſtkie ilości a,b,c,d,
będąc w każdém zrównaniu iednakowo
roſporządzone, niéma żadnego powodu,
aby iedna ilość wynaydówała ſię przez inſze
działania, iak druga; więc powiedziawſzy
w powſzechności, ieżeli w ſzukaniu wielu
ilościów niewiadomych, okoliczności wy-
ciągaią, używać do każdéy iednakowego
rozumówania, iednakowych działań, i ie-
dnakowych ilościów wiadomych, wſzyſtkie
takowe ilości muſzą bydź koniecznie piér-
wiaſtkami tegóż ſamego zrównania; a za-
tém takie zagadniénie przywiedzie rachu-
nek do zrównania ſkładanego.

151. Ponieważ można uważać zrównanie, iakoby powſtaiące z mnogości wielu czynników nieſkładanych, więc można go także uważać iakoby pe-

powſtaiące z mnogości wielu czynników ſkładanych.

I tak zrównanie trzeciego ſtopnia, da ſię uważać iakoby powſtaiące z mnogości wynikaiącéy z rozmnożenia iednego czynnika drugiego ſtopnia, takiego iak x^2+ax+b, przez drugiego czynnika piérwſzego ſtopnia, takiego iak $x+c$; iakóż x^2+ax+b, może zawſze wyrażać mnogość wynikaiącą z dwóch innych czynników nieſkładanych.

Podobnież zrównanie czwártego ſtopnia, da ſię uważać iakoby powſtaiące z mnogości wynikaiącéy z rozmnożenia cztérech czyników nieſkładaiących albo dwóch czynników drugiego ſtopnia, albo dwóch czynników takich, żeby ieden był trzeciego, a drugi piérwſzego ſtopnia.

152. Ponieważ zrównanie drugiego ſtopnia, może zawiérać w ſobie piérwiaſtki zmyślone, więc zrównania wyżſzych ſtopniów nad drugi, mogą także zawiérać w ſobie piérwiaſtki zmyślone.

O różnych przekſztálceniach Zrównań, iakie z niémi przedſiębrać można.

153. Zrównania daią ſię przemiéniać w różne odmiénne kſztáłty, o których wprzód nam mówić należy, nim do rozwiązania ich przyſtąpimy.

154. *Ieżeli w zrównaniu przemiénią ſię znaki tych wyrazów, które zawiéraią w ſobie ilości podnieſione do ſtopniów nieparzyſtych, to piérwiaſtki tego zrównania twiérdzące przemiénią ſię w przéczące, a odwrotnie przéczące przemiénią ſię w twiérdzące.*

Ia-

Jakóż, ażeby odmiéniły ſię znaki w pierwiaſtk… zrównań, doſyć ieſt położyć $-x$ zamiaſt $+x$; … kowa zaś przemiana nieodmiènia znaków w ty… wyrazach, które zawiéraią w ſobie ilości podn… ſione do parzyſtych ſtopniów, ale tylko przem… nia znaki tych wyrazów, w których zawiéraią ſ… ilości podnieſione do ſtopniów nieparzyſtych.

155. *Zeby przemiénić zròwnanie m…iące w ſobie wyrazy z mianownikami, n… inſze zròwnanie w którémby niebyło mi… nowników, a oráż żeby piérwſzemu wyr… zowi ſpółczynnika niedawać*, trzeba w zró… wnaniu zamiaſt niewiadoméy położyć in… ſzą niewiadomą, rozdzieloną przez mno… gość wynikaiącą z wſzyſtkich mianowni… ków, a potém całe zrównanie rozmnożyć przez mianownika, iakiego natenczas piérwſzy wyráz miéć będzie.

Np. maiąc to zrównanie, $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0$; robię $x = \frac{y}{mnp}$, i takową ilość położywſzy zamiaſt x w poprzédzaiącém zrównaniu, miéć bę… dę $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; rozmnoży… wſzy przez $m^3n^3p^3$, wypadnie mi $y^3 + \frac{am^3n^3p^3y^2}{m^3n^2p^2} + \frac{m^3n^3c}{mn^2p}y + \frac{m^3n^3p^3d}{p} = 0$; a po odprawiéniu wſka… zanych dzieléń, będzie $y^3 + anpy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

156. Gdyby m, n, i p były ilości ſobie równe, doſyćby było zrobić $x = \frac{y}{m}$. Skąd naſtępuie, że aby

aby przemiénić zrównanie, w którém wſzyſtkie ſpółczynniki ſą liczbami całémi, ale w którém piérwſzy wyráz ma także ſwego ſpółczynnika, na inſze zrównanie, w którémby piérwſzy wyráz niemiał ſpółczynnika a oráz ażeby ſpółczynniki innych wyrazów były liczbami całemi, trzeba zrobić $x = \frac{y}{m}$; gdzie przez m rozumié ſię takowy ſpółczynnik piérwſzego wyrazu. Jakóż, maiąc *np.* zrównanie $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$, i rozdzieliwſzy go przez m, miéć będę, $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, w którémto zrównaniu wſzyſtkie mianowniki ſą ſobie równe.

157. *Zeby wyrugówać drugi wyráz z iakiego zròwnania*, trzeba zamiaſt niewiadoméy położyć inſzą niewiadomą, pomnożoną ſpółczynnikiém drugiego wyrazu zrównania, wziętym z przeciwnym znakiém, a rozdzielonym przez wykładnika piérwſzego wyrazu.

Jakóż oznaczywſzy ſobie w powſzechności takie zrównanie, przez $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + k \ldots = 0$. Jéżeli zrobimy $x = y + s$, miéć będziém dwa zrównania a trzy niewiadome, więc trzecią niewiadomą będzie nam wolno wynaléśdź przy pomocy takiego warunku iaki nam ſię ſpodoba.

A zatém zamiaſt ſtopnia do którego ilość x znayduie ſię bydź wynieſiona, położywſzy w każdym wyrazie podobny ſtopień ilości $y + s$, miéć będziém (126) rzęd wyrazów naſtępuiący:

$$\begin{array}{llll} y^m + msy^{m-1} & + m.\frac{m-1}{2}.s^2y^{m-2} & \text{i. t. d.} & + k = 0 \\ \quad + ay^{m-1} & + (m-1).asy^{m-2} & \text{i. t. d.} & \\ & + \qquad by^{m-2} & \text{i. t. d.} & \end{array}$$

Uważaiąc tedy y iako niewiadomą, iawna ieſt, że to zrównanie będzie bez drugiego wyrazu, ieżeli s ieſt takie, żeby było $ms + a = 0$, to ieſt ieżeli rozumieć ſię będzie $s = \frac{-a}{m}$, wártość która wypada z tego zrównania na głoſkę s. Lecz widzieliśmy niedawno, że na wártość iedney z niewiadomych, a zatém na wártość głoſki s, wolno nam iest obrać ſobie taką ilość iaka nam zdawać ſię będzie; więc ponieważ $\frac{-a}{m}$, ieſt taką wártością którey używſzy można wyrugować drugi wyráz w zrównaniu y^m i. t. d., idzie zatém iż ażeby dane zrównanie $x^m + ax^{m-1} +$ t. d. przemiénić na inſze zrównanie, w którémby niebyło drugiego wyrazu, trzeba zróbić $x = y - \frac{a}{m}$; co ieſt záſadą reguły podaney dopiéro wyżéy.

Np. gdyby potrzeba było wyrugówać drugi wyráz z tego zrównania, $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$, robię $x = y - \frac{6}{3}$, to ieſt $x = y - 2$; położywſzy tę wártość w danem zrównaniu, mieć będę

$$\begin{aligned} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 &= 0 \\ + 6y^2 - 24y + 24 & \\ - 3y + 6 & \\ + 4 & \end{aligned}$$

co po zebraniu, wychodzi na $y^3 - 15y + 26 = 0$, zrównanie w którém iuż niéma drugiego wyrazu.

O rozwięzywaniu Zrównań ſkładanych.

158. W tèm wſzyſtkiém co ma naſtąpić, ráz na zawſze rozumieć będziémy, wſzyſtkie zrównania iuż przeſtawione do iedney części.

W

W powſzechności, rozwiązać zrównanie iakiegokolwiek ſtopnia, *np.* iak to $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots k = 0$, ieſtto wynaléśdź na ilość niewiadomą tyle wártościów, ile będzie iednościów w naywyżſzym wykładniku téyże niewiadoméy, z których wártościów każda byłaby wyrażona przez głoſki p, q i. t. d. k, połączone między ſobą iakimkolwiek ſpoſobém; iednakże takim, aby te wartości położone w zrównaniu zamiaſt x piérwſzą część przemiéniły w zero, bez względu na iakąkolwiek ſzczególną wártość głoſek p, q, i. t. d.

Lubo ſpoſób który do tego podać mamy, rościąga ſię nieokryślenie do wſzelkich ſtopniów a zatém i do czwartego, iednakże my przeſtaniémy tu tylko na trzecim ſtopniu. Do czwartego zaś użyiémy innego ſpoſobu, zaſadzaiącego ſię wprawdzie na tychże fundamentach, ale prędſzego. Każdy z tych ſpoſobów na tèm zależy, ażeby uważać zrównanie które ma bydź rozwiązane, iako wypadek wynikaiący z dwóch zrównań z dwiéma niéwiadomémi. Takowe dwa zrównania można zawſze przemiénić w iedno, niezawiéraiące w ſobie tylko iednę niewiadomą. Cała tedy rzecz idzie o do-

dobranie takich zrównań, ażeby wyrugówanie iednego z nich, dało takie zrównanie, któreby poczytać można za toż ſamo, co było zadane. Zobaczmy więc, iakie dla tego powinny bydź pomiénione zrównania.

Lubo ten ſpoſób niewyciąga wyrugówania drugiego wyrazu z danego zrównania, iednakże z przyczyny że bez niego rachunki wypadaią łatwiéyſze, rozumieć go będziémy iuż wyrugówanego ſpoſobém podànym wyżéy (157).

Daymy tedy że zrównanie zadane, ieſt takie, $x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4}$ + t. d. $+ k = 0$.

Obiéram ſobie dwa zrównania naſtępuiące, $y^m - 1 = 0$, i $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4}$ + t. d. $+ x = 0$, gdzie a, b, c, i. t. d. rozumieią ſię bydź ilościami niewiadomémi, które wynaydą ſię w ſpoſób niżéy położony.

Przy pomocy tych dwóch oſtatnich zrównań, wyruguie ſię y, co przyprowadzi do zrównania wyrażonego w x, a będącego ſtopnia m, i niémaiącego w ſobie drugiego wyrazu.

Spółczynniki rożnych ſtopniów ilości x, ſkładać ſię będą z ilościów a, b, c, i z różnych ſtopniów onychże.

Ka-

Każdego ſpółczynnika trzeba zrównać ſpółczynnikowi podobnegoż ſtopnia ilości x, w zadanèm zrównaniu $x^m + px^{m-1}$ + t. d. ſkąd na wynaleziénie ilościów a, b, c, i. t. d. wypadnie tyle zrównań, ile ieſt tychże ilościów. Po wynaleziéniu ilościów a, b, c, i. t. d. znaydą ſię wſzyſtkie piérwiaſtki czyli wártości ilości x, położywſzy takowe wártości ilościów a, b, c, i. t. d. w zrównaniu $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4}$ + t. d. $+ x = 0$, tudzież zamiaſt y kładąc koléyno każdy z piérwiaſtków zrównania $y^m - 1 = 0$, które dadzą ſię łatwo wynaleśdź iak zobaczymy niżéy.

Przyſtóſówanie do trzeciego ſtopnia.

159. Niechay tedy będzie $x^3 + px + q = 0$, zrównanie zadane do rozwiązania.

Biorę $y^3 - 1 = 0$, i $ay^2 - by + x = 0$. Zebym wyrugował y, mnożę to oſtatnie zrównanie przez y, a położywſzy w niém zamiaſt y^3 wartość iego 1, wyciągnioną z zrównania $y^3 - 1 = 0$, mam $by^2 + xy + a = 0$. To zrównanie znowu mnożę przez y, i położywſzy w niém zamiaſt y^3 tęż ſamę wártość iego 1, wyżéy wynalezioną, mam $xy^2 + ay + b = 0$.

Co mi da te trzy zrównania:

$$ay^2 + by + x = 0$$
$$by^2 + xy + a = 0$$
$$xy^2 + ay + b = 0.$$

Przy pomocy dwóch piérwſzych zrównań, wynayduię wártość ilości y^2 i y, podług ſpoſobu przepiſanego do zrównań pierwſzego ſtopnia z dwiéma niewiadomémi, i mam $y^2 = \frac{xx - ab}{bb - ax}$, i $y = \frac{aa - bx}{bb - ax}$.

Te

Te wynalezione wártości kładę w trzeciém zrównaniu $xy^2 + ay + b = 0$, i mam . . .
$$\frac{x^3 - abx + a^3 - abx}{bb - ax} + b = 0,$$
a po wyrugówaniu mianówniká i po zebraniu, $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$.

Teráz uważam, iż ażeby to zrównanie było tożsamo co zrównanie $x^3 + px + q = 0$, trzeba aby $-3ab = p$, zaś $a^3 + b^3 = q$; i teto będą dwa zrównania z których wyciągnę wártości głoſek a i b.

Piérwſze daie mi $b = -\frac{p}{3a}$; co położywſzy w drugiém zrównaniu, mam $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q$, albo rozmnożywſzy przez a^3 i przeſtawiwſzy, $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$; zrównanie które (141) da ſię rozwiązać podług ſpoſobu przepiſanego do zrównań drugiego ſtopnia, i które zatém przemiéni ſię w to, $a^6 - qa^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, a potém na $a^3 - \frac{1}{2}q = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$; przeſtawiwſzy zaś będzie $a^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$, a naoſtatek, $a = {}^{*}\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Zeby mieć b, kładę w zrównaniu $a^3 + b^3 = q$, wártość ilości a^3 wyzéy wynalezioną, ſkąd mam, $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} + b^3 = q$, a zatém $b^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$; więc będzie $b = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Zrównanié zaś $ay^2 + by + x = 0$, daie $x = -ay^2 - by$, więc będzie $x = -y^2\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 +}}$

* *Niekładzie ſię tu tylko ieden znak przed drugim znakiém piérwiaſtkowym, bo niepotrzebuię tylko iednéy wártości głoſki a, i to byle któréy, każda zarówno zadoſyć uczyni.*

$+ \frac{1}{27}p^3)}] - y\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$, któreto zrównanie zawiéra w ſobie trzy piérwiaſtki.

Nieidzie więcéy tylko o wynalezienie wártości głoſki y. A że zrównanie $y^3 - 1 = 0$, daie $y^3 = 1$, więc wyciągnąwſzy piérwiaſtek ſześcienny, będzie $y = 1$. Zeby mieć wártość także innych dwóch piérwiaſtków, dzielę (151) $y^3 - 1$ przez $y - 1$, i mam $y^2 + y + 1$, co zrównawſzy zerowi, mieć będę nowe zrównanie zawiéraiące w ſobie inne dwa piérwiaſtki. To tedy zrównanie $y^2 + y + 1 = 0$, rozwiązane, daie mi $y = \frac{-1 \pm \sqrt{(-3)}}{2}$; więc trzy wártości głoſki y będą naſtępuiące, $y = 1$, $y = \frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}$, $y = \frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2}$. Te wártości kładąc koléyno w zrównaniu $x = -y^2\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} - y\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$, i uważaiąc że ilości $(\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2})^2$, iako też $(\frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2})^2$ przemiéniaią ſię piérwſza na $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, a druga na $\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}$, na wártości głoſki x wypadną trzy ilości naſtępuiące.

$$x = -\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} - \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

160. Zaſtanowiwſzy nad témi trzema wárto-ściami głoſki x, dopiéro wynalezionémi, daie ſię widzieć, że gdy p będzie ilością twiérdzącą, ilość $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ będzie wypadać zawſze także ilością twiérdzącą; bo $\frac{1}{4}q^2$ które ieſt kwadratém ilości $\frac{1}{2}q$ muſi bydź zawſze ilością twiérdzącą, chociażby q było przéczącą. Taż ſama ilość ieſzcze będzie twiérdzącą, kiedy $\frac{1}{4}q^2$ będzie większe aniżeli $\frac{1}{27}p^3$, p rozumieiąc bydź ilością przéczącą. W tych dwóch przypadkach dwie oſtatnie wártości x ſą tylko zmy-ślone. Bo w tym razie dwa znaki pierwiaſtków ſześciénnych, będąc ilościami rzetelnémmi a nieró-wnémi, ich mnogości pochodzące z rozmnożenia przez $\sqrt{(-3)}$ i przez $-\sqrt{(-3)}$ to ieſt przez ilo-ści poprzedzone znakami przeciwnémi nieznoſzą ſię zobopólnie; a zatém w każdéy z tych dwóch wár-tościów głoſki x, zoſtanie ſię ilość zmyślona, tak że tylko piérwſza wártość będzie rzetelną wárto-ścią głoſki x.

161. Ale gdyby p będąc ilością przéczącą, $\frac{1}{27}p^3$ znalazło ſię bydź większe aniżeli $\frac{1}{4}q^2$, na ten czas $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ byłoby ilością przéczącą, i $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$ byłaby ilość zmyślona; atoli trzy wártości głoſki x w takim razie byłyby ilościami rzetelnémi.

Lubo to ieſt pewna że w przypadku dopiéro wymiénionym, trzy piérwiaſtſki ſą ilościami rzetelné-mi, iednakże dotąd niémamy ſpoſobu, żeby ie miéć pod poſtacią rzetelną, tylko przez przybliżenie. Trzeba tedy w takim razie udać ſię do reguł przy-bliżenia które podamy niżéy. Ten przypadek, na-zywa ſię *przypadek przybliżony.*

Tym czaſem zaſtanówmy ſię nad przykładém co do piérwſzego przypadku.

Daymy że maią bydź znalezione piérwiaſtki tego zrównania, $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$. Poczy-nam naprzód podług (157) od wurugówania dru-giego wyrazu, robiąc $y = x - 2$, co mi przemié-ni dane zrównanie, na $x^3 - 15x - 26 = 0$.

Lecz

Lecz każde zrównanie trzeciego ſtopnia niémaiące drugiego wyrazu, oznaczyliśmy przez $x^3 + px + q = 0$; więc będzie $p = -15$, $q = 26$; a zatém $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$; $\frac{1}{3}p = -5$, a $\frac{1}{27}p^3 = -125$; więc będzie $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{(169 - 125)} = \sqrt{(44)}$; a zatèm trzy wártości głoſki x będą naſtępuiące.

$$x = -\sqrt[3]{[13 + \sqrt{(44)}]} - \sqrt[3]{[13 - \sqrt{(44)}]}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[13 + \sqrt{(44)}]} + \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[13 - \sqrt{(44)}]}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[13 + \sqrt{(44)}]} + \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[13 - \sqrt{(44)}]}.$$

To ieſt, że piérwſzy piérwiaſtek ieſt przéczący, a dwa oſtatnie ſą zmyślone.

Przyſtóſówanie do czwartego ſtopnia.

162. Żeby poprzédzaiący ſpoſób przyſtóſówać do zrównań czwartego ſtopnia, trzeba obrać ſobie te dwa zrówania, $y^4 - 1 = 0$, i $y^3 + ay^2 + by + = 0$. Z tych oſtatnie rozmnożywſzy trzy razy ráz po ráz przez y, a za każdym razém zamiaſt y^4 położywſzy wártość onego 1, wypadną cztéry zró-wnania wyráżone w y i x; z trzech takowych zró-wnań wyciągnąwſzy wártości ilościów y^3, y^2, i y, i położywſzy ie w czwartèm zrównaniu, wypadnie nowe zrównanie czwartego ſtopnia, wyrážone w x, którego każdy wyráz, przyrównywa ſię do odpowia-daiącego wyrazu w powſzechném zrównaniu czwar-tego ſtopnia.

163. Takowe rozwiązanie można uczynić ie-ſzcze łatwiéyſzém, obrawſzy ſobie raczéy te dwa zrównania, $y^2 - 1 = 0$, i $y(ax + b) + x^2 + c = 0$. Z tych oſtatnie rozmnożywſzy przez y, i położy-wſzy w niém zamiaſt y^2 onego wártość 1, złożą ſię naſtępuiące dwa zrównania

$$y(ax + b) + x^2 + c = 0.$$
$$y(x^2 + c) + ax + b = 0.$$

W

W drugiém z tych zrównań położywſzy zamiaſt y wártość onego, wyciągniętą z piérwſzego zrównania, będzie.

$$x^4 + 2cx^2 - 2abx + cc = 0$$
$$- aax^2 \qquad\quad - bb$$

A porównawſzy wyrazy tego zrównania, z odpowiadaiącémi wyrazami powſzechnego zrównania czwartego ſtopnia $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, wypadnie $2c - aa = p$, $- 2ab = q$, $cc - bb = r$. Z tych trzech zrównań piérwſze daie, $c = \frac{p + aa}{2}$, drugie daie, $b = \frac{-q}{2a}$; położywſzy te wártości w trzeciém zrównaniu, po uczynioném zebraniu będzie, $a^6 + 2pa^4 + (pp - 4r)\, a^2 - qq = 0$. Zrównanie które lubo ſzóſtego ſtopnia, iednakże rozwięzuie ſię tak iak gdyby było trzeciego, bo w niém nieznayduią ſię tylko ſtopnie ilości a^2.

Wynalazłſzy tedy a^2 ſpoſobèm wyżéy podanym (159), łatwo potém wynaydzie ſię także a, a zatém b i c, przy pomocy zrównań $b = \frac{-q}{2a}$ i $c = \frac{p + aa}{2}$. A tak zrównanie $y\,(ax + b) + x^2 + c = 0$ rozwiązane, uważaiąc w niém y, b, i c iako ilości wiadome, da na każdą wártość głoſki y, dwie wartości wyrażone w x. Że zaś zrównanie $y^2 - 1 = 0$, albo $y^2 = 1$, daię na y te dwie wártości to ieſt $y = 1$ i $y = -1$, więc położywſzy koléyno zamiaſt y te dwie wártości, wypadną cztéry wártości głoſki x.

O ſpółmiérnych Dziélnikach Zrównań.

164. Jeżeli między piérwiaſtkami zrównania, niektóre mają znaydówać ſię ſpółmiérne, to podług uwag i ſpoſobów náſtępuiących łatwiéy będzie można wyna-

leśdź ie, aniżeliby wynalazły ſię przez rozwiązanie powſzechnego zrównania.

165. Ponieważ oſtatnim wyrazém ieſt mnogość powſtaiąca z zrównania, wſzyſtkich pierwiaſtków, (148), więc w iakiémkolwiek zrównaniu żadna liczba niémoże bydź wártością ſpółmiérną ilości x, ieżeli oſtatniego wyrazu doſkonale dzielić niebędzie. Możnaby tedy brać ieden po drugim wſzyſtkich dziélnikow oſtatniego wyrazu, i koléyno zamiaſt x kłaśdź ie w zrównaniu, tak z znakiém $+$ iako téż z znakiém $-$, (gdyż x niemniéy może miéć wártości przéczące iako téż i twiérdzące): a na ten czas z dziélników użytych, który zadane zrównanie przemiéni w zero, takowy będzie wártością głoſki x.

Ale takowe działanie częſtokroć wypadłoby bardzo długie; dla tego zobaczmy po czém poznać dziélniki które maią bydź użyte a które odrzucone; ale wprzód należy wiedziéć iak ſię znayduią wſzyſtkie dziélniki liczby zadanéy.

166. Zeby znaléśdź wſzyſtkich dziélników liczby iakiéykolwiek, trzeba ią rozdziélić koléyno przez te początkowe liczby przez które da ſię dzielić, poczynaiąc od nayproſtſzych, i dziéląc przez każdą z nich póty póki można. Potém napi-

piſzą ſię w iednéy linii te wſzyſtkie liczby początkowe, każda z nich tyle razy ile razy mogła była rozdzielić; a dopiéro razmnożywſzy ie między ſobą po dwie, po trzy, po cztéry, i. t. d. takowe mnogości i liczby początkowe wynalezione, będą żądanémi dziélnikami zadanéy liczby.

Np. Zeby miéć wſzyſtkich dziélników liczby 60. Dzielę 60 przez 2, co mi daie 30, dzielę 30 przez 2, co mi daie 15 dzielę 15 przez 3, co mi daie 5; naoſtatek dziele 5 przez 5, co mi daie 1. A zatém piérwſzémi dziélnikami będą 2, 2, 3, 5; które rozmnożone po dwa, dadzą 4, 6, 10, 6, 10, 15. Ro zmnożywſzy ie zaś po trzy, miéć będę 12, 20, 30, 30 a nakoniec rozmnożywſzy ie po cztéry, mam 60.

Zebrawſzy te wſzyſtkie dziélniki, nierachuiąc iednak tych które znayduią ſię bydź powtórzone, i przydawſzy do nich iedność iako dziélnika każdéy iakiéykolwiek liczby, wſzyſtkie dziélniki liczby 60, będą naſtępuiące

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

167. Daymy teráz że maią bydź wynalezione ſpółmiérne dziélniki iakiego zrównania, ieżeli ich ma to zrównanie, *np.* zrównania czwartego ſtopnia w powſzechności tak wyrażonego: $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Oznaczmy ſobie takowego dziélnika przez $x + a$; w takim razie zadane zrównanie, może bydź uważane (151) iakoby powſtaiące z rozmnożenia ilości $x + a$, przez czynnika trzeciego ſtopnia, takiego iak ieſt $x^3 + kx^2 + mx + n$; rozmno-

zmnóżmy tedy tych dwóch czynników iednego przez drugi, miéć będziém zrównanie:

$$x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an = 0$$
$$+ ax^3 + akx^2 + amx$$

które ponieważ powinno bydź toż ſamo, co zrównanie $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, więc wynikną ſtąd naſtępuiące zrównania, $k + a = p$, $m + ak = q$, $n + am = r$, $an = s$, albo $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$, $k = \frac{q - m}{a}$, $1 = \frac{k - p}{a}$.

Daymy więc teráz, iż obrawſzy ſobie a za iednego z dziélników oſtatniego wyrazu, chciáłbym wiedziéć ieżeli ten dziélnik może bydź użyty; zrównania $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$, i. t. d. wſkazuią naſtępuiące działania, to ieſt: rozdziél oſtatni wyráz zrównania przez obranego dziélnika; odéym wieloráz od ſpółczynnika głoſki x, a reſztę rozdziél przez tegoż dziélnika; odéym ten drugi wieloráz od ſpółczynnika głoſki x^2, a reſztę znowu rozdziél przez tegoż dziélnika, i tak daléy wciąż poſtępuy ſobie, aż przyidzieſz do ſpółczynnika drugiego wyrazu zrównania, na który powinieneś znaléśdź 1. za wieloráz. Jeżeli dziélnik tym wſzyſtkim dziélenióm zadoſyć

ſyć czyni, to pewnie może bydź obrany za a; ale ieżeliby choć tylko iedno dzielenie niedało ſię odprawić ſpełna, to liczba obrana powinna bydź odrzucona.

Ponieważ iedność ieſt zawſze dzielnikiém każdéy liczby, rzecz oczywiſta, że iéy także potrzeba probować tak z znakiém $+$ iako też z znakiém $-$; ale to prędzéy będzie można odbydź, kładąc koléyno w zrównaniu zamiaſt x, $+1$ i -1; co bardzo łatwo da ſię uczynić, bo wſzelkim ſtopniém ilości $+1$ ieſt $+1$, a wſzelkim ſtopniém parzyſtym ilości -1, ieſt $+1$, wſzelkim zaś ſtopniém nieparzyſtym téyże ilości -1, ieſt -1. Jeżeli żadna z tych dwóch użytych ilościów nieda na wypadek 0, to zamiaſt a niebędzie można wziąść ani $+1$ ani -1.

To założywſzy, zobaczmy iak ſobie poſtąpić trzeba w doświadczeniu wſzyſtkich innych dziélników oſtatniego wyrazu.

Daymy iż mamy zadane pytanie, ieżeli zrównanie $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$, ma iakiego dziélnika ſpółmiérnego. Szukam, wſzyſtkich dziélników oſtatniego wyrazu 15. oprócz iedności, a znalazłſzy ich, piſzę ie porządkiém podług wielkości (biorąc ie z znakami iużto $+$ iużto $-$), iako niżéy widzieć ſię daią.

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0.$$

Dziéln. liczb: 15 ...	$+15$	$+5$	$+3$	-3	-5	-15
	$+1$	$+3$	$+5$	-5	-3	-1
	-21	-23	-25	-15	-17	-19
				$+5$		
				$+18$		
				-6		
				-3		
				$+1$		

Dzielę oſtatni wyráz $+15$ przez każdą z liczb piérwſzéy linii, a wielorazy piſzę w drugiéy linii.

Odéymuię każdy wyráz drugiéy linii od ſpółczynnika głoſki x, to ieſt od -20, a zoſtaiące reſzty piſzę w trzeciéy linii.

Dzielę każdy wyráz téy trzeciéy linii przez wyráz odpowiadaiący, położony w piérwſzéy linii, a co znaydę iaki doſkonały wieloráz, to go napiſzę. Tu nie znayduię tylko ieden, to ieſt $+5$; a zatém ieſtem pewién, że to zrównanie niémoże miéć tylko iednego dziélnika ſpółmiérnego. Ale bądźto że niewypadnie tylko ieden doſkonały wiéloráz, bądź téż że ich będzie więcéy, trzeba ſobie daléy poſtąpić w naſtępuiący ſpoſob.

Odéymuię każdy wieloráz od ſpółczynnika 23 głoſki x^2, a reſzty piſzę w piątéy linii; iak tu 18.

Dzielę podobnież iak przedtém każdą z tych reſzt, przez odpowiadaiący wyráz piérwſzéy linii, a każdy wiéloráz piſzę poniżéy; iak tu -6.

Odéymuie każdy z tych nowych wielorazów od ſpółczynnika -9 głoſki x^3, a pozoſtałe reſzty piſzę poniżéy; iak tu -3.

Naoſtatek dzielę te reſzty iak piérwéy przez odpowiadaiące wyrazy piérwſzey linii. Znayduię na wieloráz $+1$; ſkąd wnoſzę że odpowiadaiący wyráz -3 piérwſzéy linii, powinién bydź wzięty za a; a zatém że dziélnik $x + a$, przemiénia ſię na $x - 3$; to ieſt że $x - 3$ dziéli zrównanie; więc $x = 3$, ieſt wártością ſpółmiérną głoſki x, w danem zrównaniu.

O ſpoſobie przybliżenia ſię do piérwiaſtków zrównań ſkładanych.

168. W ſpoſobie który mamy podać, przybliżenia ſię w zrównaniach do wártości ilości niewiadoméy, rozumié ſię wártość takowego piérwiaſtka iuż bydź wynaleziona, i iuż przybliżona ale tylko do iednéy dzieſiątnéy. Zobaczymy tedy naprzód, iak wynayduie ſię ta piérwſza wártość. Obiérzmy ſobie na przykład zrównanie, $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Kładę w tém zrównaniu zamiaſt x, kilka liczb iużto twiérdzących iuż przéczących, póki aż dwa takowe położenia iedno po drugiém naſtępuiące, niedadzą mi wypadków poprzédzonych znakami przeciwnémi. A kiedy znaydę dwa takowe wypadki, wnoſzę ſtąd że wártość ilości x, zawiéra ſię między dwiéma liczbami, które położone zamiaſt x, dały pomiénione dwa wypadki, tak że ieżeli te dwie liczby nieróżnią ſię iedna od drugiéy tylko o dzieſiątą część iednéy z tych dwóch liczb, miéć będę przybliżoną wártość któréy ſzukam, wziąwſzy iednę lub drugą liczbę, albo śrzodek arytmetyczny między niémi.

Ale ieżeli o więcéy między ſobą różnić ſię będą, to działám iak naſtępuie.

Kładę w zrównaniu $x^3 - 5x + 6 = 0$, liczby 1, 2, 3, 4, i. t. d. ale poſtrzégam wprędce, że te wſzyſtkie liczby daią mi wypadki twiérdzące, i że zawſze dawałyby takie bez końca, dla czego zamiaſt piérwſzych kładę raczéy liczby 0, — 1, — 2, — 3, i. t. d. ſkąd przychodzę do wypadków naſtępuiących.

Liczby użyte	*Wypadki*
0	+ 6
— 1	+ 10
— 2	+ 8
— 3	— 6.

Za-

Zaſtanawiam ſię tedy nad dwóma oſtatniémi, i wnoſzę ſobie że ieden z piérwiaſtków zrównania, muſi znaydówać ſię między — 2 i — 3. Ale że te liczby różnią ſię między ſobą o 1, które wárto więcéy iak dzieſiątą część każdéy, przeto biorę śrzodek arytmetyczny między témi dwiema liczbami, to ieſt biorę połowę — 2,5 ich ſummy — 5. Kładę w zrównaniu 2,5 zamiaſt x, i znayduię na wypadek ilość + 2,875 to ieſt ilość twiérdzącą; a ſtąd wnoſzę ſobie, że piérwiaſtek znaydówać ſię muſi między — 2,5 i — 3. Biorę tedy śrzodek między — 2,5 i — 3, to ieſt — 2,7 zaniedbawſzy ilości mniéyſze nad dzieſiątne, i kładę — 2,7 w zrównaniu zamiaſt x, co mi da wypadek — 0,183 to ieſt ilość przéczącą. A zatém, ponieważ — 2,5 dały wypadek twiérdzący, a — 2,7 dały wypadek przéczący, więc wártość ilości x zawiérać muſi między — 2,5 i 2,7; te zaś dwie liczby nieróżnią ſię między ſobą tylko o 0,2 to ieſt o mniéy iak o dzieſiątą część każdéy z tych dwóch liczb; więc wziąwſzy między niémi śrzodek, pokaże ſię wártość głoſki $x = -2,6$, niechybiaiąca tylko o iednę dzieſiątną,

Tym ſpoſobém znalazłſzy liczbę któraby ſię nieróżniła od x tylko o dzieſiątą część wártości téyże ilości, zmyślam ſobie x bydź równe takowéy liczbie pomnożonéy nową niewiadomą z; to ieſt iak tu zmyślam ſobie $x = -2,6 + z$, i kładę tę ilość w zrównaniu zamiaſt x; ale że z ieſt nay-więcéy dzieſiątą częścią ilości 2,6 i że zatém kwadrat iego będzie naywięcéy ſetną częścią kwadratu pomienionéy liczby, a ſześcian iego naywięcéy tyſiączną częścią ſześcianu téyże liczby, więc kładąc w zrównaniu takową wártość zamiaſt x, zaniedbywam wſzyſtkie ſtopnie głoſki z, przewyżſzaiące piérwſzy ſtopień; i ażeby uniknąć niepotrzebnych rachunków, w ſkładaniu ſześcianu i innych ſtopniów gdyby ſię znaydówały z ilości $-2,6 + z$, nieprzypuſzczam tylko dwa piérwſze wyrazy, które mi dać powinna reguła wyżéy przepiſana (126).

Co

Co żeby się porządnie odprawiło, piszę iak następnie:
$x^3 = (-2,6 + z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \cdot z;$ — 5x
$= -5(-2,6 + z) = -5(-2,6) - 5z + 6 = +6.$
Zgromadziwszy tedy wszystko, mieć będę na wypadek zrównanie, $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \cdot z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, albo po odprawieniu wska- zanych działań i po zebraniu, $15,28z + 1,424 = 0$; skąd wyciągam $z = -\frac{1,424}{15,28}$, a przemieniwszy na dziesiątne, będzie $z = -0,09$; ilość w którey prze- staię zaraz na pierwszey cyfrze maiącey wartość, z dzielenia wypadaiącey. W powszechności, dziele- nia niepotrzeba ciągnąć tylko do tylu cyfer wár- tuiących (biorąc z pierwszą wynalezioną), ile znay- duie się mieysc między tą cyfrą, i między pierwszą cyfrą pierwszey wartości przybliżoney, głoski x; tu między 9, (które są pierwzą cyfrą wártuiącą w wielorazie 0,09) i między 2, (które są pierwszą cy- frą ilości 2,6, to iest pierwszey wártości przybliżoney głoski x) nieznayduie się tylko iedno mieysce, dla tego przestaię na pierwszey wártuiącey cyfrze 9.

Wártość tedy głoski x, to iest $x = -2,6 + z$ przemienia się na $x = -2,6 - 0,09$, to iest na $x = -2,69$.

Zeby zaś mieć tę wártość ieszcze doskonalszą, zmyślam sobie znowu $x = -2,69 + t$. Co mi da $x^3 = (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 \cdot t; -5x = -5(-2,69) - 5t + 6 = +6$. A zatém po odprawionych dzia- łaniach, będzie $-0,015109 + 16,7083t = 0$; skąd wy- ciągam, $t = \frac{0,015109}{16,7083}$, i mam naostatek $t = 0,000904$.

Wartość tedy głoski x, to iest $x = -2,69 + t$, przemienia się na $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$ . .

Gdyby potrzeba wyciągała ieszcze doskonal- szey wártości, trzebaby zrobić $x = -2,689096 + u$, i dokończyć tymże sposobém co wyżey.

RO-

ROZDZIAŁ DRUGI.

W którym daie się przystósowanie Algebry do Arytmetyki i do Jeometryi.

169. Oznaczywszy sposobém powszechnym, każdą z ilościów bądźto wiadomych bądź niewiadomych, wchodzących w zagadnienie, i wyraziwszy w zrównaniach wszystkie warunki zawiéraiące się w zagadnieniu, można go iuż zupełnie z pamięci spuścić, niezabawiaiąc się potém, tylko iedynie zrównaniami i przystósowaniém reguł onym przyzwoitych. Natenczas byleby mieć w przytomney pamięci to znaczenie, które się dało bądźto zna-

kóm, bądźto roſporządzeniu głoſek, każde zrównanie ſłużyć może niby za iaką xiążkę, gdzie z większą łatwością wyczytać ſię daią różne ſtóſunki które wiążą ilości iedne z drugiémi. Można także przy pomocy rozmaitego przyſtóſówania reguł przepiſanych w piérwſzym Rozdziale, dawać takowym zrównaniom coraz nowe poſtaci, pod któremiby pomiénione ſtóſunki tym prędzéy dały ſię poſtrzédz. Słowém, zrównania uważać ſobie można, iakoby zbiór iaki właſnościów, należących do ilościów zawiéraiących ſię w tych zrównaniach, i rozwiązań powſzechnych wielkiéy liczby zagadnień, o których wcale niemyśliło ſię, i o których ani nawet domyślać ſię można było, żeby z głowném zagadniéniém miały tak bliſki związek.

Jakóż, ponieważ reguły ſłużące do wynaleziénia wártości ilościów niewiadomych, maią wſzyſtkie za cél, żeby każdą niewiadomą przeſtawić tylko ſamę iednę do piérwſzéy części zrównania, a w drugiéy części żeby ſię znaydówały wſzyſtkie inne ilości, i ponieważ te reguły oczywiście da-

ią

ią ſię przyſtóſówać do każdéy któréykolwiek ilości, zawiéraiącéy ſię w zrównaniu, przeto iawna ieſt, że przy pomocy tychże reguł, zawſze można wſzelką iakąkolwiek ilość wchodzącą w zrównanie, ſamę iednę przeſtawić do piérwſzéy części, tak żeby inne wſzyſtkie ſkładały drugą część. A na ten czas rzecz znayduie ſię bydź w takim przypadku, iak gdyby trzeba było rozwiązać zagadniénie, w którém wſzyſtkie ilości położone w drugiéy części, byłyby wiadome, a ſama tylko ilość przeſtawiona do piérwſzéy części, znaydówała ſię bydź niewiadoma. A ſtąd pokazuie ſię, że każde zrównanie rozwięzuie tyle różnych zagadnień, ile zawiéra w ſobie różnych ilościów. Obiaśniymy to przykładami.

Właſności powſzechne Progreſſyów Arytmetycznych.

170. Widzieliśmy wyżéy (Arytm. 190), że każdy którykolwiek wyráz, Progreſſyi Arytmetycznéy roſnącéy, ſkłada ſię z piérwſzego wyrazu, pomnożonego o różnicę powſzechną, tyle kroć powtó-

 rzorzóną, ile znaydówać ſię będzie wyrazów przed tym wyrazém, o który rzecz idzie.

Jeżeli tedy oznaczymy przez a liczebną wártość piérwſzego wyrazu; przez u wártość tego wyrazu o który rzecz idzie; przez d różnicę ſpólną albo ſtóſunek w Progreſſyi panuiący; a naoſtatek przez n całą liczbę wyrazów; natenczas, liczba wyrazów poprzèdzaiących wyráz u, będzie $n - 1$; i podanie dopiéro wyżéy wzmiankówane, da ſię Algebraicznie wyrazić w tém zrównaniu, $u = a + (n - 1)d$, przez które można dóyśdź wártości oſtatniego wyrazu u, kiedy będą wiadome te trzy rzeczy, to ieſt ſtóſunek progreſſyi d, liczba wyrazów n, i wártość piérwſzego wyrazu a.

Ale że w to zrównanie wchodzą cztéry ilości, więc mówię że przez nie rozwięzuią ſię cztéry zagadnienia powſzechne. Jakóż:

1ód Jeżeli uważać będziém a iako niewiadomą, i ſzukać będziém iego wártości podług reguł podanych w piérwſzym Rozdziale, wypadnie $a = u - (n - 1)d$, ſkąd pokazuie ſię, iż chcąc znaléśdź piérwſzy wyráz Progreſſyi Arytmetycznéy roſnącéy, trzeba odiąć od oſtatniego wyrazu u, różnicę d powtórzoną $n - 1$ razy, to ieſt różnicę wziętą tyle razy mniéy iednym razém, ile znayduie ſię w Progeſſyi wſzyſtkich wyrazów.

2re Poczytawſzy znowu n za niewiadomą, zrównanie $u = a + (n - 1)d$, które nieco innego ieſt, tylko $u = a + nd - d$, po przeſtawiéniu daie, $nd = u - a + d$, a po rozdzieléniu będzie, $n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1$; co mi znać daie, że maiąc wiadomy piérwſzy wyráz a, oſtatni wyráz u, i ſtóſunek progreſſyi arytmetycznéy d, potrafię wynaléśdź liczbę wſzyſtkich wyrazów progreſſyi, odiąwſzy piérwſzy wyráz od oſtatniego, a reſztę rozdzieliwſzy przez ſtóſunek d, i naoſtatek dodawſzy iedność do wielorazu. *Np.* ieżeli wiém, że piérwſzym wyrazém progreſſyi ſą 5, oſtatnim 37, a różnicą 2; od 37 odéymuię 5, zoſtaie mi 32, które rozdzielone przez różnicę 2, da-

daią na wieldráz 16, do tych 16 dodawszy 1, wypada mi na liczbę wszystkich wyrazów téy progressyi 17.

3^{cie} Naostatek, ieżeli uważać będę d, iako niewiadomą, w zrównaniu $u = a + (n-1)d$, po przestawiéniu miéć będę, $(n-1)d = u - a$, a po rozdzieleniu przez $n-1$, będzie $d = \frac{u-a}{n-1}$; co mi pokazuie, że chcąc miéć wiadomą różnicę maiącą panować w progressyi arytmetycznéy, z któréyby piérwszy i ostatni wyráz, iako téż liczba wszystkich wyrazów były znaiome, trzeba odiąć piérwszy wyráz od ostatniego, a resztę rozdzielić przez liczbę wyrazów, mniéy iednym. Ta reguła wychodzi na owę (Arytm. 193), przepisaną do wciśnienia pewnéy liczby ilościów śrzednich proporcyonalnych, między zadane dwie ilości. Powiedziało się tam, iż trzeba odiąć większą od mniéyszéy, a resztę rozdzielić przez liczbę śrzodków, pomnożóną o iedność, co oczywiście wychodzi na iedno; ponieważ liczba śrzódków iest mniéysza dwiéma iednościami, od liczby wyrazów całéy progressyi.

To

To więc samo iedno zrównanie, $a = u + (n-1)d$, daie nam rozwiązanie cztérech zagadniéń powszechnych, albo téż tego iednego, w którém zawiéraią się wszystkie cztèry, to iest: *Z tych cztérech rzeczy, iakie są piérwszy i ostatni wyráz, liczba wyrazów, i różnica progressyi arytmetycznéy, trzy którekolwiek maiąc wiadome, żeby wynaléść czwartą.*

271. Każda inna własność powszechna, wyrażona także w sposób powszechny, tąż samą drogą doprowadziłaby nas do rozwiązania tylu różnych zagadniéń, ile wchodzić będzie ilościów w wyrażenie téyże własności.

Np. ieszcze i to iest własnością progressyi arytmetycznych: *Iż ażeby miéć summę, wynikaiącą z dodania wszystkich wyrazów iakiéykolwiek bądź progressyi arytmetycznéy, trzeba dodać piérwszy wyráz do ostatniego, a wypadek rozmnożyć przez połowę liczby wszystkich wyrazów.*

Np. Zeby miéć summę, wynikaiącą z dodania stu piérwszych

 wy-

wyrazów téy progreſſyi ÷ 1. 3. 5. 7. i. t. d. któréy ſetnym wyrazém byłoby 199; do oſtatniego wyrazu 199, dodaię piérwſzy wyráz 1, a wypadek 200 mnożę przez 50, to ieſt przez połowę liczby wyrażów; co mi da 10000, na ſummę wynikaiącą z dodania ſtu piérwſzych wyrazów nieparzyſtych.

Naſtąpi zaráz niżéy obiaśniénie téy własności, teráz zaś żebyśmy ſię od roſpoczętéy rzeczy nieoddalali, zachowawſzy też ſáme oznaczenia co wyżéy, ieżeli nadto nazwiémy s ſummę wynikaiącą z dodania wſzyſtkich wyrazów, mieć będziém na wyrażenie Algebraiczne pomiénionéy właſności, $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$.

To zrównanie, ſłuży do rozwiązania naſtępuiącego zagadniénia powſzechnego, w którém znayduie ſię ich cztéry: *Z tych cztérech rzeczy, iakie ſą piérwſzy i oſtatni wyráz, liczba wyrazów, i ſumma wynikaiąca z dodania wſzyſtkich wyrazów progreſſyi arytmetycznéy, maiąc trzy którekolwiek rzeczy wiadome, żeby wynaléśdź czwartą.*

Ja-

Jakóż 1^{od} ieżeli a, u i n, będą znaiome, zrównanie pokaże zaráz bezśrzednie wártość głoſki s. 2^{re} Jeżeli zaś ſą znaiome a, u, i s; żeby mieć n, trzeba wyrugówać dziélnika 2, co da $2s = (a + u) \times n$ albo $(a + u) \times n = 2s$; a rozdziéliwſzy przez $a + u$ będzie, $n = \frac{2s}{a + u}$; zrównanie daiące wártość głoſki n, bo ilości a, u, s, ſkładaiące tę wártość, rozumieią ſię bydź wiadome. 3^{cie} i 4^{te} Jeżeliby a, s, i n, albo u, s i n, były znaiome, żeby mieć u álbo a, trzeba powrócić do zrównania $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, z którego wyrugówawſzy ułamek, będzie $2s = (a + u) \times n$, a rozdzieliwſzy przez n, wypadnie $a + u = \frac{2s}{n}$, ſkąd dopiéro wyciąga ſię $u = \frac{2s}{n} - a$, to ieſt, wártość zadoſyć czyniąca piérwſzemu zagadniéniu, i $a = \frac{2s}{n} - u$, to ieſt, wártość zadoſyć czyniąca drugiému zagadniéniu.

Powróćmy teráz do owéy właſności, którą obiecaliśmy obiaśnić.

Ja-

Jawna ieſt, że ieżeli oznaczymy iak wyżéy, piérwſzy wyráz przez a, a różnicę przez d, wſzelką progreſſyą arytmetyczną roſnącą, będziemy mogli wyrazić iak naſtępuie, $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d$, i. t. d. Daymy teráz że pod tą progreſſyą arytmetyczną ieſt napiſana taż ſama progreſſya, ale porządkiém odwrotnym, wyráz w wyráz odpowiadaiąca piérwſzemu rzędowi, iakoto:

$$\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d .$$
$$\div a + 6d . a + 5d . a + 4d . a + 3d . a + 2d . a + d . a .$$

Ponieważ te obie progreſſye ſą ſobie równe, więc iawna ieſt, że ſumma wyrazów iednéy z tych dwóch progreſſyów, ieſt połową obu razém złączonych; daléy zaſtanowiwſzy ſię cokolwiek, widziéć można, że dwa wyrazy którekolwiek, w tych dwóch progreſſyach ſobie odpowiadaiące, czynią i powinny zawſze czynić iednakową ſummę, która równa ſię ſummie piérwſzego i oſtatniego wyrazu z ſobą dodanych, piérwſzéy progreſſyi; więc żeby znaléſdź ſummę obu progreſſyów, trzeba wziąść piérwſzy i oſtatni wyráz z ſobą dodane ie-

dnéy progreſſyi, i takowy wypadek powtórzyć tyle razy, ile będzie w progreſſyi wyrazów, a zatém żeby miéć ſummę tylko iednéy progreſſyi, trzeba dodać piérwſzy wyráz do oſtatniego, a wynikaiący ſtąd wypadek powtórzyć tylko przez połowę tyle razy, ile znayduie ſię wſzyſtkich wyrazów, to ieſt trzeba go rozmnożyć przez połowę liczby wyrazów.

172. Te tedy ośm zagadnień powſzechnych, które dopiéro rozwiązaliśmy, zaſadzaią ſię tylko na dwóch fundamentach, wyżéy podanych (170 i 171). A ponieważ ich rozwiązanie, wypływa bezśrzednie z dwóch zrównań Algebraicznie wyrażaiących dane zagadnienie, przeto łatwo ſtąd zrozumiéć można, iakim ſpoſobém przy pomocy Algebry, z iednego niby źrzódła można wynaléſdź wſzyſtkie inne prawdy od niego zależące.

Lubo te własności, nie ſą wſzyſtkie zarówno użyteczne, atoli będąc z ſiebie proſte, ſą tém zgodniéyſze do okazania użycia zrównań, a zatém weźmiémy ie ſobie za przykład w naſtępuiącém okazaniu tego użycia.

W tém wſzyſtkiém co poprzédziło, niémieliśmy względu o iednen ráz tylko na iedno zrównanie. Ale ieżeli będzie dwoie albo większa liczba zrównań, wyrażaiących różne właſności niektórych ilościów, a oráz ieżeli ſię znaydą niektóre z tych ilościów ſpólne owym zrównaniόm, natenczas można z nich dóyśdź bardzo wiele innych właſnościów, a to z oſobliwſzą łatwością. *Np.* te dwa zrównania fundamentalne progreſſyów arymetycznych, to ieſt $u = a + (n-1)d$ i $s = (a+u) \times \frac{n}{2}$, maią w ſobie trzy ſpólne ilości, iakoto a, u, i n. Jeżeli z każdego z tych dwóch zrównań wyciągnie ſię koléyno wártość iednéy któréykolwiek z tych trzech ilościów, a potém ieżeli te dwie wártości przyrównaią ſię iedna do drugiéy, wypadnie ſtąd nowe zrównanie, w którèm iuż owa ilość znaydować ſię niebędzie, i które, pokaże ſtóſunek zachodzący między innèmi cztèrema ilościami, a to bezwzględnie na owę ilość wyrugowaną. *Np.* ieżeli z każdego zrównania

nia wyciągnę wártość głoſki a, będę miéć te dwie wártości, $a = u - (n-1)d$, i $a = \frac{2s}{n} - u$; a przyrównawſzy iednę do drugiéy, będzie $u - (n-1)d = \frac{2s}{n} - u$; zrównanie w którém ilości u, n, d, i s, uważaiąc koléyno iako niewiadome, wyciągnę z niego iak wyżéy cztéry nowe i powſzechne właſności progreſſyów Arytmetycznych. *Np.* poczytawſzy s za niewiadomą, miéć będę $s = \frac{2nu - n.(n-1)d}{2}$, wyrażenie, w którém wyczytuię ſpoſób znaleziénia ſummy progeſſyi arytmetycznèy, przy pomocy oſtatniego wyrazu, różnicy i liczby wyrazów; bo tylko z tych trzech ilościów znaiomych, ſkłada ſię druga część poprzédzaiącego zrównania.

Gdyby zamiaſt wyrugówania głoſki a, wyrugówaliśmy byli u, albo n, z każdego wyrugówania mielibyśmy byli nowe zrównanie, zawiéraiące w ſobie cztèry z tych pięciu ilościów a, u, n, d, s; z których każdą uważaiąc koléyno iako niewiadomą, ka-

każde nowe zrównanie, dałoby nam cztèry formuły, a zatèm cztèry różne wyrażenia ilości a, u, n, d, s; z tych zaś wyrażéń, każde ma swoię szczególną użyteczność, podług okoliczności zadanego zagadniénia względém progressyów arytmetycznych, w którém te lub owe okoliczności trafić się mogą wiadome. *Np.* gdyby mi potrzeba było znaléśdź summę progressyi arytmetycznèy, w którèy byłby mi wiadomy piérwszy wyráz, różnica i liczba wszystkich wyrazów; w tym razie ponieważ ostatni wyráz iest niewiadomy, przeto ruguię u, i miéć będę zrównanie niezawiéraiące w sobie tylko głoski a, n, d, i s, z którégo łatwo wyciągnąć mogę wártość głoski s.

Wniéśmy sobie stąd, że dwa zrównania $u = a + (n - 1)\,d$, i $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ daią rozwiązanie wszelkich zagadniéń tyczących się progressyów arytmetycznych, byleby w nich miéć wiadome bezśrzednie trzy którekolwiek ilości z tych pięciu a, u, n, d, s.

173. Zebyśmy zobaczyli iakie przystosówanie tych fundamentów, daymy iż ma bydź wyrachówana liczba kul umiészczonych w podstawie piramidy tróykątnéy.

Jawna iest, że liczba kul zawiéraiących się w każdym rzędzie równoległym iednemu z boków, umuiéysza się coráz o 1; i że liczba rzędów równa się liczbie kul umieszczonych w iednym boku. A zatém ieżeli oznaczymy przez n takową liczbę, summa wszystkich kul, będzie summa wszystkich wyrazów progressyi arytmetycznéy rosnącéy, poczynaiącéy się od 1, któréy ostatnim wyrazém będzie n, i liczbą wyrazów także n; będzie tedy wyrażona przez $(n + 1) \times \frac{n}{2}$; tak że ieżeli *np.* w iédnym boku będzie 6 kul, w całéy podstawie będzie ich 21.

Taż sama zasada, służąca do układu wyrazów progressyi arytmetycznéy, może także bydź użyta do wynaleziénia powiérzchni nierównoległoboku albo tróykąta. Albowiém zmyśliwszy sobie wysokość podzieloną na nieskończoną liczbę równych cząstek przez liniie równoległe podstawie, łatwo widzieć się daie, że cały nierównoległobok tym sposobém znaydzie się bydź podzielony na nieskończoną liczbę maléńkich nierównoległoboków, powiększaiących się coráz o tęż samę ilość. Zeby tedy miéć całość złożoną z tych wszystkich nierównoległoboków, nietrzeba więcéy (171), tylko dodać dwa skrayne a połowę ich rozmnożyć przez liczbę wyrazów; ale że takowe nierównoległoboki, rozumieią się bydź wysokości nieskonczenie małéy, więc każdego z nich można uważać, iakoby był równy swoiéy podstawie rozmnożonéy przez swoię małą wysokość. A tak oznaczywſzy przez B i b dwie podſtawy ſkrayne tych nierównoległoboków, przez h ich ſpólną wyſokóść, a przez n liczbę części umieſzczonych w całéy wyſokości, miéc będziem $\frac{Bh + bh}{2} \times n$, albo $\frac{B + b}{2} \times hn$; że zaś nh wyraża całą wyſokość nierównoległoboku, więc trzeba rozmnożyć połowę ſummy dwóch podſtaw naprzeciw ſobie położonych przez wyſokość zadanego nierównoległoboku.

O ſummówaniu wyrazów Prógreſſyi arytmetycznéy iakiéykolwiek, podnieſionych do rożnych ſtopniów.

174. Niechay będzie zadano kilka liczb a, b, c, d, i.t.d. położonych w progreſſyi arytmetycznéy w któréyby panowała różnica r.

Będzie 1ód $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$

2re ſkwadrówawſzy, będzie

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$
$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$
$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$
$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2$$

3cie podnióſſzy do ſześcianu, będzie

$$b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$
$$c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$
$$d^3 = c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3$$
$$e^3 = d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3.$$

Teráz, ieżeli zrobimy dodanie zrównań kwadratowych, i drugie podobneż dodanie zrównań ſześciénnych, po wyrugówaniu wyrazów

zów równych i ſobie podobnych, położonych w przeciwnych częściach zrównań, miéć będziém: 1ód $e^2 = a^2 + 2ar + 2br + 2cr + 2dr + 4r^2$ albo $e^2 = a^2 + 2r\,(a + b + c + d) + 4r^2$; a w powſzechności widziéć ſię daie, że ieżeli ilości a, b, c, d, i. t. d. oznaczymy przez n, oſtatnią ilośc przez u, ſummę tych wſzyſtkich ilościów przez s', wypadnie $u^2 = a^2 + 2r\,(s' - u) + (n - 1)\,r^2$; bo $2r$ znayduie ſię bydź rozmnożone przez wſzyſtkie ilości a, b, c, d, i.t.d. oprócz oſtatniéy, a zaś r^2 znayduie ſię bydź dodane z ſobą tyle razy, ile ieſt zrównań, to ieſt tyle razy mniéy iednym razém, ile będzie ilościów a, b, c, i. t. d. A że to zrównanie zawiéra w ſobie s', więc łatwo będzie wyciągnąć onego wártość, a zatém miéć wyrażenie ſummy wſzyſtkich wyrazów progreſſyi arytmetycznéy, albowiém będzie

$$s' = \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)\,r^2}{2r} + u.$$

2re Jeżeli znowu zrobimy dodanie zrównań ſześciénnych, po wyrugówaniu ilościów podobnych ſobie i równych, w przeciwnych częściach zrównania położonych, miéć będziém : $e^3 = a^3 + 3a^2r + 3b^2r + 3c^2r + 3d^2r + 3ar^2 + 3br^2 + 3cr^2 + 3dr^2 + 4r^3$; to iest $e^3 = a^3 + 3r.(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2 (a + b + c + d) + 4r^3$. Gdzie daie się widzieć, że ilość mnożąca $3r$, iest summa wszystkich kwadratów oprócz ostatniego, że ilość mnożąca $3r^2$, iest summa wszystkich ilościów oprócz ostatniéy, i naostatek sześcian r^3 znayduie się bydź dodany z sobą tyle razy, ile było zrównań, to iest tyle razy mniéy iednym razém, ile będzie ilościów; a zatém w powszechności, oznaczywszy przez s'' summę kwadratów, a przez u ostatni wyraz będzie $u^3 = a^3 + 3r (s'' - u^2) + 3r^2 (s' - u) + (n-1)r^3$.

Więc maiąc wiadomy piérwszy wyraz, ostatni, różnicę, i liczbę wyrazów, przy pomocy tego zrównania, można miéć wartość głoski s'', to iest summę kwadratów; bo ilość s' iuż mamy wynalezioną. Jeżeli tedy zamiast s' położymy onego wartość, będzie $u^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r \left(\frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2}\right) + (n-1).r^3$, albo $2u^3 = 2a^3 + 6rs''$

$- 6ru^2 + 3ru^2 - 3ra^2 - 3.(n-1).r^3 + 2.(n-1).r^3$, co po zwyczaynych działaniach, wychodzi na $s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1).r^3}{6r}$

Wziąwszy podobnież czwarte stopnie zrównań, $b = a + r, c = b + r$, i t. d. dodawszy ie, i obszedłszy się z niémi poprzédzaiącym sposobém, znalezlibyśmy także summę sześcianów. Toż rozumié się o wyrazach progressyi, podniesionych do wyższych stopniów.

Jeżeli przypuścimy, że progressya arytmetyczna o którą rzecz idzie, składa się z naturalnego ciągu liczb poczynaiących się od iedności, iakoto 1, 2, 3. i t. d. w takim razie, będzie $a = 1$, $u = n$; albowiém mamy w powszechności $u = a + (n-1).r$, co tu przemiénia się, na $u = 1 + n - 1 = n$; a zatém będzie $s'' = \ldots \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6}$, to iest $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = n.\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} = n.\frac{(n-1).(2n+1)}{6}$.

175. Zebyśmy zobaczyli w przykładach przystósówanie tych sposobów, daymy iż iest zadano wynaléśdź liczbę kul, umieszczo-

nych w piramidzie czworokątnéy, maiąc wiadomą liczbę kul iednego boku podſtawy teyże piramidy. Jawna ieſt, że ta piramida ſkłada ſię z warſztw równoległych podſtawie, które ſą wſzyſtkie kwadratami, maiącémi boki coráz umnieyſzaiące ſię albo coráz powiękſzaiące ſię o iednę iedność, ieżeli piramida uważa ſię od podſtawy do wiérſzchołka, albo téż od wiérſzchołka do podſtawy. Cálkowitością tedy, będzie ſumma kwadratów z liczb w naturalnym porządku po ſobie naſtępuiących, aż do liczby n, oznaczaiącéy ilość kul umieſzczonych w iednym z boków podſtawy; zatém ta cálkowitość będzie wyrażona przez $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$, to ieſt dla wynaleziénia iéy, trzéba zachować naſtępuiącą regułę --- *Do liczby kul umieſzczonych w iednym z bokòw podſtawy, i do podwòyności téyże liczby, doday po iednemu; te dwa wypadki rozmnóż ieden przez drugi, a mnogość ſtąd wynikaiącą, znowu przez liczbę kul zawiéraiących ſię w tymże boku; a nao ſtatek weźmiy ſzoſtą część téy oſtatniéy mnogości.* Np. ieżeli piramida czworokątna, mieści 6 kul w boku ſwoiéy podſtawy; do 6 i do podwóyności *6ciu* to ieſt do 12. dodaię 1, co mi da 7 i 13, które rozmnożoné między ſobą, uczynią 91; mnożę 91 przez 6 i mam 546, których ſzóſta część 91, będzie liczbą kul umieſzczonych w zadanéy piramidzie.

Gdyby piramida niémiała podſtawy kwadratowéy, ale tylko równoległoboczną, w takim razie, trzebaby ią ſobie zmyślić podzieloną na 2 części (fig. 2.) z których iedna byłaby piramidą kwadratową, o któréy dopiéro mówiło ſię, a druga byłaby wielościanem, w którym zawartą liczbę kul możnaby wynaleśdź, rozmnożywſzy liczbę kul umieſzczonych w tróykącie CEH, przez liczbę kul zawartych w linii CB albo w linii $AB-1$.

176. A zatem podług tego co ſię rzekło (173), ieżeli oznaczymy przez m. liczbę kul umieſzczonych w górnéy krawędzi AB, mieć będziém na całą liczbę kul, zawiéraiących ſię w piramidzie podłużnéy, to wyrażenie, $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + n.\frac{n+1}{2}.(m-1)$. Ta zaś ilość ieſt $= n\frac{n+1}{2} \times \left(\frac{2n+1}{3}+m-1\right) = n.\frac{n+1}{2}\left(\frac{3m+2n-2}{3}\right) = n.\frac{n+1}{2}.\left(\frac{m+2(m+n-1)}{3}\right)$. A iako iawna ieſt, że $m+n-1$, wyraża liczbę kul umieſzczonych w krawędzi DF, albo w drugiéy równoległéy GI, więc idzie zatém, iż *chcąc wyrachòwać liczbę kul zawiéraiących ſię w piramidzie podłużnéy, trzeba rozmnożyć liczbę kul umieſzczonych w ścianie tròykątnéy, przez trzecią część ſummy, wynikaiącéy z dodania między ſobą trzech krawędziów równoległych.*

I tak, ponieważ w naymnieyſzéy krawędzi mieści ſię 21 kul, a w boku podſtawy tróykątnéy 8 kul, więc w każdéy z dwóch innych krawędziów równoległych, mieścić ſię będzie po $21+8-1$ to ieſt po 28 kul; a zatém odprawiam działanie iak naſtępuie:

Bok podſtawy tróykątnéy - - -	8
Dodawſzy 1, będzie - - - - -	9
Sciana tróykątna, albo połowa mnogości uczyni	36
Summa trzech krawędziów - - - - - -	77
Liczba wſzyſtkich kul (trzecią część mnogości)	924.

 177.

177. Widzieliśmy w Jeometryi, iż chcąc obrachować bryłowatość piramidy, albo ſtożka iakiegokolwiek, trzeba rozmnożyć powiérzchnią podſtawy przez trzecią część wyſokości. To podanie można także dowieśdź, przez formułę ſłużącą do ſummowania kwadratów; ale wprzód mamy uważyć, że ieżeli w formule $s'' = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$, przypuścimy liczbę wyrazów n bydź nieſkończoną, to poprzedzaiące wyrażenie przemiéni ſię, na $s'' = \frac{n^3}{3}$, albo z przyczyny że $u = n$, iak widzieliśmy wyżéy, na $s'' = \frac{u^2 n}{3} = u^2 \frac{n}{3}$. Jakóż, rozumiéć n bydź nieſkończone, ieſtto rozumiéć, że iuż pomnożyć ſię nieda żadną ilością ſkończoną; a zatém ażeby w rachunku wyrazić to przypuſzczenie, przez które n rozumié ſię bydź nieſkończone, trzeba koniecznie poczytać $n+1$ i n, za ilości równe ſobie, tudzież $2n+1$ i $2n$ także za ilości równe ſobie; a w takim razie formuła $s'' = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ przemiéni ſię, na $s'' = \frac{n.n.2n}{6} = \frac{n^3}{3} = n^2 \times \frac{n}{3}$, albo na $s'' = u^2 \frac{n}{3}$, położywſzy zamiaſt n wártość onego u.

Lecz dowiedliśmy indziéy (Jeometr. 202), że zmyśliwſzy ſobie piramidę iakoby złożoną z wárſztw czyli zrazów równoległych podſtawie, takowe zrazy maią ſię między ſobą iak kwadraty odległościów ich od wiérzchołka; więc wyſtawiwſzy ſobie w myśli, wyſokość podzieloną na nieſkończoną liczbę równych cząſtek, odległości wypa-

pa-

padać będą w progreſſyi liczb w naturalnym porządku po ſobie naſtępuiących, a wárſztwy czyli zrazy równoległe wypadać będą w progreſſyi kwadratów tychże liczb; a zatém ſumma wſzyſtkich wárſztw, wynaydzie ſię tymże ſpoſobém co i ſumma kwadratów. Formuła zaś $s'' = u^2 \frac{n}{3}$ pokazuie, że trzeba rozmnożyć oſtatni kwadrat przez trzecią część liczby tychże kwadratów; więc żeby miéć ſummę wſzyſtkich wárſztw, trzeba rozmnożyć oſtatnią to ieſt podſtawę, przez trzecią część liczby tychże wárſztw, to ieſt przez trzecią część wyſokości.

178. Umieiąc ráz wynaléśdź ſummę ſtopniów wielu liczb danych w progeſſyi arytmetyczney, bardzo łatwo będzie można wynaléśdź ſummę nieſkończoney liczby progreſſyów iakiegokolwiek gatunku. *Np.* maiąc zadaną progreſſyą arytmetyczną taką, ÷ 3.7.11.15.19. i.t.d. iawna ieſt, że dodaiąc koléyno wyrazy ieden do drugiego, złożyłby ſię rzęd naſtępuiący: 3, 10, 21, 36, 55, i.t.d. który można zſumować. Téy znowu progreſſyi wyrazy dodawſzy z ſobą, wyniknąłby rzęd: 3, 13, 34, 70, 125, i.t.d. który podobnież można zſumować; tóż rozumiéć o wyrazach téy oſtatniéy progeſſyi z ſobą dodanych, i tak daléy bez końca.

Jakóż, ſumma wyrazów progreſſyi arytmetycznéy ieſt $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, albo położywſzy zamiaſt u onego wártość, $u = a + r(n-1)$, $s = [2a + r.(n-1)] \times \frac{n}{2}$. Ta tedy wártość głoſki s, oznacza którykolwiek wyráz drugiego rzędu. Więc żeby mieć ſummę wyrazów drugiego rzędu, trzeba zſumówać rzęd ilościów, któryby wypádł z ilości $[2a + r.(n-1)].\frac{n}{2}$ kładąc koléyno zamiaſt n wſzyſtkie liczby w naturalnéy progreſſyi idące, iakoto 1, 2, 3, i. t. d. A że ta ilość wychodzi na $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, w którèy a i r zoſtaią niedomiénne; więc głoſce n dawſzy iakąkolwiek bądź wártość, iawna ieſt, że chcąc zſummówać wſzyſtkie ilości wyrażone przez an, nietrzeba tylko n, a wynikaiącą ſummę rozmnożyć przez a; takową zaś ſummą ilościów wyrażonych przez n, ieſt ſumma progreſſyi arytmetycznèy, złożonèy z liczb idących w porządku naturalnym.

nym. Toż ſamo rozumówanie ſłuży także względém $\frac{r}{2}n$. Co ſię tyczè ilości $\frac{r}{2}n^2$, ponieważ r zoſtaie nieodmiénne, chociaż zamiaſt n weźmie ſię bądź iakakolwiek liczba, więc zſummuią ſię wſzyſtkie ilości wyrażone przez n^2, wziąwſzy ſummę kwadratów z liczb naturalnych, i rozmnożywſzy ią przeź $\frac{r}{2}$. A zatèm na ſummę ilościów an, wypadnie $a.(n+1).\frac{n}{2}$; na ſummę ilościów $\frac{r}{2}n$, wypadnie $\frac{r}{2}.(n+1).\frac{n}{2}$; na ſummę zaś ilościów $\frac{r}{2}n^2$, będzie $\frac{r}{2} \times . \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$; tak że ſumma ilościów $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, albo ſumma wyrazów drugiego rzędu, uczyni $a.(n+1).\frac{n}{2} + \frac{r}{2}.\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \frac{r}{2}.(n+1)\frac{n}{2}$; co wychodzi, na $a.(n+1).\frac{n}{2} + r.\frac{(n-1).n.(n+1)}{6}$. A ponieważ znowu każdy wyráz trzeciego rzędu, ieſt ſumma wyrazów drugiego rzędu, więc takowy trzeci rzęd zſummuie ſię, zſummówawſzy różne czę-

części tego oſtatniego wypadku, który także niebędzie wyciągać tylko zſummówania ſtopniów liczb położonych w naturalnym porządku, i tak daléy bez końca. Jeżeli przypuścimy bydź $a = 1$ i $r = 1$, to ieſt ieżeli progreſſya piérwiaſtkowa, ſkłada ſię z liczb w naturalnym porządku po ſobie naſtępuiących, to w takim razie, progreſſye o których tu mowa, ſtaią ſię *liczbami* (iak nazywaią) *figuralnémi* (les nombres figurés).

Podobnymże ſpoſobém, możnaby zſummówać inne rzędy, złożone z dodania rzędu kwadratów, albo rzędu ſześcianów i. t. d. Słowém, podług tych przepiſów można zſummówać wſzelki rzęd ilościów, któréгoby wyráz iakikolwiek zawiérał w ſobie tyle ſtopniów doſkonałych téyże liczby u, ile ſię ſpodoba, i chociażby te ſtopnie znaydówały ſię bydź rozmnożone przez iakiekolwiek bądź liczby, byleby wiadome.

To co ſię dopiéro powiedziało, może bydź przyſtóſówano do wynaleziénia liczby kul umieſzczonych w piramidzie tróykątnéy. Jakóż każda warſztwa kul równoległa podſtawie, ieſt wyrażona (173) przez $n . \frac{n+1}{2}$;

więc

więc całością, będzie ſumma wynikaiąca z ilościów $n . \frac{n+1}{2}$; króra, (zrobiwſzy $r = 1$ i $a = 1$ w znalezionéy wyżéy wártości téy ſummy), przemiéni ſię na $n . \frac{n+1}{2} . \frac{n+2}{3}$; ſkąd wynika reguła bardzo proſta.

179. I odwrotnie, ieżeli maiąc wiadomą całą liczbę kul umieſzczonych w piramidzie tróykątnéy, trzebaby wynaléśdź było liczbę kul n umieſzczonych w każdéy krawędzi; oznaczywſzy przez a całą liczbę, mielibyśmy $n . \frac{n+1}{2} . \frac{n+2}{2} = a$, albo $n^3 + 3n^2 + 2n = 6a$, zrównanie, daiące ſię rozwiązać podług ſpoſobu wyżéy przepiſanego (159). Lecz pomimo tego ſpoſobu, można ſobie poſtąpić krótſzą drogą; uważaiąc że ponieważ $n^3 + 3n^2 + 2n$ ieſt ilość mniéyſza aniżeli ſześcian ilości $n+1$, więc $6a$ muſi bydź także mniéyſze iak ſześcian téyże ilości $n+1$; a zatém że piérwiaſtek ſześciénny z $6a$, będzie mniéyſzy od $n+1$. Z téyże pzyczyny, ponieważ n muſi bydź liczbą całą, więc $n^3 + 3n^2 + 2n$ będzie ilością większą iak ſześcian z ilości $n-1$; a zatém piérwiaſtek ſześciénny z ilości $6a$, niemoże różnić ſię od n nawet o iednę iedność; więc n ieſt piérwiaſtkiém ſześciénnnym naywiększego ſześcianu zawiéraiącego ſię w $6a$.

Gdyby ſzło o piramidę kwadratową, mielibyśmy podług (175), $n . \frac{n+1}{2} . \frac{2n+1}{3}$ albo $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = a$, albo $n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = 3a$; ſkąd na fundamencie podobnego poprzédzaiącemu rozumówania, wnieślibyśmy

że

że n musi bydź pierwiastkiem sześciennym nayWiększego sześcianu zawierającego się w ilości $3a$.

Własności i użycia Progressyów Jeometrycznych.

180. Sposobém podobnym tamtemu, który podaliśmy do summowania stopniów wyrazów progressyi arytmetyczney, można także wynaléśdź i summę wyrazów Progressyi Jeometryczney.

Daymy że $a, b\,c, d, e$, i.t.d. są koléyne wyrazy progressyi Jeometryczney rosnącey, a stósunek w niéy panuiący iest q. Ponieważ każdy wyraz, zawiéra w soqie q razy wyraz poprzédzaiący, więc z tey własności wypadną następuiące zrównania, $b=aq, c=bq, d=cq, e=dq$, i.t. d. A zatèm dodawszy te zrównania, będzie $b+c+d+e=(a+b+c+d)q$; gdzie widzieć można, że w powszechności piérwsza część składa się zawsze z summy wszystkich wyrazów oprócz piérwszego, a druga z stósunku rozmnożonego przez summę wynikaiącą z dodania wszystkich wyrazów oprócz ostatniego. A przeto, oznaczywszy przez s summę wszy-

wszystkich wyrazów, a przez u ostatni wyraz, poprzédzaiące zrównanie przemiéni się, na $s-a=(s-u)q$, albo na $s-a=qs-qu$, skąd wyciągnie się $qu-a=qs-s=(q-1)s$, a zatèm będzie $s=\frac{qu-a}{q-1}$, formuła, przez którą (byleby miéć wiadomy piérwszy wyraz a i stósunek q) można dóyśdź summy s wszystkich wyrazów.

Taż sama formuła służy także progressyóm ubywaiącym; bo progressya ubywaiąca nieiest co innego, tylko progressya rosnąca wzięta w odwróconym porządku, w którey ostatni wyraz staie się piérwszym, a piérwszy ostatnim.

Gdyby progressya ubywaiąca rościągała się bez końca, natenczas summy s byłoby to wyrażenie, $s=\frac{qu}{q-1}$, gdzie przez u rozumié się piérwszy wyraz. Jakóż, ażeby to wyrazić że progressya rościąga się bez końca to iest nieskończenie, trzeba to w rachunek wprowadzić, co takowe przypuszczenie w sobie zawiéra, to iest, trzeba oznaczyć że ostatni wy-

wyráz ieſt ilością nieſkończenie małą: ſpoſób zaś oznaczenia tego warunku ieſt, ażeby oſtatni wyráz poczytać za nic względém wyrazu qu; bo zoſtawić go, byłoby to dać znać, że przezéń qu może bydź ieſzcze zmniéyſzone, coby było przeciwko piérwſzemu przypuſzczeniu.

A ſtąd pokazuie ſię, iż *ażeby miéć ſummę wſzyſtkich wyrazów progreſſyi jeometryczném, trzeba rozmnożyć nayiękſzy wyráz przez ſtóſunek* * *panuiący w progreſſyi, a odiąwſzy od mnogości nayinniéyſzy wyráz téyże progreſſyi, pozoſtałą reſztę rózdzielić przez ſtóſunek zmniéyſzony o iednę iedność*; tak że gdy progreſſya będzie ubywaiąca nieſkończenie, reguła wychodzi na rozmnożenie nayiękſzego wyrazu przez ſtóſunek, a potém na rozdzielenie przez ſtóſunek zmniéyſzony o iednę iedność.

I-tak, ſummą téy progreſſyi pociągnionéy bez końca $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$ i. t. d. byłoby

* *Przez ſtóſunek, rozumié ſię w powſzechności, liczba oznaczaiąca wiele razy iakikolwiek wyráz progreſſyi, mieści w ſobie wyráz mniéyſzy zaráz po nim bezśrzednie naſtępuiący, tak iż to wyrażenie zarówno ſłuży progreſſyi roſnącéy i progreſſyi ubywaiącéy,*

łoby $\frac{\frac{1}{2} \times 2}{2 - 1}$ albo 1; toż rozumié ſię o ſummie wyrazów téy drugiéy progreſſyi, $\div \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81}$ i. t. d. któréy ſtóſunkiém (uważaiąc ią iako roſnącą) będą 3; bo $\frac{2}{3}$ rozdzielone przez $\frac{2}{9}$, daią 3. Jakóż, ſummą wyrazów téy progreſſyi, ieſt $\frac{\frac{2}{3} \times 3}{3 - 1}$, co wychodzi na 1. W powſzechności, każda progreſſya jeometryczna ubywaiąca nieſkończenie, któréyby każdy wyráz miał za nieodmiennégo licznika, liczbę mniéyſzą o iednę iedność, od mianownika piérwſzego wyrazu, każda mówię taka progreſſya ieſt wárta 1. Bo takowa progreſſya wzięta w powſzechności, wychodzi na $\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3} : \frac{n}{(n+1)^4}$, i. t. d. któréy ſummą ieſt $\frac{\frac{n}{n+1} \times (n+1)}{n+1-1}$, albo $\frac{n}{n}$, to ieſt 1.

181. Widzieliśmy wyżéy (Arytm. 196), że którykolwiek z wyrazów progreſſyi jeomtryczněy, ſkłada ſię z piérwſzego wyrazu, rozmnożonego przez ſtóſunek, podnieſiony do ſtopnia równego liczbie wyrazów poprzedzaiących ten wyráz, o który rzecz idzie. Więc oznaczywſzy przez a piérwſzy wyráz, przez u którykolwiek dalſzy wyráz, przez q ſtóſunek, a przez n liczbę wyrazów, będzie $u = aq^{n-1}$; a że w to zrównanie wchodzą cztéry ilo-

ilości, więc można z niego wyciągnąć cztéry formuły, ſłużące do rozwiązania tego zagadniénia powſzechnego: *Maiąc wiadome trzy z tych cztérech rzeczy, iakie ſą, piérwſzy wyráz, oſtatni, ſtóſunek, i liczba wyrazów progreſſyi jeometryczney, żeby wynaléśdź czwartą.* Albowiém 1ód Zrównanie poprzédzaiące, daie bezśrzednie wártość ilości u. 2re Wártość ilości a, łatwo znaydzie ſię bydź $a = \frac{n}{q^{n-1}}$; co ſię zaś tyczè wártości q; ta także podług tego co ſię rzekło (139) znaydzie ſię bydź $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$.

Gdzie uważmy, że w tèm oſtatniém zrównaniu, zawiéra ſię reguła przepiſana w Arytmetyce (198) do wciśniénia wielu śrzódków jeometrycznych między dwie ilości zadane. Takowèmi ilościami ſą tu a i u; ale żeby miéć ſtóſunek q, maiący panówać w progreſſyi, widzimy tu, że trzeba rozdzielić naywiękſzą ilość u przez naymniéyſzą a, a z wielorazu $\frac{u}{a}$ wyciągnąć piérwiaſtek ſtopnia $n-1$; że zaś n ieſt liczbą wſzyſtkich

ſtkich wyrazów, więc $n-1$ ieſt liczbą więkſzą o iednę iedność od liczby śrzodków; co ſię zgadza z regułą dopiéro wyżéy wſpomnioną.

Żeby zaś przy pomocy zrównania $u = aq^{n-1}$ dóyśdź wártości n, do tego wprawdzie Algebra niepodaie nam bezśrzednie proſtych ſpoſobów, atoli iednak to zagadniénie można łatwo rozwiązać (aczkolwiek kołuiącą drogą) używſzy Logarytmów. Widzieliśmy wyżéy (Arytm. 213), iż ażeby liczbę iaką podnieść do zadanego ſtopnia, trzeba rozmnożyć logarytm téy ilości, przez wykładnika zadanego ſtopnia. I tak oznaczywſzy przez L logarytm téy iakiéykolwiek ilości, można zamiaſt La^2 wziąść $2\,La$; zamiaſt La^3 wziąść $3\,La$; zamiaſt La^n wziąść $n\,La$. Więc przypomniawſzy ſobie, że mnożąc przez logarytmy, trzeba dodać logarytmy, a odwrotnie dzieląc przez logarytmy, trzeba odiąć logarytm dziélnika od logarytmu dziélnego, to mówię ſobie przypomniawſzy, w zrównaniu $u = aq^{n-1}$ miéć będziém, $Lu = La + Lq^{n-1}$, albo $Lu = La + (n-1)q$; więc przeſtawiwſzy, będzie . . .

$n-1)\,Lq=Lu-La$, a rozdzieliwſzy przez Lq, wypadnie, $n-1=\frac{Lu-La}{Lq}$, a zatèm będzie $n=\frac{Lu-La}{Lq}+1$.

Przyſtóſuymy to ſobie do iakiego przykładu: daymy *że ſumma* 60000 *złł. ieſt dana na prowizyą po* 5 *od ſta, ale z tym warunkiém, ażeby coroczna prowizya od téy ſummy obracała ſię w kapitáł od roku do roku, pokiby kapitáł nieuróſł do* 1000000 *złł; ieſt pytanie, iak długi goby czaſu na to potrzeba?*

Ponieważ prowizya ieſt tu 20ſtą częścią kapitału przeſzłorocznego, więc na końcu którego kolwiek roku, kapitáł równać ſię będzie kapitałowi przeſzłoroczném u, pomnożonemu o dwudzieſtą część tegóż kapitału przeſzłorocznego; a zatèm oznaczywſzy przez a, b, c, d, e, roſnące kapitały od roku do roku, mieć będziém $b=a+\frac{1}{20}a$, $c=b+\frac{1}{20}b$, $d=c+\frac{1}{20}c$, $e=d+\frac{1}{20}d$, to ieſt $b=a\times(1+\frac{1}{20})$, $c=b\times(1+\frac{1}{20})$, $d=c\times(1+\frac{1}{20})$, $e=d\times(1+\frac{1}{20})$; ſkąd pokazuie ſię, że w każdym kapitale zawiéra ſię kapitáł poprzédzaiący iednakową liczbę razy, oznaczoną przez $1+\frac{1}{20}$, albo $\frac{21}{20}$. A zatém, rzęd tych kapitałów, ſkłada progreſſyą jeometryczną, któréy piérwſzym wyrazém a, ſą 60000 złł; oſtatnim wyrazém u, ſą 1000000 złł; ſtóſunkiém q, ſą $\frac{21}{20}$; a liczba wyrazów ieſt niewiadoma. Ta tedy liczba wynaydzie ſię, położywſzy w formule $n=\frac{Lu-La}{Lq}+1$ zamiaſt a, u, i q onych wártości; ſkąd wypadnie $n=\frac{L1000000-L60000}{L21-L20}+1$. A że ſzukaiąc w Tablicach, znaydziémy $L1000000=6{,}0000000$; $L60000=4{,}7781513$; $L21=$

$1{,}3222193$; $L20=1{,}3010300$; więc będzie $n=\frac{6{,}0000000-4{,}7781513}{1{,}3222193-1{,}3010300}+1=\frac{1{,}2218487}{0{,}0211893}+1=57{,}7$ z małém uchybiéniém; to ieſt że kapitał od 60000 złł. urośnie do 1000000 po ſkończeniu 57 lat $8\frac{1}{2}$ mieſięcy.

Ponieważ (Aryt. 214), ażeby z ilości iakiéy wyciągnąć piérwiaſtek ſtopnia zadanego przez logarytmy, trzeba rozdzielić logarytm ilości przez wykładnika, więc przy pomocy logarytmów łatwo będzie można rozwiązać w liczbach zrównanie, $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; albowiém będzie, $Lq=\frac{L\frac{u}{a}}{n-1}=\frac{Lu-La}{n-1}$.

Zeby to przyſtoſówać do iakiego przykładu, nietrzeba tylko w poprzédzaiącém zagadniéniu poſzukać, iakaby powinna bydź prowizya, żeby z niéy kapitáł od 60000 złł. po $57\frac{7}{10}$ lat uróſł do 1000000 złł. Mamy tu $a=60000$, $u=1000000$, $n=57{,}7$; używſzy tedy logarytmów, mieć będziém $Lq=\frac{6{,}0000000-4{.}7781513}{58{,}7-1}=\frac{1{,}2218487}{57{.}7}$, co daie $Lq=0{.}0211757$; Logarytm który odpowiada w Tablicah liczbie 1,0500 z małém uchybieniém; która przemiéniona na dwudzieſtki daie 21; a ſtąd na prowizyą oczywiście wypada $\frac{1}{20}$.

182. Zrównanie $s=\frac{qa-a}{q-1}$, daie także cztéry zrównania, ſłużące do rozwią-

zania tego zagadniénia powſzechnego; *Z tych cztérech rzeczy, iakiémi ſą ſumma, ſtòſunek, piérwſzy i oſtatni wyráz progreſſyi jeometrycznéy, maiąc wiadome trzy, żeby wynaléśdź czwartą.* Już to teráz powinna bydź rzecz bardzo łatwa każdému, dla tego nad nią zaſtanawiać ſię niebędziémy.

Naoſtatek, ieżeli z iednego z tych zrównań $s = \frac{qa - a}{q - 1}$ i $u = aq^{n-1}$ wyciągnie ſię wártość iednèyże któréykolwiek głoſki, to ieſt a, albo u i.t.d. położywſzy tę wártość w drugiém zrównaniu, wypadną znowu inſze zrównania, ſłużące do rozwiązania naſtępuiącego zagadnienia ieſzcze powſzechniéyſzego iak piérwſze; to ieſt: *Z tych pięciu rzeczy, iakiemi ſą piérwſzy i oſtatni wyráz, ſtóſunek, ſumma, i liczba wyrazów progreſſyi jeometrycznéy, maiąc wiadome trzy, żeby wynaléśdź każdą z dwóch innych.*

O wykryśleniu Jeometrycznėm Ilościów Algebraicznych.

183. Ponieważ linije, powiérſzchnie, i bryły, ſą ilościami, więc z każdym z tych trzech gatunków rozległości, można uczynić też ſame działania, które ſię czynią z liczbami i z ilościami Algebraicznémi. Lecz wypadki z tych działań wynikaiące mogą bydź dwóma oſobliwie ſpoſobami wyrażone, to ieſt w liczbach albo w liniiach. Piérwſzy ſpoſób, w którym wſzyſtkie ilości rozumieią ſię bydź zadane w liczbach, niepodléga żadnéy trudności: nietrzeba w nim tylko zamiaſt głoſek położyć ich wártości liczebne, i odprawić działania wſkazane w roſporządzeniu znaków i głoſek.

Co ſię tycze ſpoſobu wyrażenia w liniiach, wypadków wynikaiących z rozwiązań Algebraicznych, tén gruntuie ſię na wiadomości, co znaczą pewne wyrażenia fundamentalne do których potém wſzyſtkie inne ſtóſuią ſię. Opiſzémy naprzód piérwſze, a potém pokażémy iak ſię do nich inne ſtóſuią: i to ieſt co ſię nazywa *wykryśleniém* ilościów Algebraicznych, albo zagadnień, z których rozwiązania takowe ilości wyniknęły.

184. Jeżeli ilość która ma bydź wykryśloną, ieſt *niepiérwiaſtkowa* (to

(to ieſt bez żadnego znaku piérwiaſtkowego), i ieżeli liczba wymiarów licznika nieprzechodzi tylko o iednę iedność liczbę wymiarów mianownika, to wykryślenie zawſze wychodzić będzie na znalezienie czwartéy proporcyonalnéy trzem liniióm zadanym. Zobaczmy to w przykładach.

Gdyby było zadano wykryślić ilość taką iak $\frac{ab}{c}$, w któréyby głoſki a, b, c, oznafig. 3. czały liniie wiadome; trzeba wyciągnąć (fig. 3) dwie liniie nieokreślone AZ, AX, czyniące między ſobą kąt iakikolwiek. Na iednéy z nich AX, bierze ſię część AB równa linii oznaczonéy przez c, i druga część AD, równa iedney z dwóch linii a albo b, niech tu będzie równa linii a; potém na drugiéy linii AZ, bierze ſię część AC (równa linii b. Złączywſzy końce B i C piérwſzéy i trzeciéy części przez liniią BC, przez koniec D, drugiéy prowadzi ſię liniia DE, równoległa linii BC; i ta na linii AZ pokaże liniią AE odpowiadaiącą wártości ilości $\frac{ab}{c}$. To ieſt, że trzeba znaléśdź czwartą proporcyonalną trzem liniióm zadanym c, a, b. A ponieważ (Jeom. 118) podaliśmy dwa ſpoſoby do znaleziénia takowéy czwartéy proporcyonalnéy, więc któregokolwiek z nich zarówno użyć można do wykryślenia ilości $\frac{ab}{c}$.

Gdy-

Gdyby także zadana była do wykryślenia ilość $\frac{aa}{c}$, iawna ieſt, że to zagadniénie wychodzi na poprzédzaiące; bo w takim razie liniia b równa ſię linii a

Gdyby trżeba było wykryślić ilość $\frac{ab + bd}{c + d}$; uważyłbym naprzód, że ta ilość równa ſię ilości $\frac{(a + d)b}{c + d}$; poczytawſzy tedy $a + d$ za iednę liniią wyrażoną przez m, i $c + d$ także za iednę liniią wyrażoną przez n, miałbym do wykryślenia ilość $\frac{mb}{n}$, która wychodzi na poprzédzaiący przypadek.

Niechay będzie znowu zadana ilość $\frac{aa - bb}{c}$; przypómniymy ſobie że $aa - bb$ (25) ieſt iedno co $\frac{(a + b)(a - b)}{c}$; a zatém uważaiąc tę ilość w takiéy poſtaci, nietrzeba będzie tylko poſzukać czwartéy proporcyonalnéy tym trzém ilościóm c, $a + b$ i $a - b$.

Gdyby ieſzcże była zadana do wykryślenia ilość $\frac{abc}{de}$; trzebaby ią napiſać w téy poſtaci $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; a wykryśliwſzy $\frac{ab}{d}$, iak ſię dopiéro nauczyło, liniią z tego wykryślenia wypadaiącą, można oznaczyć przez m; natenczas $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$ przemiéni ſię na $\frac{mc}{e}$, to ieſt na ilość, która wykryśli ſię iak wyżéy.

A ſtąd wnoſi ſię, że gdyby zadano było wykryślić $\frac{a^2b}{c^2}$; trzebaby to wyrażenie przemiénić na $\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$, a potém wykryśliwſzy $\frac{a^2}{c}$, i wártość wypadku oznaczywſzy przez m, wykryśliłoby ſię nakoniec $\frac{mb}{c}$.

A tak, cała ſztuka zawiſła od rózłożenia ilościów na części, z którychby każda wypadła na poſtać $\frac{ab}{c}$ albo $\frac{a^2}{c}$; a lubo to w niektórych okazyach zdawać ſię może rzeczą przytrudną, atoli łatwo będzie dać ſobie w tém radę, przy pomocy ſpoſobów wyżéy podanych do przekſztáłcenia ilościów na inną poſtać.

Np. gdybym miáł zadaną do wykryślenia ilość $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$; zrobiłbym podług upodobania $b^3 = a^2m$, a $c^2 = an$, natenczas $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$ przemiéniłoby ſię na $\frac{a^3 + a^2m}{a^2 + an}$, co wychodzi na $\frac{a^2 + am}{a + n}$ albo na $\frac{(a + m) \times a}{a + n}$, to ieſt, na ilość łatwą do wykryślenia (podług tego co iuż powiedziało ſię wyżéy), byleby mieć wiadome m i n. Wártości zaś ilościów m i n, daią zrównania $b^3 = a^2m$ i $c^2 = an$, z których wyciąga ſię $m = \frac{b^3}{a^2}$; i $n = \frac{c^2}{a}$, daiące ſię wykryślić podług ſpoſobów wyżéy położonych.

Trafiaią ſię czaſém ilości wypadłe w takiéy poſtaci, która zdaie ſię czynić wcale niepożytecznémi, ſpoſoby przepiſane do przekſztáł-

kſztáłcenia ich na inną poſtać, co bywa w ten czas, kiedy ilość niebędzie *iednorodną* (homogenea), to ieſt, gdy każdy z wyrazów licznika albo mianownika nieſkłada ſię z iednakowéy liczby czynników; *np.* gdyby ſię zdarzyła ilość taka, iak $\frac{a^3 + b}{c^2 + d}$. Ale uważyć mamy, że do takiego wypadku nieprzychodzi ſię nigdy, tylko kiedy w biegu rachunków (dla prościéyſzych wyrażéń), ilość iakowa zrobiła ſię równa iedności. *Np.* w ilości $\frac{a^3 + b^2c}{a^2 + c^2}$ gdyby zrobiło ſię $b = 1$, piérwſza ilość przemiéniłaby ſię w tę drugą $\frac{a^3 + c}{a^2 + c^2}$. Lecz poſpolicie nigdy przedſiębrać niémożna wykryślenia ilości, niewiedząc początku ſkąd powſtała, w każdym przypadku zawſze bywa wiadomo, która ilość zrobiła ſię równa iedności, a zatém zawſze ią nazád powrócić można. I w tém żadna trudność zachodzić niepowinna; bo ponieważ w każdym wyrazie licznika i mianownika, muſi znaydówać ſię iednakowa liczba wymiarów, (lubo ta liczba może ſię różnić względém wyrazów licznika i mianownika), więc w każdym wyrazie, trzebaby tylko nazád powrócić ſtopień linii, za którą wzięła ſię była iedność, ſtopień mowię taki któryby dopełniáł liczby wymiarów. I tak gdybym miáł wykryślić ilość $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$, wiedząc że w niéy zamiaſt linii d położyła ſię iedność, napiſáłbym $\frac{a^3 + bd^2 + c^2d}{ad + b^2}$; a do wykryślenia téy oſtatniéy, zrobiłbym $b^2 = dm$, $c^2 = dn$ i $a^3 = d^2p$, co-

d^2p, coby mi ią odmiéniło na $\frac{d^2p + bd^2 + d^2n}{ad + dm}$, albo na $\frac{dp + bd + nd}{a + m}$, albo naoſtatek na $\frac{(p + b + n)d}{a + m}$; ilość łatwa do wykryślenia, wykryśliwſzy wprzód m, n i p, to ieſt $m = \frac{b^2}{d}$, $n = \frac{c^2}{d}$, $p = \frac{a^3}{d^2}$, w czém niémoże bydź żadnéy trudności po tém co poprzédziło.

W tém wſzyſtkiém co ſię dotąd mówiło, rozumiało ſię zawſze, że liczba czynników, albo liczba wymiarów każdego wyrazu licznika, nieprzechodzi tylko o iednę iedność liczbę wymiarów mianownika. Może atoli piérwſza liczba przewyżſzać drugą, o dwie a nawet i trzy iedności, ale nigdy o więcéy, chyba że iaka liniia zrobiła ſię równa iedności, albo że niektóre czynniki wyrażaią tylko ſame liczby.

185. Kiedy liczba wymiarów w liczniku ilości zadanéy, przechodzi liczbę wymiarów mianownika o dwie iedności, to natenczas ilość wyraża powiérzchnią, któréy wykryślenie zawſze naprowadzić można do ſpoſobu wykryślenia równoległoboku, a nawet kwadratu.

Np. gdybym miał do wykryślenia zadaną ilość $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$, uważałbym ią ſobie iako $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; lecz ilość $\frac{a^2 + ab}{a + c}$ łatwo da ſię wy-

wykryślic podług ſpoſobów wyżéy podanych, napiſawſzy ią w téy poſtaci $a \times \frac{a + b}{a + c}$, więc daymy niech będzie m wártością linii która wynikła z takiego wykryślenia, natenczas $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$ przemiéni ſię na $a \times m$; iawna zaś ieſt, że wziąwſzy a za wyſokość, a m za podſtawę równoległoboku, $a \times m$ wyrażać będzie powiérzchnią tego rownoległoboku: więc odwrotnie, taż powiérzchnia oznaczać powinna takową ilość $a \times m$, albo $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$.

Do podobnegoż wykryślenia naprowadzićby także można ilość $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, zrobiwſzy $bc = am$, i $d^2 = an$, albowiém natenczas piérwſza ilość przemiéni ſię na $\frac{a^3 + amc + and}{a + c}$, co na iedno wychodzi, iak $a \times \left(\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}\right)$. Lecz wykryślenie czynnika $\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$ ieſt toż ſamo co w przypadkach poprzédzaiących, więc znalazłſzy wártość onego, i oznaczywſzy ią przez a, niezoſtanie mi tylko zrobić wykryślenie ilości $a \times p$, to ieſt tylko wykryślić równoległobok, któregoby wyſokością było a, a podſtawą p.

186. Naoſtatek, ieżeli liczba wymiarów licznika, przechodzi o trzy iedności liczbę wymiarów mianownika, to natenczas ilość wyrażać bę-

będzie bryłę, które wykryślenie zawiże naprowadzić można na wykryślenie równoległościanu.

Np. gdybym miał do wykryślenia zadaną ilość $\frac{a^3b + a^2b^2}{a+c}$; napiſałbym tę ilość w téy poſtaci $ab \times (\frac{a^2 + ab}{a+c})$; a zrobiwſzy wykryślenie ilości $\frac{a^2 + ab}{a+c}$ podług tego iak ſię wyżéy nauczyło, ieżeli oznaczę przéz m liniią z tego wykryślenia wypadłą, zagadniénie ſkończy ſię na wykryśleniu tylko ilości $ab \times m$; lecz ab wyraża równoległobok (iak widzieliśmy wyżéy), więc zmyśliwſzy ſobie równoległościan maiący za podſtawę takowy równoległobok a za wyſokość liniią m, bryłówatość tego równoległościanu, równać ſię będzie ilości $ab \times m$, to ieſt ilości $\frac{a^3b + a^2b^2}{a+c}$.

187. Na tém co ſię dotąd powiedziało, doſyć ieſt do wykryślenia wſzelkiéy ilości niepiérwiaſtkowéy. Zaſtanówmy ſię teráz nad ilościami piérwiaſtkowémi drugiego ſtopnia.

Takowe, mogą bydź wykryślone albo przez śrzednią proporcyonalną między dwiema liniiami danémi, albo przez przeciwproſtkątną, albo téż przez ieden z boków tróykąta proſtokątnego.

Np. żeby wykryślić $\sqrt{ab}$; trzeba (fig. 4) wyciągnąć liniią nieokreśloną AB, na któréy potém bierze ſię część AC równa linii a. i częśc CB równa linii b; daléy na całéy linii AB iako na śrzédnicy, opiſuie ſię pół koła pryecinaiącego w D proſtopadłą CD, podnieſioną na linii AB z punktu C; natenczas CD będzie wártością ilości $\sqrt{ab}$; to ieſt, że podług (Jeom. 122), żeby miéć wártość ilości $\sqrt{ab}$. trzeba wziąść śrzednią proporcyonalną między dwiema ilościami oznaczonémi przez a i b. Jakóż, wiadomo ieſt (Jeom. 121) że $AC : CD :: CD : CB$, albo $a : CD :: CD : b$; więc rozmnożywſzy ſkrayne i śrzednie, będzie $(CD)^2 = ab$, a zatèm $CD = \sqrt{ab}$. *fig. 4.*

A ſtąd pokazuie ſię, iakby ſobie trzeba poſtąpić, w przekſztáłceniu na kwadrat iakiéykolwiék powiérſzchni; gdyby *np.* rzecz ſzła o przemianę równoległoboku, któregoby wyſokością było a, a podſtawą b; oznaczywſzy przez x bok ſzukanego kwadratu, miałbym $x^2 = ab$, a zatém $x = \sqrt{ab}$; co mi znać daie, że na bok kwadratu, mam wziąść śrzednią proporcyonalną między podſtawą i wyſokością. Jeżeli rzecz idzie o przekſztáłcenie tróykąta, który iak wiadomo równa ſię połowie równoległoboku téyże podſtawy i téyże wyſokości, to trzeba będzie wziąść śrzednią proporcyonalną między podſtawą i połową wyſokości, albo między wyſokością i połową podſtawy.

Gdyby znowu zadano było, przekſztáłcić koło na kwadrat. to trzebaby wziąść śrzednią proporcyonalną między promiéniém i połową okręgu. Niemniéy łatwo także takie przekſztáłcenie uczynić ſię daie z wſzelką inną iakąkolwiek figurą proſtokątną; albowiém wiadomo (Jeom. 137). że każda figura proſtokryślna, da ſię przemiénić w tróykąt, tén zaś łatwo przéménić można na kwadrat, wziąwſzy śrzednią poporcyonalną między podſtawą i połową wyſokości tego tróykąta.

Lecz gdyby ſigura niebyła wykryślona, ale tylko było zadane wyrażenie Algebraiczne iéy powiérſzchni, przy pomocy niektórych wymiarów one ſkładaiących; natenczas w wykryśleniu trzeba ſobie będzie tak poſtąpić iak z ilościami o których zaráz mowić zaczynamy.

Gdyby była zadana ilość $\surd(3ab + b^2)$; takową naprzód napiſałbym ſobie w téy poſtaci $\surd[(3a + b) \times b]$, a potém wziąłbym śrzednią proporcyonalną między $3a + b$ i między b.

Podobnież gdyby była dana ilość $\surd(aa - bb)$, napiſałbym ią tak $\surd[(a + b) \times (a - b)]$, i wziąłbym śrzednią proporcyonalną między $a + b$ i $a - b$. Gdybym miał $\surd(aa + bc)$; zrobiłbym $bc = am$, ſkądbymi wypadło $\surd(a^2 + am)$ albo $\surd[(a + m) \times a]$, a zatém nietrzebaby mi więcéy, tylko wziąść śrzednią proporcyonalną między $a + m$ i między a, po wykryśleniu wprzód wártości $m = \frac{bc}{a}$ podług reguł wyżéy podanych.

Zeby wykryślić $\surd(a^2 + b^2)$, możnaby zrobić $b^2 = am$, i z ilością $\surd(a^2 + am)$ poſtąpić ſobie iak dopiéro powiedziało ſię. Ale własność tróykąta proſtokątnego (Jeom. 164), podaie nam ſpoſób do prościéyſzego wykryślenia, który ieſt taki: Wyciągniy liniią
fig. 5. AB (fig. 5) równą linii a, z końca téy linii A, poſtaw proſtopadłą AC równą linii b; natenczas poprowadziwſzy liniią BC, takowa będzie wártością ilości $\surd(a^2 + b^2)$. Bo ponieważ tróykąt CAB ieſt proſtokątny, więc (podług Jeom. 164), będzie $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 + b^2$, więc $BC = \surd(a^2 + b^2)$.

Mo-

Można także przy pomocy tróykąta proſtokątnego, w odmiénny ſpoſób od tego którego użyliśmy wyżéy, wykryślić ilość $\surd(a^2 - b^2)$. Tym końcém (fig. 7) prowadzi ſię fig. 7.
liniia AB równa linii a, i opiſawſzy na AB iako na śrzednicy, pół koła ACB, z punktu A przeciąga ſię cięciwa $AC = b$; natenczas poprowadziwſzy liniią BC, takowa będzie wártością ilości $\surd(a^2 - b^2)$; albowiém tróykąt ABC będąc proſtokątny (Jeom. 164), daie $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$; więc $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = a^2 - b^2$, a zatém $BC = \surd(a^2 - b^2)$.

Można tedy także i ilość $\surd(a^2 + bc)$ wykryślić inaczéy iak było wyżéy, a to poſtępuiąc ſobie w tén ſpoſób. Trzeba zrobić $bc = m^2$ i wykryślić $\surd(a^2 + m^2)$ iak ſię iuż powiedziało; do czego wprzód wynayduie ſię m, biorąc śrzednią proporcyonalną między b i c, iako to wſkazuie zrównanie $bc = m^2$, daiące $m = \surd bc$.

Chociażby pod znakiém piérwiaſtkowym znaydówało ſię więcéy wyrazów, to iednakże wykryślenie zawſze naprowadzić można do którego z ſpoſobów poprzédzaiących, używſzy przekſztáłcenia. *Np.* gdybym miał $\surd(a^2 + bc + ef)$, zrobiłbym $bc = am$, $ef = an$, ſkąd wypadłaby mi ilość $\surd(a^2 + am + an)$, albo $\surd[(a + m + n) \times a]$, którą wykryśliłbym, wziąwſzy śrzednią proporcyonalną między a i między $a + m + n$, wykryśliwſzy wpzód wártości ilościów m i n, to ieſt $m = \frac{bc}{a}$, $n = \frac{ef}{a}$. Mógłbym także zrobić $bc = m^2$, $ef = n^2$; a tak zagadniénie wyſzłoby na wykryślenie ilości $\surd(a^2 + m^2 + n^2)$. Kiedy pod znakiém piérwiaſtkowym, znayduie ſię rzęd kwadratów

twiér-

twiérdzących, *np.* taki iak $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2}$ i. t. d), trzeba zrobić $\sqrt{(a^2+m^2)}=h$, $\sqrt{(h^2+n^2)}=i$. $\sqrt{(p^2+i^2)}=k$, i tak dáléy; a ponieważ każda z tych ilościów wynika z poprzédzaiącéy. więc oſtatnia. pokaże wártość ilości $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2}$ i. t. d.). Żeby te ilości wykryślić w ſpoſób ile można nayproſtſzy, trzeba każdą przeciwproſtkątną

fig. 6. uważać kolèyno iako bok; *np.* (fig. 6), zrobiwſzy liniią $AB=a$, poſtaw proſtopadłą $AC=m$, i wyciągniy BC która będzie wártością h; z punktu C na linii BC poſtaw proſtopadłą $CD=n$, a wyciągnięty bok BD będzie wártością i, naoſtatek z punktu D na linii BD poſtaw proſtopadłą $DE=p$, liniia BE będzie wartością linii k, to ieſt wartością ilości $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2)}$.

Jeżeliby między témi kwadratami niektóre znaydowały ſię przéczące, w takim razie do ſpoſobów dopiéro przepiſanych, trzebaby ieſzcze przydać owe, które podaliśmy do wykryślenia ilości $\sqrt{(a^2-b^2)}$. Naoſtatek gdyby, potrzeba było wykryślić ilość zadaną w takiéy poſtaci, $\frac{a\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(d+e)}}$; odmiénilbym ią na $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, rozmnożywſzy tak licznika iak mianownika przez $\sqrt{(d+e}$; a natenczas ſzukaiąc śrzedniéy proporcyonalnèy między ilościami $b+c$ i $d+e$, i znalezioną nazwawſzy m, niezoſtanie mi więcéy do czyniénia, tylko wykryślić ilość $\frac{am}{d+e}$, co da ſię wykonać bardzo łatwo.

Wreſzcie, ieſt tu mowa tylko o regułach powſzechnych; częſtokroć można odbydź wykryślenie prościéyſzémi ſpoſobami, lubo zawſze na tychże fundamentach zaſadzonémi,

némi, ale te ſpoſoby wynikaią z iakich uwag ſzczególnych, i właściwych każdemu zagadnieniu, a zatém niémogą bydź podane i wytłómaczone tylko w ten czas gdy ſię do nich okazye podadzą. Uważymy iednak ieſzcze przy dokończeniu téy materyi, że lubo wykryślenie ilościów piérwiaſtkowych, wychodzi na wzięcie czwartych proporcyonalnych, albo śrzednich poporcyonalnych, i na kryślenie tróykątów proſtokątnych, atoli takowe wykryślenia mogą wypadać mniéy lub więcéy proſte, i mniéy lub więcéy kſztałtne, to ieſt podług ſpoſobu, którégo użyie ſię do wynalezienia takowych śrzednich proporcyonalnych. Dla tego przydamy tu dwa inne ſpoſoby, ſłużące do wynalezienia śrzedniéy proporcyonalnéy między dwiéma liniiami zadanémi.

Piérwſzy ſpoſób zależy na tém: ażeby na iednéy z dwóch linii danych iakoto na AB, opiſać pół koła ACB (fig. 7); a wziąwſzy na niéy część AD, równą drugiéy linii danéy, podnieść proſtopadłą DC, i poprowadzi cięciwę AC, która będzie śrzednią proporcyonalną między liniiami AB i AD. fig. 7. Albowiém wyciągnąwſzy cięciwę BC, tróykąt ACB (Jeom. 65) ieſt proſtokątny, a zatém podług (Jeom. 112), AC będzie śrzednią proporcyonalną między przeciwproſtkątną AB, i między odcinkiém AD.

Drugi znowu ſpoſób zależy na tém (fig. 8), ażeby wyciągnąć liniią AB, równą fig. 8. większęy z dwóch linii danych, a wziąwſzy na niéy część AC, równaiącą ſię mnieyſzéy linii, ażeby na pozoſtałéy reſzcie BC opiſać pół koła CDB, do którégo przytknąwſzy ſtyczną AD, takowa podług (Jeom. 124), będzie śrzednią proporcyonalną między AB i AC.

Stąd tedy pokazuie ſię, że ilości niepiérwiaſtkowe, zawſze mogą bydź wykryślone przy pomocy linii proſtych, a ilości piérwiaſtkowe drugiego ſtopnia, dadzą ſię wykryślić przy pomocy koła i linii proſtéy razém użytych. Co ſię zaś tycze ilościów piérwiaſtkowych wyrażonych w wyżſzych ſtopniach, takowych wykryślénie, zawiſło od połączenia między ſobą różnych linii krzywych. Teráz zabawimy ſię tylko takiémi zagadniéniami, których rozwiązanie zaſadza ſię na ilościach albo niepiérwiaſtkowych, albo piérwiaſtkowych drugiego ſtopnia.

Różne zagadniénia Jeometryczne, i Uwagi tak nad ſpoſobém ułożenia z nich zrównań, iako téż nad różnémi rozwiązaniami wypadaiącémi z tych zrównań.

188. Fundament który podáł ſię wyżéy (60), do wyrażenia danego zagadniénia w zrównaniu, zarówno ſłuży i do zagadniéń Jeometrycznych. Trzeba także to, czego ma ſię dochodzić, oznaczyć ſobie iakim powſzechnym wyrazém, a potém przy pomocy tego wyrazu, i innych, oznaczaiących inne ilości wiadome, tak rozumówać iak gdyby było wſzyſtko wiadomo, i iak gdyby nieſzło tylkó o ſprawdzenie tego zagadniénia. Takowy ſpoſób obéyścia ſię z zagadniéniami nazywaią *Rozbiórém* (Analyſe). Zeby bydź w ſtanie ułożenia ſobie rozumó-

wań, iakich wyciąga takowe ſprawdzenie, trzeba miéć znaiome przynaymniéy niektóre własności téy ilości, któréy ſię dochodzi. Jawna tedy ieſt, że chcąc iakie zagadniénie Jeometryczne ułożyć w zrównaniach, trzeba miéć obecne w umyśle wiadomości podane w drugiéy części téy Nauki. Poſpolicie w zagadniéniach liczebnych, albo w zagadniéniach tego gatunku, które mieliśmy w piérwſzym Rozdziale, nayczęściéy na przyſtóſówanie reguły powſzechnéy, doſyć ieſt treść zagadniénia wyrazić po Algebraicznemu, ale w przyſtóſówaniu Algebry do Jeometryi, trzeba częſtokroć użyć ieſzcze innych ſpoſobów: będziémy ſię ſtarali dać ie poznać w dalſzym przeciągu. Teráz zaś w powſzechności tylko tyle powiedziéć można, że na ſprawdzenie ilości, niezawſze bywa potrzeba zaſtanawiać ſię nad tém, ieżeli bezśrzednie czyni zadoſyć warunkóm zagadniénia; takowe ſprawdzenie częſtokróć łatwiéy wykonywa ſię, uważaiąc ieżeli ilość o którą rzecz idzie, zawiéra w ſobie pewne własności, maiące

 iſto-

istotny związek z warunkami zagadnienia. Po przełożeniu téy uwagi, którey będziémy miéć okazyą użyć na swóich miéyscach, przystępuiemy do przykładów, które w takiéy materyi bywaią zawsze łatwiéysze do poięcia, aniżeli fundamenta powszechne.

189. Obierzmy sobie na piérwszy przykład to zagadnienie: *Wpisać kwadrat ABCD* (fig. 9), *w tróykącie zadanym EHI.* Przez te słowa *w tróykącie zadanym*, rozumiémy tróykąt, w którym byłoby wszystko znaiomo, iakoto boki, kąty, wysokość i.t.d.

fig. 9.

Przyłożywszy cokolwiek uwagi, daie się widziéć, że zagadnienie wychodzi na wynalezienie punktu G na wysokości *EF*, takiego, przez który pociągnąwszy liniią *AB*, równoległą linii *HI*, ażeby ta liniia *AB* równała się linii *FG*; skąd zrównanie, prawie samo podaie się naturalnie, wyraziwszy tylko Algebraicznie wártość linii *FG* i przyrównawszy iednę do drugiéy.

Oznaczmy tedy przez a wysokość wiadomą *EF*; przez b podstawę wiadomą *HI*; a przez x liniią niewiadomą *GF*; natenczas *EG* będzie wárto $a-x$. Ze zaś liniia *AB*, iest równoległa linii *HI*; więc powinno wypadać podług (Jeom. 109), $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; to iest $EF : EG :: HI : AB$, albo $a : a-x :: b : AB$; więc (Arytm. 169), $AB = \frac{ab-bx}{a}$; a ponieważ liniia *AB* powinna równać się linii *GF*, więc będzie $\frac{ab-bx}{a} = x$; skąd przy pomocy reguł podanych w piérwszym Rozdziale, wyciąga się $x = \frac{ab}{a+b}$.

Teráz, żeby tę ilość wykryślić, trzeba podług tego co się powiedziało (184), wynaléśdź czwartą proporcyonalną ilościóm, $a+b$, b, i a, co można wykonać w ten sposób. Wznacz od *F* do *O* liniią *FO*, równą ilości $a+b$, to iest równą linii $EF + HI$, wyciągniy *EO*; potém wziąwszy liniią *FM*, równą linii $HI = b$, wyciągniy równolegle do linii *EO* liniią *MG*, któréy przecięcie się z liniią *EF*, da ci liniią *GF* na wártość głoski x. Albowiém z tróykątów sobie podobnych

bnych *EFO*, *GFM*, wypada proporcya $FO : FM :: FE : FG$, albo $a+b : b :: a : FG$; więc $FG = \frac{ab}{a+b}$.

190. Weźmy na drugi przykład to zagadnienie: *Maiąc wiadomą długość linii* BC *(fig. 10) i kąty* B *i* C *które z nią czynią inne dwie linie* BA, *i* CA, *znaléźć wysokość* AD, *w iakiéy przecinaią się z sobą te dwie ostatnie linie.* fig. 10.

Kąty wprowadzaią się w rachunki Algebraiczne, przy pomocy tychże samych linii co w Trygonometryi, to iest przy pomocy wstaw, stycznych, i. t. d. I tak, kiedy się mówi, że iest zadany kąt *np.* kąt *C*, rozumie się, że iest dana wártość iego wstawy, lub stycznéy. To na przód założywszy, zróbmy $BC = a$, $AD = y$. W tróykącie prostokątnym *ADC* podług (Jeom. 300), mieć będziém $CD : DA$, iak się ma promiéń, do stycznéy kąta *ACD*, to iest będzie $CD : y :: r : m$, oznaczywszy przez r promiéń, a przez m styczną kąta *ACD*; więc (Arytm. 169), $CD = \frac{ry}{m}$. Przez tému podobne rozumo-

mówanie, oznaczywszy przez n styczną kąta *ABD*, mielibyśmy $BD : y :: r : n$; więc $BD = \frac{ry}{n}$; lecz $BD + DC = BC = a$; więc $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$; skąd wyciąga się $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

To wyrażenie, da się uczynić prostszém, wprowadziwszy zamiast stycznych m i n dwóch kątów C i B, ich dotyczne, które niech będą oznaczone przez p i q. Tym końcém, trzeba sobie naprzód przypomniéć (Jeom. 295), że *stycz.* : *r* :: *r* : *dotycz*; a na fundamencie tego podania będzie $m : r :: r : p$ i $n : r :: r : q$; skąd wyciąga się $m = \frac{r^2}{p}$ i $n = \frac{r^2}{q}$; a zatém będzie $mn = \frac{r^4}{pq}$, a zaś $rn + rm = \frac{r^3}{p} + \frac{r^3}{q} = \frac{r^3(p+q)}{pq}$; więc $y = \frac{ar}{p+q}$; ilość, która bardzo łatwo da się wykryślić, wziąwszy czwartą proporcyonalną odpowiadaiącą tym trzém ilościóm, $p+q$, r i a.

191. *Maiąc wiadome wysokości* AC *i* BD *dwóch przedmiotów* C *i* D *wyniésionych nad iaką równią (fig. 11), i odległość między niémi* AB, *równo-* fig. 11.

le-

ległą téy równi, znaléśdź na linii AB taki punkt E, którýby był równo oddalony tak od C iak od D.

Jeżeli może bydź wyciągnięta liniia profta od C do D, to w takim razie nietrzebaby więcéy tylko ze śrzodka téyże linii CD fpuścić proftopadłą KE, która oznaczy punkt E. Ale gdyby niémożna było wyciągnąć linii CD, to punkt E trzeba wynaléśdź naftępuiącym fpofobém.

Niech będzie $AC=a$. $DB=b$, $AB=c$, $AE=x$, to będzie $BE=c-x$, $CE=\surd(aa-xx)$ (Jeom. 164), $DE=[bb+(c-x)^2]$. Lecz trzeba ażeby było $CE=DE$; więc mufi bydź $\surd(aa+xx)=\surd[bb+(c-x)^2]$; fkąd po fkwadrówaniu i po zebraniu, wyciąga fię $x=\frac{cc-aa+bb}{2c}=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\frac{(a-b)(a+b)}{c}$; ilość, która wykryśla fię w naftępuiący fpofób.

Przez śrzodek linii AB, poprowadź liniią ILG równoległą linii AC, która z liniią DF równoległą linii AB przetnie fię w punkcie G. Zrob $LI=\frac{1}{2}c=LA$, $LH=\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}CF$, a $LO=\frac{1}{2}(a+b)=GH$. Poprowadziwfzy liniią IO, poprowadź

wadź także przez punkt H równoległą iéy liniią HE, która oznaczy ci ną linii AB fzukany punkt E. Albowiém $LI:LO::LH:LE$; to ieft, $\frac{1}{2}c:\frac{1}{2}(a+b)::\frac{1}{2}(a-b):LE$; więc $LE=\frac{\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{1}{2}(a-b)}{\frac{1}{2}c}=\frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c}$; lecz $AE=AL-LE=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c}$; więc $AE=x$.

192. Na czwárty przykłád, obierzemy fobie takie zagadniénie, które razém flużyć nam będzie i do pokazania, iakim fpofobém zagadniénia Jeometryczne układaią fię w zrównaniach, i iak z tychże zrównań po rozmaitém onych przygotówaniu można fobie wnieść nowe podania.

Maiąc wiadome trzy boki tróykąta ABC (fig. 12), znaléśdź odcinki AD i DC, powftaiące z padniénia proftopadłéy BD na liniią AC, tudzież znaléśdź i famę proftopadłą BD. *fig. 12.*

Gdyby mi były znaiome te liniie, fprawdziłbym ie w naftępuiący fpofób. Dodałbym kwadrat linii BD do kwadratu linii CD, i uważałbym ieżeli fumma równa fię kwadratowi linii BC; co bydź powinno, bo tróykąt

kąt BDC ieſt proſtokątny (Jeom. 164). Dodáłbym także kwadrat linii AD do kwadratu linii BD, i uważáłbym ieżeli ſumma równa ſię kwadratowi linii AB.

Poſtąpmy ſobie tedy tymże porządkiém, i tym końcém oznaczmy BD przez y; CD przez x; BC przez a, AB przez b; AC przez c; natenczas AD które ieſt $= AC - CD$, będzie $= c - x$; ſkąd wypadną te dwa zrównania, $xx + yy = aa$ i $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Ponieważ tak xx iako też yy, w obu zrównaniach niémaią innego ſpółczynnika tylko iedność, przeto odéymuię drugie zrównanie od piérwſzego, co mi da, $2cx - cc = aa - bb$, ſkąd wyciąga ſię $x = \frac{aa - bb + cc}{2c} = \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c$; co można napiſać w takiéy poſtaci, $x = \frac{1}{2}\,\frac{(a + b\,(a - b)}{c} + \frac{1}{2}c$.

Lecz pod taką poſtacią, ſtąd co ſię powiedziało (184), łatwo widzieć ſię daie, że ażeby mieć x, trzeba ſzukać czwartéy proporcyonalnéy tym trzém ilościóm c, $a + b$, i $a - b$; a znalázłſzy ią i wziąwſzy onéy

onéy połowę, dodać ią do $\frac{1}{2}c$, to ieſt do połowy boku AC; a to właśnie wychodzi na toż ſamo, co iuż powiedziało ſię wyżéy (Jeom. 307).

Lecz z tychże ſamych zrownań, można ſobie uczynić wiele innych wnioſków: wyłożymy tu z nich niektóre, dla naprowadzenia poczynaiących na ſpoſób, w iaki maią wyczytywać z każdego zrównania to, co zawiéra ſię w tém zrównaniu.

193. *1ód* Zrównanie $2cx - cc = aa - bb$, ieſt toż ſamo co, $c \,.\, (2x - c) = (a + b) \,.\, (a - b)$. A ponieważ mnogość wynikaiąca z dwóch piérwſzych czynników, równa ſię mnogości wynikaiącéy z dwóch oſtatnich, więc piérwſze dwa czynniki można uważać iako ſkrayne, a dwa oſtatnie iako śrzednie wyrazy proporcyi, a zatém będzie, $c : a + b :: a - b : 2x - c$; lecz $2x - c$, ieſt iedno co $x - (c - x)$, więc na miéyſce tych głoſek, położywſzy linie przez nie oznaczone, będzie $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$; co wychodzi właśnie na tóż ſamo, co iuż dowiodło ſię wyżéy (Jeom. 306).

194. *2re.* Jeżeli z punktu C iako ze śrzodka, promiéniém równym linii BC, nakryśliſz łuk BO, i poprowadziſz cięciwę BO, miéć będzieſz $(BD)^2 + (DO)^2 = (BO)^2$; lecz $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$; więc $(BO)^2 = yy + aa - 2ax + xx$, znalezliśmy zaś wyżéy, że $yy + xx = aa$; więc $(BO)^2 = 2aa - 2ax = 2a(a - x)$; położywſzy tedy zamiaſt x iego wártosć

aa

$\frac{aa - bb + cc}{2c}$, będzie $(BO)^2 = 2a\left(a + \frac{bb - aa - cc)}{2c}\right. = 2a\left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) = \frac{a}{c} \times [bb - (a-c)^2]$; bo $2ac - aa - cc = -(aa - 2ac + cc) = -(a-c)^2$. Lecz uważaiąc $a - c$ iakoby iednę ilość, będzie $bb - (a-c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$; więc $(BO)^2 = \frac{a}{c}(b + a - c)(b - a + c)$; co da ſię wyrazić ieſzcze w téy poſtaci, $(BO)^2 = \frac{a}{c}.(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$; więc oznaczywſzy przez $2s$ ſummę wſzyſtkich trzech boków, będzie $(BO)^2 = \frac{a}{c}(2s - 2c)(2s - 2a) = 4\frac{a}{c}(s-c)(s-a)$. Lecz ieżeli z punktu C, ſpuści ſię na liniią OB proſtopadła CI, podług (Jeom. 299) w tróykącie proſtokątnym CIO, wypadnie ta proporcya, $CO : CI :: R :$ wſt. OCI, to ieſt $a : \frac{1}{2}BO :: R :$ wſt. OCI; więc $\frac{1}{2}BO = \frac{a \text{ wſt. } OCI}{R}$, albo $BO = \frac{2a \text{ wſt. } OCI}{R}$; a zatém $(BO)^2 = \frac{4a^2(\text{wſt. } OCI)^2}{R^2}$; te dwie wártości ilości $(BO)^2$, zrównawſzy iednę z drugą, będzie $\frac{4a}{R^2}(\text{wſt. } OCI)^2 = \frac{4a}{c}(s-c)(s-a)$; albo rozdzieliwſzy przez $4a$ i wyrugówaſzy mianowniki, $ac\,(\text{wſt. } OCI)^2 = R^2(s-c)(s-a)$; ſkąd wnoſi ſię ta proporcya, $ac : (s-c)(s-a) :: R^2 : (\text{wſt. } OCI)^2$, z któréy wynika reguła bardzo proſta, ſłużąca do wyrachówania któregokolwiek kąta w iakimkolwiek tróykącie proſtokryślnym, maiąc wiadome wſzyſtkie trzy boki iego. Ta reguła zależy na tém co naſtępuie:

Doday razém z ſobą wſzyſtkie trzy boki, a od połowy téy ſummy odéym z oſobna ieden po drugim dwa boki zawiéraiące między ſobą kąt ſzukany; co ci da dwie reſzty; potém ułóż tę proporcyą. Mnogość z dwóch boków zawiéraiących między ſobą kąt ſzukany, ma ſię do mnogości z dwóch reſzt, iak ſię ma kwadrat promiénia, do czwartego wyrazu; który będzie kwadratém wſławy odpowiadaiącéy połowie kąta ſzukanego.

Działaiąc zaś przez Lygarytmy, poprzédzaiąca reguła odmiénia ſię w naſtępuiącą:

Doday razém z ſobą wſzyſtkie trzy boki; od połowy téy ſummy: odéym z oſobna ieden po drugim każdy z dwóch boków zawiéraiących między ſobą kąt ſzukany; co ci da dwie reſzty. Potém doday z ſobą logarytmy odpowiadaiące tym dwóm reſztóm, i dopełniénia arytmetyczne logarytmów odpowiadaiących dwóm bokóm zawiéraiącym między ſobą kąt ſzukany. Połowa ſummy tych logarytmów, będzie logarytmém wſławy, odpowiadaiącéy połowie kąta ſzukanego.

195. 3cie Zrównanie $yy + xx = aa$, daie $yy = aa - xx = (a + x)(a - x)$; więc położywſzy zamiaſt x onego wártość, będzie

$$yy = \left(a + \frac{aa - bb + cc}{2c}\right)\left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right)$$

$$= \left(\frac{2ac + aa + cc - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right)$$

$$= \left(\frac{(a+c)^2 - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{bb - (a-c)^2}{2c}\right) =$$

[(a +

$\left[\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right] \times \left[\frac{(b+a-c) \times (b-a+c)}{2c}\right]$; więc $4ccyy = (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$, albo $4ccyy = (a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)$; więc oznaczywſzy przez $2s$ ſummę trzech boków $a+b+c$, będzie $4ccyy = 2s.(2s-2b)(2s-c)(2s-2a)$, albo $4ccyy = 16s.(s-a)(s-b)(s-c)$, albo po rozdzieleniu przez 16, po zebraniu, i po wyciągnieniu piérwiaſtka kwadratowego $\frac{cy}{2} = \sqrt{[s.(s-a)(s-b)(s-c)]}$. Lecz $\frac{cy}{2}$ albo .. $\frac{AC \times BD}{2}$, wyraża powiérſzchnią tróykąta ABC; więc żeby mieć powiérſzchnią tróykąta przy pomocy trzech boków, trzeba od połowy ſummy, odiąć z oſobna ieden po drugim każdy z trzech boków; potém rozmnożyć trzy reſzty przez ſiebie i przez połowę ſummy, a naoſtatek z wypadłéy mnogości wyciągnąć piérwiaſtek kwadratowy.

196. *4te.* Zrówanie $2cx - cc = aa - bb$, daie $bb = aa + cc - 2cx$; lecz gdyby proſtopadła padała zewnątrſz tróykąta, zachowa-
fig. 13. wſzy też ſame oznaczenia co wyżéy (fig. 13), byłoby $yy + xx = aa$, i $yy + cc + 2cx + xx = bb$, ponieważ AD wyrażone piérwéy przez $c - x$, odmiénia ſię tu na $c + x$. Więc odiąwſzy piérwſze zrównanie od drugiego, będzie $cc + 2cx = bb - aa$, albo $c(c+2x) = (b+a) \times (b-a)$; ſkąd wnoſi ſię proporcya, $c : b+a :: b-a : c+2x$; lecz $c+2x$, ieſt iedno co $x+c+x$, to ieſt iedno co $CD + AD$; więc $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD$, co ieſt drugą częścią podania iuż wyżéy wywiedzionego (Jeom. 306).

197.

197. *5te.* Tož ſamo zrównanie $cc + 2cx = bb - aa$, daie ieſzcze, $bb = aa + cc + 2cx$; które przyſtóſówawſzy do zrównania $bb = aa + cc - 2cx$ odpowiadaiącego figurze 12, daie ſię widzieć, że kwadrat bb boku AB położonego naprzeciw oſtrego kąta C, ieſt wárt mniey aniżeli ſumma kwadratów $aa + cc$ dwóch innych boków, bo ieſt wárt tylko tyle, ile wynoſi ta ſumma zmniéyſzona o $2cx$. Przeciwnym ſpoſobém, kwadrat bb boku AB położonego naprzeciw kąta rozwartego C (fig. 13), ieſt wárt $aa + cc + 2cx$, to ieſt wię- *fig.* 13.
céy, aniżeli wynoſi ſumma kwadratów dwóch innych boków. Jeżeliby tedy wyciągała potrzeba wyrachówać kąty przy pomocy zadanych boków, to można zawſze rozeznać na fundamencie tych dwóch uwag, czy kąt ſzukany ma bydź oſtry albo rozwarty.

198. *6te.* Dwa zrównania $bb = aa + cc - 2cx$ i $bb = aa + cc + 2cx$, potwiérdzaią to co ſię powiedziało indziéy o ilościach przéczących. Albowiém iawna ieſt, że podług tego, iak pada proſtopadła BD (fig. 12 i 13), *fig.* 12. i 13.
to ieſt czy wewnątrſz albo zewnątrſz tróykąta, odcinek CD wypada także z różnych ſtrón położony. Jakóż w tych zrównaniach, wyráz $2cx$, ieſt w rzeczy ſaméy poprzédzony przeciwnémi znakami. Więc odwrotnie, niechay będą rachunki iakie chcą, które ſię odprawiły względém iednego z tych tróykątów, z nich zawſze można będzie, wnieść ſobie wyrazy należące do przypadków odpowiadaiących w drugim tróykącie, dawſzy znaki przeciwne częściom położonym z różnych ſtrón na téyże linii. Lecz w tém wſzyſtkiém, co ſię powiedziało wyżéy tak względém wyrachówania iednego z kątów, iako téż względém wyrachówania powiérzchni, widzieliśmy że niewchodził odcinek CD;

CD; więc te dwa podania należą zarówno, do wszelkiego bądź iakiegokolwiek tróykąta prostokryślnegó.

199. Chociaż (powiedziawszy w powszechności), tém łatwiéy iest wyrazić w zrównaniach zagadnienia Jeometryczne, im więcéy będzie wiadomych własnościów linii: atoli ponieważ sama Algebra służy do odkrycia takowych własnościów, przeto liczba podań prawdziwie potrzebnych iest bardzo określona. Te dwa podania, iakoto że *w Tròykątach sobie podobnych, boki odpowiadaiące są proporcyonalne*, i że *w tróykącie prostokątnym, summa kwadratów dwóch boków przyległych kątowi prostému, równa się kwadratowi przeciwprostkątnéy*, te dwa podania mówię, są fundamentém przystósowania Algebry do Jeometryi. Atoli podług rodzaiu zagadnienia, może bydź wiele sposobów użycia tych dwóch podań; w zagadnieniu które rozbiéraliśmy dopiéro wyżéy, takowe użycie łatwo dało się postrzédz; ale co do wniosków które uczyniliśmy sobie z rozwiązania tego zagadnienia, i które nam służyły do wyrachówania

nia kąta przy pomocy trzech boków, nietak łatwo napaśdź można na przeprzemysł nakryślenia łuku' *BO* (fig. 12) dla wyrachówania cięciwy *BO*; fig. 12.
i na sposób wynalezienia wstawy kąta *OCI*, przy pomocy połowy *OI* téyże cięciwy. Tóż samo dałoby się powiedzieć o wielu innych zagadnieniach. Albowiém iużto trzeba przedłużyć pewne linie, póki aż niezniydą się z drugiémi, iużto trzeba ie poprowadzić równolegle innym liniióm, iuż téż dać im kierónki takie, żeby pewny iaki kąt między sobą czyniły. Słowém, przystósowanie Algebry do Jeometryi, lub téż do iakiéykolwiek innéy nauki, wyciąga po Rachmistrzu dostatecznego rozsądku, potrzebnego mu do wyboru i do użycia sposobów. Ze zaś takowy rozsądek, po większéy części nabywa się przez używanie, przeto zdało nam się bydź rzeczą potrzebną, przystósować te uwagi do różnych przykładów.

200. Obierzmy sobie naprzód do rozwiązania to zagadnienie: *Z danego punktu* fig. 14.
A (*fig.* 14), *którégo położenie byłoby wiadome względém dwóch linii* HD *i* DI, *czyniących między sobą wiadomy kąt* HDI, *popro-*

wadzić liniią proſtą AEG, *w taki ſpoſób, ażeby tròykąt* EDG *przez nię ograniczony, miàł iaką pewną zadaną powiérſzchnią, to ieſt powiérſzchnią* np. *cc*, *równaiącą ſię powiérſzchni kwadratu iakiego wiadomego.*

Z punktu *A* poprowadźmy liniią *AB* równoległą linii *DE*, i liniią *AC* proſtopadłą na liniią *DG* przedłużoną; z punktu *E* gdzie liniia *AEG* ma ſię przecinać z liniią *DH*, zmyślmy ſobie proſtopadłą *EF*. Gdyby nam były wiadome liniie *EF* i *DG*, rozmnożywſzy ie iednę przez drugą, i wziąwſzy połowę wynikaiącéy ſtąd mnogości, mielibyśmy powiérſzchnią tróykąta *EDG*, która powinna równać ſię ilości *cc*.

Zróbmy tedy $DG = x$; a względém linii *EF*, zobaczmy czy niémożnaby naznaczyć iéy wártości, iużto przy pomocy ilości x, iuż przy pomocy tego, co mamy wiadomo w zagadniéniu.

Ponieważ położenie punktu *A* rozumié ſię znaiome, więc należy także poczytać za rzecz wiadomą odległość *BD*, w któréy przechodzi równoległa *AB*, i odległość *AC*, od punktu *A* do linii *DG* przedłużonéy. Oznaczywſzy tedy *BD* przez a, a *AC* przez b; tróykąty ſobie podobne *ABG* i *EDG* dadzą, nam, $BG : DG :: AG : EG$; tróykąty zaś *ACG*, *EFG* także ſobie podobne, dadzą znowu, $AG : EG :: AC : EF$; więc $BG : DG :: AC : EF$; to ieſt $a + x : x :: b : EF$; więc $EF = \frac{bx}{a+x}$. A że powiérſzchnia tróykąta *EDG*, powinna równać ſię kwadratowi cc; więc muſi bydź $EF \times \frac{DG}{2}$ albo $\frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc$; to ieſt, że będzie $\frac{bxx}{2a+2x} = cc$, albo wyrugówa-

wawſzy mianownika, $bxx = 2acc + 2ccx$.

To zrównanie, rozwiązane podług reguł przepiſanych do zrównań drugiego ſtopnia (81 i daléy), daie na x te dwie wártości, $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b})}$; z których ta co ma znak —, nienależy do zagadniénia teraźniéyſzego.

Zeby wykryślić piérwſzą wártość, piſzę ią w poſtaci naſtępuiącéy: $x = \frac{cc}{b} + \sqrt{[(\frac{cc}{b} + 2a)\frac{cc}{b}]}$. Po tém przygotówaniu, prowadzę liniią nieokréśloną *PQ* (fig. 15); na téy linii z któregokolwiek punktu *C*, ſtawiam proſtopadłą $AC = b$, i biorę na liniiach *CA* i *CP*, liniie *CO* i *CM* każdą z nich równaiącą ſię bokowi zadanego kwadratu; a poprowadziwſzy liniią *AM*, prowadzę przez punkt *O*, rownolegle z tąż liniią *AM*, liniią *ON*, która mi odznaczy długość *CN*, na wártość ilości $\frac{cc}{b}$; albowiém tróykąty ſobie podobne *ACM*, *OCN*, daią mi $AC : OC :: CM : CN$, to ieſt $b : c :: c : CN$, więc $CN = \frac{cc}{b}$. *fig. 15.*

A naténczas wártość ilości x odmiéni ſię na tę, $x = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; lecz $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$, wyraża (187) ſrzednią proporcyonalną między *CN* i $CN + 2a$; więc nieidzie tylko o wynaleziénie téy ſrzedniéy proporcyonalnéy i o dodanie iéy do *CN*. Tym koncém, na linii *NC* przedłużonéy, biorę $CQ = 2a$, a na całości *NQ* opiſuię półkola *NVQ* przecinaiące ſię w *V* z liniią *CA*; wznaczam cięciwę *NV* od *N* do *P*, i mam *CP* na wártość ilości x. Albowiém *NV* (Je-

(Jeom. 112) ieſt śrzednią proporcyonalną między NC i NQ, to ieſt między CN i $CN + 2a$; więc NV albo $PN = \surd[(CN + 2a) \times CN]$; więc $CP = CN + PN = CN + \surd(CN + 2a) \times CN] = x$. Wznaczywſzy tedy liniią
fig. 14. CP od D do G (fig. 14), pokaże ſię punkt G, przez który i przez punkt A pociągnąwſzy liniią AG, zamknie ſię tróykąt EDG równaiący ſię w powiérſzchni kwadratowi cc.

201. Zeby zaś wiedziéć co znaczy druga wártość głoſki x, to ieſt $x = \frac{cc}{b} - \surd[(\frac{cc}{b} + 2a)\frac{cc}{b}]$, trzeba uważyć, że ponieważ w daném zagadniéniu nic mi znać nie-
fig. 14. daie, ieżeli rzecz idzie o kąt EDG (fig. 14), albo też o kąt $E'D'G'$ piérwſzemu równy, i powſtaiący z przedłużenia linii GD, ED; iako też ponieważ ilości zadane wiadome, zarówno ſłużą do obu, przeto to drugie rozwiązanie czyli ta druga wártość, miałaby miéyſce w ten czas, gdyby potrzeba było zrobić toż ſamo w kącie $E'DG'$, co ſię zrobiło w kącie EDG. Jakóż, oznaczywſzy DG' przez x, i inne oznaczenia zoſtawiwſzy też ſame, tróykąty ABG', $E'DG'$, ſobie podobne, z przyczyny równoległych AB i DE' daią $BG' : DG' :: AG' : G'E'$; ſpuściwſzy zaś proſtopadłą $E'F'$, tróykąty ſobie podobne ACG' $E'F'G'$, znowu dadzą $AG' : G'E' :: AC : F'E'$; więc $BG' : DG' :: AC : F'E'$, to ieſt, $a - x : x :: b : F'E'$: więc $F'E' = \frac{bx}{a + x}$. A że powiérſzchnia tróykąta $G'E'D'$ ma bydź równa kwadratowi cc, więc muſi bydź $\frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc$; ſkąd wnoſi ſię $bxx = 2acc - 2ccx$;

a

a zatém będzie $x = \frac{-cc}{b} \pm \surd(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b})$; wártości też ſame co w przypadku poprzédzaiącym, tylko z tą różnicą, że maią znaki przeciwne, tak iak bydź powinno; ponieważ tu ilość x uważa ſię z przeciwnéy ſtrony, względém tamtéy z którey uważała ſię piérwéy. Co może ſłużyć za nowe potwiérdzenie tego, o czém iuż powiedziało ſię tyle razy, to ieſt, że wártości przéczące, należy brać w rozumiéniu przeciwném tamtemu, w którém brały ſię ilości twiérdzące.

Wykryślenie przepiſane do przypadku poprzédzaiącego, ſłuży zarówno i do niniéyſzego, tylko z tą różnicą, ażeby (fig. 15) *fig.* 15.
wznaczyć NV od N do K ku Q; a natenczas wártość głoſki x, która w poprzédzaiącym przypadku była wyrażona przez CP, tu będzie wyrażona przez CK. Jakóż wártość głoſki x, odpowiadaiąca teraźniéyſzému przypadkowi, ieſt $x = -\frac{cc}{b} + \surd(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b})$, albo $x = -\frac{cc}{b} + \surd[(\frac{cc}{b} + 2a) \times \frac{cc}{b}]$, to ieſt, $x = -CN + \surd[(CN + 2a) \times CN]$; a ponieważ $NV = \surd[(CN + 2a) \times CN]$; więc będzie $x = -CN + NV = -CN + NK = CK$. A zatém wznaczywſzy CK od D do *fig.* 14.
G' (fig. 14), wynaydzie ſię punkt G', przez który iako też przez punkt A, poprowadziwſzy liniią $AG'E'$, zamknie ſię tróykąt $G'DE'$ równaiący ſię kwadratowi cc, i daiący drugie rozwiązanie tegóż zagadniénia.

202. W poprzédzaiącym przykładzie, rozumieliśmy punkt A (fig. 14) bydź poło- *fig.* 14.
żony nad liniią BG; gdyby zaś przeciwnie znaydówał ſię pod nią (fig. 16), to natenczas *fig.* 16.
ilość b, albo liniia AC, byłaby przécząca, a

 za

zatém piérwſze dwie wártości głoſki x byłyby naſtępuiące: $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b})}$, albo $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$; gdzie widzieć można, iż zagadniénie tylko w ten czas ieſt podobne do rozwiązania, kiedy $2a$ będzie mniéyſze iak $\frac{cc}{b}$; bo gdyby było większe, to ilość położona pod znakiém piérwiaſtkowym, byłaby przécząca, a zatém (85) i wártości głoſki x byłyby albo zmyślone albo wcale niepodobne. Kiedy $2a$ będzie mniéyſze, iak $\frac{cc}{b}$, to natenczas dwie wártości głoſki x wypadaią przéczące; to ieſt, że w takim razie zagadniénie względém kąta HDI ieſt niepodobne do rozwiązania; ale względém drugiego kąta $E'DG'$ równego piérwſzému, może miéć dwa rozwiązania: które żeby miéć, trzéba wykryślić te dwie wártości $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$, a to w ſpoſób naſtępuiący. Wynalázłſzy, iak wyżéy, na wártość ilości $\frac{cc}{b}$ linią CN, zrób
fig. 17. (fig. 17) $NQ = 2a$, i opiſawſzy na NQ iako na ſrzednicy, półkolá NVQ, przytkniy do niego ſtyczną CV; potém wnieś CV od C do P ku N i od C do K na drugą ſtronę; to linije NP i NK będą dwiema wártościami głoſki x; które wznaczywſzy od D do G i od D do G'
fig. 16. (fig. 16), a przez punkt A, i przez punkta G i G' poprowadziwſzy dwie linije proſte EG, $E'G'$, zrobią ſię dwa tróykąty EDG, $E'DG'$, z których każdy równać ſię będzie kwadratowi cc. Co zaś powiedziało ſię że dwie liniie

niie NP i NK (fig. 17) będą dwiéma wártó- fig. 17.
tościami głoſki x, to wynika ſtąd, że podług (Jeom. 124), CV będąc ſrzednią proporcynalną między CN i CQ, ieſt $= \sqrt{(CQ \times CN)}$, albo (położywſzy zamiaſt tych linii onych wártości), będzie CV albo CP albo $CK = \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$; więc $NP = CN - CP = \frac{cc}{b} - \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$; a zaś $NK = CN + CK = \frac{cc}{b} + \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$; lecz te dwie ilości, ſą też ſame co wártości głoſki x, odmiéniwſzy tylko w nich znaki; więc
też ilości wznaczone od D ku G (fig. 16), fig. 16.
będą wártościami głoſki x.

203. Gdyby punkt A (fig. 18) znaydówał ſię bydź położony w ſamymże kącie HDI, fig. 18.
natenczas z przyczyny że BD przypada z przeciwnéy ſtrony, iak przypadała przedtém, ilość a ſtaie ſię przéczącą, a zatém dwie wártości głoſki x będą naſtępuiące, $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b})}$, to ieſt też ſame (przemiéniwſzy tylko znaki), o których wykryśléniu dopiéro mówiliśmy. Skąd pokazuie ſię, że powinny bydź tak wykryślone, iak było w fig. 17; ale wártości głoſki x trzeba wznaczyć od D ku I (fig. 18); przez co zamkną ſię dwa tróykąty DEG, $DE'G'$, oba czyniące zadoſyć zagadniéniu.

204. Naoſtatek punkt A, może ieſzcze znaydować ſię bydź położony nietylko poniżéy linii
BD (fig. 19), ale nadto w ſamymże kącie BDE'. fig. 19.
Natenczas obie ilości a i b, wypadaią prze-czą-

czące, ſkąd wynika $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$, to ieſt że wyrazy wypadaią też ſame co wyżéy, ale z przeciwnéwi znakami. Wykry-
fig. 15. ślić ie tedy należy tak iak w fig. 15. Gdzie CK będąc wártością twiérdzącą głoſki x, a CP iéyże wártością przéczącą, piérwſzą trze-
fig. 19. ba wznaczyć (fig. 19), od D do G ku B, a drugą z przeciwnéy ſtrony, to ieſt od D do G.

Nad témi różnémi przypadkami rozwiązań, dla tegoząſtanowiliśmy ſię tu tak długo, ażeby ſię pokazało, iako te wſzyſtkie rozwiązania zawiéraią ſię w iedném zrównaniu, iako wynikaią z ſaméy odmiany znaków, i iako przeciwne położenia linii, bywaią oznaczone przeciwnémi znakami i odwrotnie. Zoſtaie mam ieſzcze, ażebyśmy pokazali niektóre użycia tegóż rozwiązania, nad którém bawiliśmy ſię dotąd.

fig. 20. 205. Gdyby zadane było to zagadniénie: *Z danego punktu A (fig. 20) zewnątrſz albo wewnątrſz tróykąta wiadomego* DHI, *poprowadzić liniią* AF, *któraby przedzieliła ten tróykąt na dwie części* DEF, EFIH, *takie, aby iedna do drugiéy miała ſię w ſtòſunku wiadomym, to ieſt* np. *w takim:* $m : n$. To zagadniènie, znayduie ſwoie rozwiązanie w rozwiązaniu zagadniénia poprzédzaiącego. Albowiém, ponieważ tróykąt DHI ieſt zadany, i ponieważ wiadomo, tróykąt DEF iaką ma bydź częścią tróykąta DHI; więc ſzukaiąc czwartego wyrazu téy proporcyi, $m+n : m ::$ iak ſię ma powiérſzchnia tróykąta DHI do czwartego wyrazu, takowy czwárty wyráz pokaże powiérſzchnią odpowiadaiącą tróykątowi DEF. Lecz zawſze można wynaléśdź kwadrat cc, równaiący ſię téy powiérſzchni (185); więc zagadniénie wychodzi na

to

to, ażeby przez punkt A poprowadzić liniią AEF, którąby wráz z bokami DH, DI, zamykała tróykąt DEF równaiący ſię kwadratowi cc; co wychodzi właśnie na zagadniénie poprzédzaiące.

206. Jawna ieſt także, że pod tož ſamo zagadniénie możnaby ieſzcze podciągnąć i to: *Przedzielić iakąkolwiek figurę proſtokryślną (fig. 21) przez liniią poprowadzoną z* fig. 21.
iakiegokolwiek punktu A, *na dwie części* BCFE, EFDHK, *któreby były między ſobą w danym ſtóſunku.* Jakóż, ponieważ figura $BCDHK$ rozumié ſię wiadoma, więc muſzą bydź w niéy wiadome wſzyſtkie kąty i boki; a zatém łatwo będzie mieć tróykąt BLC, powſtaiący z dwóch boków przedłużonych KB i DC; maiąc wiadomy bok BC, i dwa kąty LBC i LCB, które ſą ſpełniéniami kątów wiadomych CBK i BCF; a tak powiérſzchnią tróykąta LBC można poczytać za znaiomą. Naoſtatek, ponieważ powiérſzchnia $EBCF$ ma bydź pewną częścią powiérſzchni cáłkowitéy, więc także rozumié ſię wiadoma: a zatém zagadniénie wychodzi na to: ażeby poprowadzić liniią AEF, któraby w kącie KLD zamknęła tróykąt, równaiący ſię zadanemu kwadratowi. Stąd zaś łatwo można zrozumiéć, iakby ſobie trzeba poſtąpić, gdyby przyſzło podziélić też figurę na większą liczbę części, znaydówać ſię maiących między ſobą w danych ſtóſunkach.

207. Należy nam tu uczynić ieſzcze iednę uwagę, a ta ieſt, że ieżeli niektóre z ilościów danych, wchodzących w zrównanie ſłużące

do

do rozwiązania iakiego zagadniénia; ſą takie, iż odmiéniwſzy znaki przed niémi położone, w znaki przeciwne, zrównanie przeto nieodmiéni ſię; albo ieżeli odmiana w położeniu iakiéy linii, lub téż ſzukane liniie figury, niepociągaią za ſobą żadnéy odmiany, ani w położeniu ani w wielkości linii zadanych; natenczas pomiędzy różnémi wártościami głoſki x, (kiedy ich będzie wiele w zrównaniu), zawſze znaydzie ſię iedna taka, która da rozwiązanie przyzwoite temu przypadkowi, co wſkazuie taką odmianę.

Np. W zagadniéniu, którém zabawialiśmy ſię dotąd, widziéliśmy że iedna z wártościów głoſki x, rozwięzywała go bezśrzednie w takim przypadku, kiedyby liniia fig. 14. AEG (fig. 14), miała przechodzić przez kąt HDI, iak ſię rozumiało w przedſięwziętym rachunku; lecz oráz widzieliśmy, że druga wártość téyże głoſki x, dała nam rozwiązanie zagadniénia w takim przypadku, kiedyby rzecz ſzła nie o kąt HDI, ale o kąt iemu przeciwny w wiérſzchółku.

Przyczyna tego ta ieſt, że w każdym przypadku maiąc używać tychże ilościów, i czynić też ſame rozumówania, powinno ſię koniecznie przyiśdź do tegóż ſamego zrównania; a zatém tóż ſamo zrównanie muſi dać oba rozwiązania.

208. Daymy teráz, że *na kierónku danéy linii* AB (*fig.* 22), *trzeba wynaléśdź punkt* C, *taki ażéby odległość iego od punktu* A, *była śrzednią proporcyonalną, między iego odległością do punktu* B *i między całą liniią* AB. fig. 22. Oznaczywſzy tedy przez a, liniią daną AB, a przez x ſzukaną odległość AC, mieć będę $BC = a - x$, a ponieważ ma bydź $AB : AC :: AC : CB$ albo $a : x :: x : a - x$, więc po rozmnożeniu ſkraynych i śrzednich wyrazów, muſi bydź $xx = aa - ax$, albo $xx + ax = aa$; zrównanie drugiego ſtopnia, z którego wnoſi ſię $x = -\frac{1}{2}a \pm \surd(\frac{1}{4}aa + aa)$.

Zeby wykryślić piérwſzą z tych wártościów, to ieſt $x = -\frac{1}{2}a + \surd(\frac{1}{4}aa + aa)$, trzeba podług tego co ſię powiedziało, (187), z punktu B wyſtawić proſtopadłą $BD = \frac{1}{2}a$, potém poprowadziwſzy AD, będzie $AD = \surd[(BD)^2 + (AB)^2] = \surd(\frac{1}{4}aa + aa)$; niezoſtanie tedy więcéy do czyniénia, tylko od téy linii odiąć ilość $\frac{1}{2}a$, co wykonać można, wznaczaiąc DB od D do O; natenczas AO, będzie wárto tyle, co $\surd(\frac{1}{4}aa + aa) - \frac{1}{2}a$, to ieſt będzie równać ſię iłości x; wſtawiwſzy tedy AO od A

do C ku B, punkt C będzie ſzukanym punktém.

Co ſię zaś tyczé drugiéy wártości x, to ieſt $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; wznaczywſzy BD do O' na przedłużeniu linii AD, liniia AO' będzie wárta tyle, co $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; a że taż ſama ilość wzięta w ſpoſób przéczący, ieſt wártością głoſki x, więc trzeba wznaczyć AO' od A do C' na linii AB, przedłużonéy w przeciwną ſtronę, téy w którą rozumieliśmy że x dążyło w poprzédzaiącém rozwiązaniu; tym ſpoſobém znaydzie ſię drugi punkt C' taki, że odległość iego od punktu A, będzie śrzednią proporcyonalną, między odległością iegóż od punktu B, i między całą liniią AB.

Uważmy tu po drodze, że w tém zagadniéniu zawiéra ſię także i to: *Ażeby liniią daną* AB *przedzielić w śrzednim i ſkraynym ſtóſunku.* Dla tego téż wykryślenie dopiéro przepiſane, ieſt właśnie toż ſamo, które podaliśmy byli wyżéy (Jeom. 125). Lecz widzimy, że Algebra prowadzi nas do wynaleziénia ſpoſobu takowego wykryślénia, zamiaſt że w Jeometryi, zaſadzaliśmy ſię na wykryśleniu iuż wynalezioném, i tylko dowodziliśmy należytości i prawdy iego.

209. Jeżeli cokolwiek zaſtanowimy ſię nad porządkiém, który zachowaliśmy w zagadniéniach poprzédzaiących, to pokaże ſię, że zawſze na niewiadomą obiéraliśmy ſobie taką liniią, któraby (znalázłſzy ią) ſłużyła do wynaleziénia wſzyſtkich

ſtkich innych linii, zgadzaiących ſię z warunkami zagadniénia. I tak zawſze trzeba ſobie poſtępówać: atoli w obiéraniu ſobie takiéy linii, należy ieſzcze umiéć uczynić wybór; częſtokróć może bydź kilka takich linii, które będąc ráz znaiome, zarówno ſłużyłyby do wynaleziénia inſzych linii; ale ſpomiędzy nich, iedne prowadzą do trudniéyſzych a drugie do łatwiéyſzyth zrównań. Zeby tedy wiedziéć do czego ſkłonić ſię w takim przypadku, kładziémy tu regułę naſtępuiącą.

210. *Jeżeli ſpomiędzy linii albo ilościów, które zoſobna obrane będąc na niewiadomą, służyłyby do wynaleziénia wſzyſtkich innych ilościów, ieżeliby mówię, ſpomiędzy takich linii albo ilościów, znaydowało ſię dwie zarówno zgodnych, tak iżby rozſądnie przewidziéć można, że obie przywiodłyby do iednakowego zrównania (wyiąwſzy odmiénność znaków); w takim razie dobrze będzie, ani téy ani owéy niebrać za niewiadomą, ale raczéy wziąść inną ilość, któraby zarówno zawisła od takich obu ilościów.*

Np.

Np. wziąść za niewiadomą połowę summy owych dwóch ilości, albo połowę ich róznicy, albo też środek proporcyonalny między niémi i. t. d. Tym sposobém zawsze wpadnie się na zrównanie prościeysze, iak gdyby się szukało było saméy ilości téy lub ówéy. W następuiącém zagadnieniu zobaczymy téy prawdy kilka przykładów.

211. *Z punktu D (fig. 23) położonego w kącie prostym IAE i równo odległego od dwóch boków* IA *i* AE, *poprowadzić linią prostą* DB, *taką ażeby część iéy* CB *zawarta w kącie prostym* EAB, *równała się iakiéy pewnéy linii danéy.*

Postawiwszy prostopadłe DE, DI, mogę zarówno obrać sobie na niewiadomą, linią CE albo AB, AC albo IB, CD albo DB. Jeżelibym wziął na niewiadomą *np.* linią CE, to oznaczywszy ią przez x, a przez a każdą z dwóch linii sobie równych DE, DI, które rozumieią się bydź wiadome, nadto oznaczywszy przez c linią daną, któréy ma się równać linia BC, miéć będę $AC = AE - CE = a - x$; a zaś linią AB, dadzą

dzą mi dwa tróykąty sobie podobne DEC, CAB, przez tę proporcyą: $CE : DE :: AC : AB$; to iest, $x : a :: a - x : AB$; skąd wyciąga się $AB = \frac{aa - ax}{x}$. Lecz na fundamencie własności tróykąta prostokątnego (Jeom. 164), $(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2$; więc położywszy zamiast tych linii ich wártości Algebraiczne, będzie $(a-x)^2 + (\frac{aa-ax}{x})^2 = cc$, albo $aa - 2ax + xx + \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{xx} = cc$; álbo po wyrugówaniu mianownika, po przestawiéniu i po zebraniu, $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$; zrównanie czwartego stopnia, i oczywiście nienayłatwiéysze do rozwiązania.

Jeżelibym znowu zamiast CE, wziął na niewiadomą linią IB; to oznaczywszy ią przez x, i sprawiwszy się porządkiém zachowanym w poprzédzaiącém rozwiązaniu, wpádłbym na zrównanie nieróżniące się od dopiéro wyżey wynalezionego, tylko w tém, że zamiast $a - x$ byłoby w niém położono $x - a$; to iest, które byłoby właśnie toż samo, z przy-

przyczyny że te ilości znayduią ſię w niém bydź podnieſione do kwadratu. Podobnież, gdyby ſię na niewiadomą obrała liniia AB, zrównanie z takiego obrania wynikaiące, nieróżniłoby ſię tylko znakami, od zrównania wypadaiącego przez obranie linii AC za niewiadomą. Co ſię zaś tyczè linii DB i DC, zrównania odpowiadaiące każdéy z nich, nieróżniłyby ſię także między ſobą, tylko znakami; zatèm zadnéy z tych dwóch linii obiérać ſobie nienależy za niewiadomą.

Ale wziąwſzy za taką niewiadomą, ſummę dwóch linii DB i DC, i oznaczywſzy ią przez $2x$, podług (Jeom. 305) miéć będę $DB = x + \frac{1}{2}c$, a $DC = x - \frac{1}{2}c$; do wynaleziénia zaś linii AB i AC, równoległe DI i CA, dadzą mi te dwie proporcye, $DC : CB :: IA$ albo $DE : AB$ i $DB : CB :: DI : AC$; to ieſt, $x - \frac{1}{2}c : c :: a : AB$, i $x + \frac{1}{2}c : c :: a : AC$; więc $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$, a zaś $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$; a zatém, z przyczyny że tróykąt proſtokątny daie mi

mi $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, miéć będę $\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc$; albo téż po znieſiéniu ułamków i po rozdzieleniu przez cc, $a^2(x + \frac{1}{2}c)^2 + a^2(x - \frac{1}{2}c)^2 = (x + \frac{1}{2}c)^2 (x - \frac{1}{2}c)^2$; po odprawiéniu wſkazanych działań, po przeſtawiéniu i po zebraniu będzie, $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$; zrównanie wprawdzie także czwártego ſtopnia, ale od poprzédzaiącego łatwiéyſze do rozwiązania, bo podług (141) rozwięzuie ſię w ſpoſób przepiſany do zrównań drugiego ſtopnia.

Można także ieſzcze przyiśdź do zrównań dosyć proſtych, używaiąc dwóch niewiadomych, z którychby iedna wyrażała ſummę obu linii AB i AC, a druga ich różnicę; to ieſt, trzeba zrobić $AB + AC = 2x$, a zaś $AB - AC = 2y$, ſkąd wypadnie $AB = x + y$, a zaś $AC = x - y$; natenczas, tróykąt proſtokątny ABC, da mi $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$ a tróykąty ſobie podobne ABC, IBD, dadzą $AB : AC :: IB : ID$, ſkąd ſkładam ſobie dwa zrównania, ſłużące do wynaleziénia wártościów gło-

głoſek x i y. A wyciągnąwſzy ziednego z nich wártość kwadratu xx, i takową położywſzy w drugiém zrównaniu, mieć będę nowe zrównanie, ſłużące mi do wynalezienia wártości głoſki y. Lecz dokóńczenie takowego rachunku, zoſtawuiemy dla wprawy poczynaiącym, ſami zaś powracamy do naſzego zrównania.

Podług tego co ſię powiedziało (141), będzie $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 + (\frac{1}{4}cc + aa)^2 = (\frac{1}{4}cc + aa)^2 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4 = aacc + a^4$; a wyciągnąwſzy piérwiaſtek kwadratowy, będzie $x^2 - (\frac{1}{4}cc + aa) = \pm\sqrt{(aacc + a^4)}$, a zatém $x^2 = \frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{(aacc + a^4)}$; wyciągnąwſzy znowu powtórnie piérwiaſtek kwadratowy będzie naoſtatek:

$$x = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{(aacc + a^4)}]} \text{ albo}$$
$$x = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{4}cc + aa \pm a\sqrt{(cc + aa)}]}$$

Z tych cztérech wártościów głoſki x, wynikaiących z dwoiakiego połączenia podwóynego znaku $\pm$, nieznayduie ſię tylko iedna, któraby należała do zagadnienia zadanego; to ieſt, $x = +\sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{(cc + aa)}]}$. Ta zaś wártość, $x =$ $+$

$+\sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{(cc + aa)}]}$, rozwięzowałaby zagadnienie w takim przypadku, kiedyby liniia CB miała zawiérać ſię w tymże kącie co punkt D (zob. fig. 24); a natenczas fig. 24.
x, niewyraża połowy ſummy, ale połowę różnicy między dwiéma liniami DB i DC; o czém łatwo można przekonać ſię, oznaczywſzy takową różnicę przez $2x$, i rozwiązawſzy zagadnienie tymże ſpoſóbém co wyżéy; albowiém będzie $DB = \frac{1}{2}c + x$, $CD = \frac{1}{2}c - x$, a równoległe DI i CA, dadzą $DB : CB :: DI : CA$, tudzież $DC : CB :: AI : AB$; to ieſt $\frac{1}{2}c + x : c :: a : CA$, i $\frac{1}{2}c - x : c :: a : AB$; więc $CA = \frac{ac}{\frac{1}{2}c + x}$, a zaś $AB = \frac{ac}{\frac{1}{2}c - x}$; więc z przyczyny tróykąta proſtokątnego CAB, będzie $\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c + x)^2} + \frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c - x)^2} = c^2$, albo po odprawiéniu tychże działań co wyżéy, $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$; zrównanie zgoła toż ſamo, króre wypadło nam wyżéy, wziąwſzy za niewiadomą ſummę dwóch linii BD i CD (fig. 23). fig. 23.
Więc toż ſamo zrównanie ſłużąc do

fig. 23. LIM, daie (fig. 23) $LM = \sqrt{(MI)^2 + (IL)^2}$
fig. 24. $= \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{(aa+cc)}]} = x$, a w fig. 24. $IM = \sqrt{(LM)^2 - (IL)^2} = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa+cc)}]} = x$; więc t. d.

Trzeba tu uważyć względém téy oratniéy wártości, że w wykryśleniu dopiéro opiſaném, rozumié ſię
fig. 24. liniia IH (fig. 24.) większa nad liniią LI, albo przynaymniéy onéy równa. Gdyby była mniéyſza, zagadniénie w tym razie byłoby niepodobne do rozwiązania; co téż pokazuie i Algebra. Albowiém w wártości $x = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa+cc)}]}$, ieżeli $aa + \frac{1}{4}cc$ to ieſt $(IH)^2$ ieſt mniéyſze od $a\sqrt{(aa+cc)}$ to ieſt od $(IL)^2$, to cała ilość okryta pierwſzym znakiém piérwiaſtkowym, będzie przécząca, a zatém wártość głoſki x tylko będzie zmyślona.

212. Obrawſzy ſobie na niewiadomą, ſummę dwóch linii DB i
fig. 23. 24. DC (fig. 23) albo ich rożnicę (fig. 24), przypadliśmy na zrównanie prościéyſze iak biorąc CE albo AC albo AB albo IB, bo ſtóſówność linii DB i DC z liniiami IB i AB, ieſt podobna do téy, która zachodzi między témiż liniiami DB i DC a

a między liniiami AC i CE; to ieſt że mogą bydź wynalezione przez działania iednakowe, używaiąc linii IB i AB, albo AC i CE. A w powſzechności powiedziawſzy, ponieważ zrównanie powinno zawiérać w ſobie wſzyſtkie różne ſtóſunki, iakie tylko zachodzić mogą między ilością ſzukaną i innémi ilościami od niéy zawiſłémi, więc takowe zrównanie zawſze wypadać będzie tém prościéyſze, im mniéy zachodzić będzie różnych ſtóſunków, między tą ilością co ſię obrała za niewiadomą, a między innémi ilościami.

213. Daymy że $ABED$ (fig. 25). wyraża kulę powſtaiącą z kołowrotu pół koła ABE około środnicy AE. W takowym ruchu, z obrotu wycinka ABC robi ſię wycinek kulowy, ſkładaiący ſię z odcinka kulowego, powſtaiącego z kołowrotu półodcinka ABP i z ſtożka, powſtaiącego z kołowrotu tróykąta proſtokątnego BPC. Jeſt zadano ażeby dóyśdź, w którém miéyſcu odcinek kołowy i ſtożek, ſą ſobie równe. fig. 25.

 Zeby

Zeby rozwiązać to zagadnienie, należy ſobie przypomnieć (Jeom. 247), że wycinek kulowy, równa ſię mnogości, z powiérzchni czaſzki BAD rozmnożonéy przez trzecią część promiénia AC. Powiérzchnia zaś czaſzki (Jeom. 226), wynayduie ſię, rozmnożywſzy okrąg $ABED$ przez wyſokość AP téyże czaſzki. Więc ieżeli oznaczymy przez $r : c$, ſtoſunek promiénia do okręgu, i ieżeli zrobimy $AC = a$, $AP = x$; dóydziémy okręgu $ABDE$ przy pomocy téy proporcyi, $r : c :: a : ABDE$, który pokaże ſię bydź $\frac{ca}{r}$; więc powiérzchnia czaſzki będzie $\frac{cax}{r}$, a zatém na bryłowatość wycinka wypadnie, $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3}a$ albo $\frac{caax}{3r}$.

Zeby mieć bryłowatość ſtożka, trzeba rozmnożyć powiérzchnią koła ſłużącego mu za podſtawę, to ieſt powiérzchnią koła maiącego za promień BP, przez trzecią część wyſokości CP: lecz $CP = CA - AP = a - x$, a zaś $CB = a$, więc w tróykącie proſtokątnym BPC, będzie $BP = \surd((CB)^2 - (CP)^2) = \surd(aa -$

aa

$aa + 2ax - xx) = \surd(2ax - xx)$; a ponieważ znowu, żeby mieć powiérzchnią koła maiącego za promień BP, trzeba rozmnożyć okrąg iego przez połowę promiénia, żeby zaś mieć takowy okrąg, trzeba wyrachówać czwárty wyráz tèy proporcyi, $r : c :: \surd(2ax - xx)$, do czwartego wyrazu, który bydź pokaże ſię $\frac{c\surd(2ax - xx)}{r}$, więc rozmnożywſzy ten okrąg przez połowę promiénia $\surd(2ax - xx)$, wypadnie na powiérzchnią podſtawy ſtożka, $\frac{c.(2ax - xx)}{2r}$; którą naoſtatek rozmnożywſzy przez trzecią część wyſokości CP, to ieſt przez $\frac{a-x}{3}$, wyniknie na bryłowatość ſtożka, $\frac{c.(2ax - xx)}{2r} \times \frac{a-x}{3}$. Lecz ażeby ſtożek równał ſię odcinkowi, trzeba aby odcinek który ieſt ſummą tych obu brył, był dwa razy większy od każdéy z nich, więc muſi bydź $\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax - xx}{2r} \times \frac{a-x}{3}$, albo $\frac{caax}{3} = \frac{c.(2ax - xx).(a-x)}{3r}$, wyrugówawſzy czynnika 2, ſpólnego licznikowi i mianownikowi. Otóż ieſt zrównanie

nie

nie ſłużyć maiące do rozwiązania zagadniénia. Można go ieſzcze zrówbić prościéyſzém, wyrugówawſzy $3x$ ſpólnego dziélnika, i cx ſpólnego mnożnika obu części zrównania; a natenczas będzie, $aa = (2a - x) \cdot (a-x)$, albo $xx - 3ax = - aa$; ſkąd podług reguł piérwſzego Rozdziału, wyciąga ſię $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$. Lecz z tych dwóch wártościów, nierozwięzuie zagadniénia tylko ta, $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, bo druga wártość $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, iako wyrażaiąca więcéy nad $2a$, to ieſt więcéy nad śrzednicę, oczywiście niémoże ſłużyć do kuli.

Chcąc tedy wykryślić tę wártość, $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. trzeba ią napiſać w téy poſtaci: $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$; a dopiéro zrobiwſzy $AM = \frac{3}{2}a$, na AM iako na śrzednicy, opiſuie ſię pół koła AOM, w którém wznaczywſzy cięciwę $AO = a$, i poprowadziwſzy OM. takowa liniia OM przenoſi ſię od M do P ku A, tak że punkt P da wymiár wyſokości AP, czyli wártość głoſki x. Jakóż, z przyczyny tróykąta proſtokątnego AOM, będzie OM albo $PM = \sqrt{(AM^2 - AO^2)} = \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$; więc $AP = AM - PM = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)} = x$.

Co ſię tyczé drugiego rozwiązania, $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, takowe (iak powiedziało ſię dopiéro wyżéy) nienależy do niniéyſzego zagadniénia; ale należałoby iako téż i piérwſze do naſtępuiącego zagadniénia, które łatwo da ſię

ſię wyczytać z danego zrównania $xx - 3ax = - aa$, albo $3ax - xx = aa$, to ieſt: *Maiąc daną liniią* AN (fig. 26) *podzieloną na trzy równe części w punktach* B *i* D, *żeby na kierónku téyże linii wynaléść taki punkt* P, *iżby część* AD, *była śrzednią proporcyonalną między* AP *i* PN. Jakóż, oznaczywſzy przez a liniią AD, która ieſt trzecią częścią danéy linii AN, a zaś AP przez x, będzie $PN = 3a - x$; a z warunków zagadniénia wypada propo cya, $x : a :: a : 3a - x$, ſkąd ſkłada ſię to zrównanie, $3ax - xx = aa$, którego dwóma piérwiaſtkami, ieſt taż ſama ilość co wyżéy, to ieſt $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, i może bydź wykryślona podobnymże ſpoſobém. oprócz drugiéy wártości $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, którą żeby wykryślić, trzeba przenieść MO od M do P' ku N; a natenczas AP i AP' będą dwiéma wártościami głoſki x. fig. 26.

Dalſze przyſtóſówania Algebry w różnych materyach.

214. Bryły, które uważaliśmy w Jeometryi, nadarzaią ſię w wielu zagadniéniach, a oſobliwie w zagadniéniach Fizyczno-Matematycznych, bo z nich ſkładaią ſię wſzyſtkie inne bryły. Dobrze tedy będzie, obeznać ſię z wyrażeniami Algebraicznèmi, oznaczaiącèmi bądźto całe takowe bryły, bądźto części onychże. Oprócz iż nam to będzie rzeczą wielce użyteczną w dalſzym przeciągu tèy nauki, ten zyſk ieſzcze

ſzcze ſtąd odnieſiémy, iż zobaczymy użyteczność Algebry w uważaniu takowych brył iednych naprzeciw drugim, i w obrachówaniu innych, ktoréby miały związek z piérwſzémi.

Jeżeli oznaczymy w powſzechności, przez $r : c$, ſtóſunek promiénia do okręgu koła, [ſtóſunek wiadomy z dokładnością, do praktyki więcéy iak doſtateczną (Jeom. 146)]; natenczas, okrąg iakiegokolwiek innego koła, którego by promiéniém było a, byłby wyrażony przez $\frac{ca}{r}$, a powiérſzchnia iego przez $\frac{ca}{r} \times \frac{1}{2}a$ albo przez $\frac{ca^2}{2r}$.

A ſtąd pokazuie ſię, że powiérſzchnie kół, roſną iak kwadraty ich promiéniów; bo $\frac{c}{2r}$ będąc zawſze iednakowéy wártości, ilość $\frac{ca^2}{2r}$ nieprzyraſta tylko w proporcyi ilości a^2.

Jeżeli h, ieſt wyſokością wálka, którego promiéniem podſtawy byłoby a, to podług (Jeom 237) wyrażeniém bryłówatości iego, będzie $\frac{ca^2}{2r} \times h$; z podobnéyże przyczyny, na bryłówatość drugiego wálka, któregoby wyſokością było h', a promiéniém podſtawy a', wypadłoby $\frac{ca'^2}{2r} \times h'$; tak iż bryłówatości tych dwóch wálków byłyby między ſobą $:: \frac{ca^2}{2r} \times h : \frac{ca'^2}{2r} \times h'$, albo $:: a^2h : a'^2h'$, wyrugówawſzy ſpólnego czynnika $\frac{c}{2r}$; to ieſt, że bryłówatości wálków maią ſię między ſobą, iak mnogości, wynikaiące z rozmnożenia wyſokościów przez kwadraty promiéniów, odpowiadaiących ſwoim podſtawóm. Gdyby wyſokości były proporcyonalne promiéniom podſtaw, to natenczas byłoby $h : h' :: a : a'$, a zatém wypadłoby $h' = \frac{ha'}{a}$, i ſtóſunek $a^2h : a'^2h'$, przemiéniłby ſię na ten, $a^2h : \frac{a'^3h}{a}$, albo (wyrugówawſzy ſpólnego czynnika h, rozmnożywſzy przez a, i zniósſzy mianownika a), przemiéniłby ſię na $a^3 : a'^3$; to ieſt, że w takim razie bryłówatości miałyby ſię między ſobą, iak ſześciany promiéniów odpowiadaiących ſwoim podſtawóm.

Mówiąc w powſzechności, powiérſzchnie (iak widzieliśmy w Jeometryi), zawiſły od mnogości z dwóch wymiarów, a bryłówatości zawiſły od mnogości z trzech wymiarów; a zatém ieżeli każdy wymiar iednéy z dwóch brył, albo iednéy z dwóch powiérſzchniów, które ſtóſuią ſię między ſobą, ma ſię do każdego wymiaru drugiéy bryły albo bo drugiéy powiérſzchni w tymże ſtóſunku, to takowe dwie powiérſzchnie będą między ſobą iak kwadraty, a dwie bryły, będą między ſobą iak ſześciany dwóch wymiarów odpowiadaiących; a biorąc ieſzcze powſzechniéy, ieżeli dwie ilości iakiekolwiek iednakowiéy natury, będą wyrażone przez tyle czynników, ile ſię ſpodoba, i ieżeli każdy czynnik iednéy ilości, ma ſię do każdego czynnika drugiéy ilości w tymże ſtóſunku, to takowe dwie ilości będą między ſobą, iak odpowiadaiący czynnik w każdey ilości, podnieſiony do ſtopnia oznaczonego przez liczbę tychże czynników. *Np.* niechay iedna ilość będzie wyrażona przez $abcd$ a druga przez $a'b'c'd'$, tak że te dwie ilości maią ſię iedna do drugiéy $: :\ abcd : a'b'c'd'$; natenczas, ieżeli $a : a' : : b : b' : : c : c' : : d : d'$, to z tych proporcyów można wyciągnąć, $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$; a zatém ſtóſunek $abcd : a'b'c'd'$ odmiéni ſię na ten, $abcd : \frac{a^4bcd}{a^3}$ albo na $a : \frac{a'^4}{a^3}$, albo na $a^4 : a'^4$.

Ta prawda, ieſzcze miałaby miéyſce, chociażby takowe ilosci niebyły iednoſtaiwne, *np.* gdyby iedna była wyrażona przez $ab + cd$, a druga przez $a'b' + c'd'$; ieżeli wymiary piérwſzéy ilości, ſą proporcyonalne wymiaróm drugiéy, to takowe ilości mieć ſię będą iedna do drugiéy $: :\ a^2 : a'^2$. Jakóż, ponieważ rozumié ſię, że $a : a' : : b : b' : : c : c' : : d : d'$, więc będzie $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$; a zatém ſtóſunek $ab + cd : a'b' + c'd'$, przemiéni ſię na ten, $ab + cd : \frac{a'^2b}{a} + \frac{a'^2cd}{a^2}$. albo $ab + cd : \frac{aa'^2b}{a^2} + \frac{a'^2cd}{a^2}$ albo $ab + cd : \frac{a'^2(ab + cd)}{a^2}$, albo $a^2(ab + cd) : a'^2(ab + cd)$, albo naoſtatek $a^2 : a'^2$.

Ta oſtatnia uwaga, okazuie w ſpoſób powſzechny, że powiérſzchnie figur podobnych ſobie, maią ſię między ſobą, iak kwadraty dwóch wymiarów odpowiadaiących którychkolwiek, bryłowatości zaś brył ſą między ſobą, iak ſześciany. Albowiém, niech będą iakie chcą te figury, albo te bryły, piérwſze zawſze można uważać, iakoby złożone z tróykątów ſobie podobnych, którychby wyſokości i podſtawy w obu figurach były iedne drugim proporcyocyonalne; drugie zaś znowu, to ieſt bryły, można uważać, iakoby złożone z piramid ſobie podobnych, maiących ſwoie trzy wymiary proporcyonalne iedne drugim.

A ſtąd pokazuie ſię, iak łatwo ieſt przyſtóſować ilości iedne do drugich, maiąc ie wyrażone Algebraicznie; czyto te ilości będą iednakowego gatunku, czy też różnego, iakoto maiąc ſtożek i kulę, wielościan i wałek, byleby iednakże były iednakowéy natury, to ieſt albo obie bryły, albo obie powiérſzchnie, albo t. d.

Np. gdyby trzeba było uczynić porównanie ſtóſunku bryłówatościów z ſtóſunkiém powiérſzchniów; oznaczywſzy bryłówatości dwóch ciał ſobie podobnych przez V i u, powiérſzchnie ich przez S i s a linie w nich odpowiadaiące przez L i l; będzie $V:u::L^3:l^3$, albo $\sqrt[3]{V}:\sqrt[3]{u}::L:l$. Podobnież będzie, $S:s::L^2:l^2$ albo $\sqrt{S}:\sqrt{s}::L:l$; więc $\sqrt[3]{V}:\sqrt[3]{u}::\sqrt{S}:\sqrt{s}$, albo $V:u::\sqrt{S^3}:\sqrt{s^3}$, albo $\sqrt[3]{V^2}:\sqrt[3]{u^2}::S:s$; ſkąd daie ſię widziéć, że powiérſzchnie rosną w mniéyſzym ſtóſunku, aniżeli bryłówatości.

215. Nauczyło ſię w Jeometryi (I. 243), iak ſobie trzeba poſtąpić, żeby miéć bryłówatość piramidy uciętéy, albo ſtożka uciętego. Jeżeli tedy oznaczymy przez h wyſokość całéy piramidy, a przez h' wyſokość pi-

ramidy odciętéy; przez s powiérſzchnią dólnéy podſtawy, a przez s' powierſzchnią górnéy podſtawy, miéć będziém podług (Jeom. 202), $s:s'::h^2:h'^2$; a zatém będzie $h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$, albo $h' = h\sqrt{(\frac{s'}{s})}$; ieżeli zaś oznaczymy przez k wyſokość ſamego piénka, miéć będziém $k = h - h'$, a zatém będzie $k = h - h\sqrt{(\frac{s'}{s})}$, albo $k = \frac{h\sqrt{s} - h\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$; ſkąd wyciąga ſię $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s}-\sqrt{s'}}$. Ze zaś bryłówatość całéy piramidy, ieſt wyrażona przez $s \times \frac{h}{3}$, a bryłówatość piramidy odciętéy przez $s' \times \frac{h'}{3}$, albo (położywſzy zamiaſt h' wártość iego dopiéro wynalezioną), $s' \times \frac{h}{3}\sqrt{\frac{s'}{s}}$; więc na bryłówatość ſtożka uciętego, wypadnie $\frac{hs}{3} - \frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}}$, albo $\frac{h}{3}.(s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$, albo naoſtatek, $\frac{h}{3}.\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$; położywſzy znowu zamiaſt h wártość iego wynalezioną, miéć będziém $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s}-\sqrt{s'}} \times \frac{(s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$, co wychodzi na $\frac{k}{3}(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}-\sqrt{s'}})$, albo rozdzieliwſzy przez $\sqrt{s}-\sqrt{s'}$, na $\frac{k}{3} \times (s + \sqrt{ss'} + s')$; wártość, z któréy pokazuie ſię, że każda piramida albo ſtożek ucięty, ſkłada ſię z trzech piramid téyże wyſokości, z którychby piérwſza miała za podſtawę, podſtawę s dólną piénka,

dru-

druga, podſtawę iego górną s', a trzecia, podſtawę śrzednią proporcyonalną $\sqrt{ss'}$, między podſtawą górną s' i między dólną s. Albowiém, żeby miéć bryłówatość tych trzech piramid, maiących ſpólną wyſokość, doſyć ieſt dodać razém trzy podſtawy, iakoto $s + \sqrt{ss'} + s'$, a ſummę rozmnożyć przez trzecią część wyſokości ſpólnéy, to ieſt przez $\frac{k}{3}$, a z tègo działania, wypadnie taż ſama ilość co wyżéy.

Na tym fundamencie, można wnieść ſobie formułę doſyć proſtą, ſłużącą do wyrachówania bryłówatości ſtożka uciętego, wydrążonego wałkowo i równolegle oſi. Jakoż, ieżeli oznaczymy przez m promień wałka wydrążonego, przez e mnieyſzą, a przez E więkſzą grubość; ponieważ powiérſzchnia koła, podług (Jeom. 157), równa ſię kwadratowi promiénia, rozmnożonemu przez ſtóſunek półokręgu do promiénia, więc na wyrażenie trzech powiérſzchniów o które rzecz idzie, wypadną te trzy ilości, $\frac{c}{2r} \times (m + e)^2$, $\frac{c}{2r} \times (m + E)^2$, i $\frac{c}{2r} \times (m + e)\ (m + E)$; a zatém ſummę tych trzech powiérſzchniów, rozmnożywſzy przez trzecią część wyſokości h, a od mnogości odiąwſzy bryłówatość wydrążonego wałka, to ieſt $\frac{c}{2r} \times m^2h$, albo $\frac{c}{6r} \times 3m^2h$, wypadnie na bryłówatość ſzukaną, $\frac{ch}{6r} \times [(3E + 3e) \times m + E^2 + Ee + e^2]$, albo $\frac{ch}{2r} \times [(E + e)\ (3m + E) + e^2]$.

Ta

Ta formuła, może ſłużyć do wynaleźiénia wagi armatnéy, któréyby wymiary były wiadome; bo armata, iak wiémy, ſkłada ſię z trzech ſtożków uciętych, wydrążonych wałkowo, z których pierwſzy daie denną, drugi czopową, a trzeci wylotową ſztukę; do tych przydaćby trzeba, wałek ſkładaiący ſamo dno armaty. Co ſię tyczé czopów, uſzu, i wſzelkich ozdób, takowe rozſądnie oſzacować można na pamięć. Zobacz Tom I. Jeom. kart. 311 Zagadn: VIII.

216. Jeżeli a oznacza promiéń kuli, to $\frac{ca^2}{2r}$ będzie powiérſzchnią iéy koła naywiękſzego; $\frac{4ca^2}{2r}$ albo $\frac{2ca^2}{r}$ będzie powiérſzchnią ſaméy kuli; a zatém $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3}a$, albo $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ będzie bryłówatością onéyże (Jeom. 223. 244).

Jeżeli oznaczymy przez x, wyſokość ucinka kołowego iakiegokolwiek, to (iak widziéliſmy w rozwiązaniu oſtatniego zagadniénia) (213), na wyrażenie bryłówatości wycinka, miéć będziém $\frac{caax}{3r}$, a zaś na bryłówatość ſtożka, z którego ſkłada ſię poméniony wycinek, będzie $\frac{c}{2r} \times (2ax - xx) \times \frac{a-x}{3r}$; więc ucinka ku-

 lowe-

lowego będzie to wyrażenie, $\frac{caax}{3r} - \frac{c}{2r}.(2ax-xx).\frac{a-x}{3} = \frac{c}{3r}\left[aax - \frac{(2ax-xx)}{2} \times (a-x)\right] = \ldots$

$$\frac{c}{3r}.\frac{2aax - 2aax + axx + 2axx - x^3}{2} = \frac{c}{3r}.\frac{3axx - x^3}{2} = \frac{c}{6r}.(3ax^2 - x^3).$$

Maiąc ráz wyrażenia Algebraiczne iakich ilościów, łatwo będzie można rozwiązać różne zagadnienia zadane względém tychże ilościów.

Np. *gdyby potrzeba było znaléśdź, iaka powinnaby bydź wyſokość ſtożka, któryby równał ſię w bryłówatości kuli zadanéy, a za promień ſwoiéy podſtawy miał promień kuli.* Oznaczywſzy przez h takową wyſokość, a przez a promień podſtawy, mieć będziém $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3}$ na bryłówatość tego ſtożka; a ponieważ ma bydź równy **kuli**, maiącéy za promień także a, więc będzie $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$; ſkąd wyciąga ſię $h = 4a$, wyrugówawſzy z każdéy części zrównania, ſpólnego czynnika $\frac{c}{2r}.\frac{a^2}{3}$.

Ta wártość głoſki h pokazuie nam, że wyſokość ſtożka, powinna bydź dwa razy tak wielka iak ieſt śrzednica kuli: i tak też ieſt w ſaméy rzeczy; bo ponieważ kula ieſt $\frac{2}{3}$

z wałka opiſanego. (Jeom. [illegible]) [illegible] bydź dwa razy tak wielka, [illegible] podſtawy i téyże wyſokości co wałek [illegible] muſi bydź równa ſtożkowi téyże [illegible] ale wyſokości dwa razy tak [illegible] śrzednica kuli.

217. Na drugi przykład [illegible] bie ieſzcze to zagadnienie: *Maiąc [illegible] acméy miarki prochu, niechay [illegible] znaléśdź wymiary miarki wałkowéy, w któréyby mieściła ſię zadana waga prochu; [illegible] ſunek także wyſokości do śrzednicy téy miarki rozumie ſię bydź zadany.*

Niechay będzie $m : n$ ſtóſunek wyſokości do śrzednicy, a x niechay będzie wyſokością; natenczas $\frac{nx}{m}$ będzie śrzednicą, a $\frac{c}{8r} \times \frac{n^2x^3}{m^2}$ bryłówatością. Daymy że przez p ieſt oznaczona waga ilości prochu. mieſzczącéy ſię w takim wałku, którego wyſokość równałaby ſię śrzednicy podſtawy, i któregoby zatém bryłówatość wyrażona była przez $\frac{c}{8r} \times a^3$; oznaczywſzy przez P wagę ilości prochu, maiącéy mieścić ſię w miarce ſzukanéy, mieć będziém tę proporcyą, $\frac{c}{8r}a^3 : \frac{c}{8r} \times \frac{n^2x^3}{m^2} :: p : P$; ſkąd wyciąga ſię $x = a.\sqrt[3]{\left(\frac{m^2P}{n^2p}\right)}$.

Wałek maiący 12 *cal.* Franc. wyſokości. i 12 *cal.* w śrzednicy, mieści w ſobie (z małém uchybieniém) 51 *ſtów* Paryſkich prochu; a zatém chcąc wynaléśdź miarkę wałkową, w któréyby mieściło ſię $4\frac{1}{2}$ *ſta* prochu, i którėyby śrzednica była na $\frac{3}{4}$ wyſokości, trzebaby zrobić $a = 12$, $p = 51$, $P = 4,5$; $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$; po czém pokazałoby ſię bydź $x = 6,47$ *cal.*

O Liniiach krzywych w powſzechności; a w ſzczególności o Przecięciach Stożkowych.

218. Spomiędzy linii krzywych które uważać ſię zwykły w Jeometryi, iedne ſą takie, że w nich każdy punkt może bydź wynaleziony na fundamencie iednéyże zaſady, to ieſt przez rachunki i działania podobne iedne drugim; inne zaś ſą takie, że w nich każdy punkt wynayduie ſię na inſzym fundamencie, to ieſt, przez odmiénne rachunki i działania; atoli ta ſama odmiénność podléga pewnemu prawu.

Co ſię zaś tyczé linii nakryślonych, iak ſię nadarzą, iakie *np.* kryśli piſzący na papiérze, takowe niémogą należyć do Jeometryi ściśle wziętéy. Atoli ſpoſoby które podaią ſię w téyże Jeometryi, mogą ſłużyć, przy pomocy pewnych i niezawodnych prawideł, do wykryślenia różnych zawodów, zdaiących ſię niepodlégać żadnym prawóm. Takowa ſztuka, łączenia między ſobą, ilościów, których prawdziwa natura byłaby albo niewiadoma, albo zbyt poſkładana, ieſt iedno z przyſtóſowań Jeometryi i Algebry, nienayposlédniéy użyteczne.

Ze-

Zeby tedy można było wykryślić ſobie liniie krzywe, którémi zabawia ſię Jeometrya, trzeba miéć znaiome prawa, różnego położenia punktów, ſkładaiących obwód takowych linii. Te zaś prawa mogą bydź zadane rozmaicie, to ieſt, albo wſkazuiąc ſpoſób, przez który takowe liniie, mogą bydź opiſane ruchém iednoſtaynym i iednokſztáłtnym; takie ieſt koło, które kryśli ſię obwodząc w okrąg na płaſzczyznie, liniią w około punktu zadanego. Albo téż wymiéniaiąc iakową właſność, ſtatecznie należącą do każdego z punktów téy linii krzywéy. Naoſtatek, to prawo może ieſzcze bydź żadane w zrównaniu, a nawet można zawſze rozumiéć, że ieſt tak zadane; ponieważ dwa piérwſze ſpoſoby, o których namiéniło ſię, ſłużą także do wynaleziénia zrównania wyrażaiącego takowe prawo. I w takito oſobliwie ſpoſób uważać tu będziémy liniie krzywe, iako nayproſtſzy a oráz nayzgodniéyſzy do poznania ich właſnościów, ſzczególnościów, i użycia. Zobazmy tedy, iakim obyczaiém zrównanie, może wy-

wyrazić naturę linii krzywéy, a ponieważ ieſzcze dotąd nieznamy innéy oprócz okręgu koła, przeto poczniymy od niego.

fig. 27. 219. Daymy więc że AMB (fig. 27)), ieſt liniia krzywa, w któréy nieznalibyśmy innéy własności nad tę, że proſtopadła PM, ſpuſzczona z któregokolwiek punktu M tèy linii krzywèy, na liniią AB, ieſt śrzednią proporcyonalną między dwiéma częściami AP i PB. Zobaczmy iakim ſpoſobém Algebra, może nas doprowadzić do wynalezienia każdego punktu tèy linii, i różnych własnościów onéy.

Jeżeli ſobie oznaczę przez a liniią AB, część iéy AP pzrez x, a proſtopadłą PM przez y; to natenczas PB będzie wyrażone przez $a-x$; a ponieważ rozumié ſię PM bydź śrzednią proporcyonalną, między AP i PB, więc będzie, $x:y::y:a-x$, a zatém $yy=ax-xx$.

Teráz zmyślmy ſobie liniią AB podzieloną na pewną liczbę równych części *np.* na 10, i że z każdego punktu tych przedziałów, ſą poprowadzone proſtópadłe pm, pm, pm, i.t.d.; ia-

iawna ieſt, że ieżeli w zrównaniu dopiéro wynalezioném, weźmiémy koléyno x, iakoby równe każdéy linii Ap, Ap, i.t.d. y będzie wyrażać każdą liniią odpowiadaiącą pm, pm, i.t.d.; bo zrównanie $yy=ax-xx$, daie znać, że y ieſt zawſze śrzednią proporcyonalną, między x i między $a-x$, niechayby x wyrażało liniią iaka ſię ſpodoba; i ta ieſt własność, którą przypiſuiémy każdéy proſtopadléy pm. Więc naznaczywſzy koléyno głoſce x różne wártości, i wyráchowawſzy odpowiadaiące wártości głoſki y, można będzie wynaléśdź wſzyſtkie punkta téy linii krzywéy ieden po drugim: zobaczmy to w przykładzie.

Podług wyżéy założonego przypuſzczenia, że liniia a ieſt podzielona na 10 cz. mieć będziém $a=10$, a zatém naſze zrównanie przemiéni ſię, na $yy=10x-xx$. Jeżeli tedy zrobimy koléyno $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$, $x=6$, $x=7$, $x=8$. $x=9$, $x=10$; znaydziemy na y te odpowiadaiace wártości $y=\sqrt{9}$; $y=\sqrt{16}$; $y=\sqrt{21}$; $y=\sqrt{24}$; $y=\sqrt{25}$; $y=\sqrt{24}$; $y=\sqrt{21}$; $y=\sqrt{16}$; $y=\sqrt{9}$; $y=\sqrt{0}$; albo $y=3$; $y=4$; $y=4{,}5$; $y=4{,}9$; $y=5$; $y=4{,}9$; $y=4{,}5$; $y=4$; $y=3$; $y=0$. A tak ieżeli takowe wártości głoſki y, powznaczamy koléyno na proſtopadłych, odpowiadaiacych wártościóm 1, 2, 3, i.t.d. głoſki x,

x, punkta m, m. i. t. d. powytykane tym ſpoſobém, wſzyſtkie należyć będą do takiéy linii, którаby miała tę właſność, że w niéy każda proſtopadła pm, byłaby śrzednią proporcyonalną, między dwiéma częściami Ap i pB linii proſtéy AB; zobaczymy zaráz wyżéy, że takowa liniia krzywa nieinſza ieſt tylko okrąg koła.

Widzieliśmy indziéy, że każdy piérwiaſtek parzyſty ma dwie wártości, iednę twiérdzącą, drugą przéczącą. A zatém oprócz wyżéy wymiénionych wártościów głoſki y, ieſzcze miéć będziémy te naſtępujące, $y=-3$; $y=-4$; $y=-4{,}5$; $y=-4{,}9$; $y=-5$; $y=-4{,}9$; $y=-4{,}5$; $y=-4$; $y=-3$; $y=-0$.

Zeby miéć punkta linii krzywéy odpowiadaiące tym drugim wártościóm głoſki y, trzeba podług tego, co iuż kilkokrotnie powtórzyło ſię względém ilościów przéczących, przedłużyć proſtopadłe pm, pm, i.t.d. i powytykać na przeciwną ſtronę, to ieſt, od p do m' ilości pm' pm', i.t.d. równe ſwoim odpowiadaiącym ilościóm pm, każda każdéy.

Gdyby kto chciał miéć większą liczbę punktów wznaczonych linii krzywéy, nietrzebaby więcéy, tylko liniią AB zmyślić ſobie na większą liczbę części podzieloną np. na 100; to ieſt, zrobić $a=100$; albo zoſtawiwſzy ilości a tęż ſamę wártość co wyżéy, to ieſt 10, ilości x naznaczyć wártości pośrzednie, między głównémi; tym ſpoſobém będzie także można wyrachówać wártości po-

pośrzednie odpowiadaiące głoce y, któreby wſkazały nowe punkta linii krzywéy.

Wártość $y=0$, wyżéy wynaleziona, daie znać że liniia krzywa ſchodzi ſię z liniią AB w punkcie B, gdzie ieſt $x=a=10$; bo ponieważ w takim razie, wártością linii pm ieſt zero, więc odległość od punktu m do linii proſtéy AB, muſi bydź także zerém, to ieſt muſi niebydź żadnéy. Niemniéy łatwo widzieć ſię także daie, że taż liniia krzywa, ſchodzi ſię ieſzcze i w punkcie A z liniią AB: bo ponieważ w takowych zéyściach ſię pomiénionych dwóch linii, wártością głoſki y muſi bydź 0, więc żeby znaléśdź w których miéyſcach przypadaią takowe zéyścia, nietrzeba więcéy tylko zrobić y równe zerowi, w zrównaniu $yy=ax-xx$; co go przemiéni na $0=ax-xx$; lecz że $ax-xx=x(a-x)$, takowa zaś mnogość ſtaie ſię zerém w dwóch przypadkach, to ieſt kiedy $x=0$, i kiedy $x=a$; więc także i y w tych obu przypadkach muſi bydź zerém; lecz x, oczywiście ieſt $=0$ w punkcie A, a zaś $=a$ w punkcie B; więc liniia krzywa w rzeczy ſaméy ſchodzi ſię z liniią AB, w punktach A i B. Z

Z tego przykładu iuż można poymówać, w iaki ſpoſób zrównanie, ſłuży do wynaleziénia różnych punktów linii krzywéy. Zobaczymy to ieſzcze lepiéy w dalſzych przykładach; ale wprzód wytłómaczyć nam trzeba pewne ſłowa, których niżéy używać mamy.

220. Kiedy natura albo własności linii krzywéy maią bydź wyrażone w zrównaniu, to natenczas każdy punkt *m*, *m*, i. t. d. ſtóſuie ſię, albo przynaymniéy rozumié ſię bydź przyſtóſowany do dwoch linii ſtałych *AB*, i *OAO*, (fig. 27.) czyniących między ſobą kat wiadomy, bądźto oſtry, proſty albo rozwárty; zmyśliwſzy ſobie tedy, z każdego punktu *m* poprowadzone liniie *mp*, *mp'* równoległe liniiom *OAO*, i *AB*, iawna ieſt, że można dóyśdź położenia takowego punktu, maiąc wártości linii *p'm*, albo *Ap* i *pm*, albo (co na iedno wychodzi), maiąc wártość iednéy z wymiénionych linii, i ſtóſunek iéy z drugą. A zatém kiedy mówi ſię, że zrównanie wyraża naturę linii krzywéy, przez to nierozumié ſię co innego, tylko że

fig. 27.

to

to zrównanie daie ſtóſunek zachodzący między każdym punktém *m* i między liniią *Ap*, albo liniią *pm*, tak że maiąc wiadomą iednę, zrównanie pokaże mi drugą; a podług tego, iak takowy ſtóſunek będzie więcéy lub mniéy poſkładany, liniia krzywa będzie także porządku czyli ſtopnia więcéy lub mniéy wynieſionego.

Liniie *Ap* albo *p'm*, wymiérzaiące odległość każdego punktu *m* od iednéy *OAO* z dwóch linii ſtóſunkowych, nazywaią ſię *odcinkami* (abſciſſæ); liniie zaś *mp* albo *p'A* wymiérzaiące odległość tegóż punktu *m* od drugiéy linii ſtóſunkowéy *AB*, nazywaią ſię *rzędnémi* (ordinatæ); liniia *AB* nazywa ſię *oſią odcinków* (axis abſciſſarum), a liniia *OAO* ieſt *oſią rzędnych*. Punkt *A* od którego poczynaią ſię rachówać odcinki, nazywa ſię *początkiém odcinków* (origo abſciſſarum), tak, iako nazywa ſię *początkiém rzędnych* punkt od którego poczynaią ſię rachówać rzędne *Ap'* albo *pm*: takowe dwa punkta ſą w tymże ſamym i iednymże punkcie *A*; niéma wprawdzie do tego żadnego oſobliwego powodu, żeby

by

by odcinki rachówać od tegóż ſamego punktu od którego rachują ſię rzędne; ale téż kiedy żadna ſzczególna okoliczność inaczéy czynić niekaże, to zawſze nayprościéy i nayzręczniéy będzie, rachować ie od tegoż ſamego punktu.

Liniie Ap, pm, nazywaią ſię imiéniém wzaiemném *ſpółrzędnémi linii krzywéy*, a uważaiąc ie iako należące oboiętnie do któregokolwiek punktu linii krzywèy, nażywaią ſię *nieokreślone* (indeterminatæ); toż nazwiſko daie ſię także i głoſkóm albo znakóm Algebraicznym x i y, oznaczaiącym takowe iinije Ap i pm.

221. Powróćmy teráz do naſzego zrównania, i zobaczmy iakim ſpoſobém możémy z niego wyciągnąć własności linii krzywéy.

1ód Ze śrzodka C linii AB, poprowadźmy do któregokolwiek punktu M linii krzywéy, linniią CM; to w którémkolwiék bądź miéyſcu będzie wykonano, tróykąt MPC zawſze będzie proſtokątny, a zatém da $(MP)^2 + (PC)^2 = (MC)^2$, to ieſt, (ponieważ $PC = AC - AP = (\frac{1}{2}a - x)$, da $yy + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; a że liniia PM albo y, ieſt wſzędzie śrzednią proporcyonalną między AP i PB, więc wſzędzie będzie $yy = ax - xx$, a przeto téż wſzędzie będzie $ax - xx + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$, to ieſt, $\frac{1}{4}aa = (MC)^2$; ſkąd wyciąga ſię $MC = \frac{1}{2}a$, więc każdy punkt M albo m, ieſt równo oddalony od punktu C; więc ta liniia krzywa, ieſt okręgiém kołowym.

2re Z któregokolwiek punktu M albo m linii krzywéy, poprowadźmy do dwóch końców A i B, liniie MA i MB; tróykąty proſtokątne MPA, MPB dadzą nam $(AP)^2 + (PM)^2 = (AM)^2$, i $(PM)^2 + (PB)^2 = (MB)^2$, albo położywſzy zamiaſt linii ich wártości Algebraiczne, $xx + yy = (AM)^2$, i $aa - 2ax + xx + yy, = (MB)^2$; więc dodawſzy te dwa zrównania iedno z drugiém, i położywſzy zamiaſt yy, wártość onego $ax - xx$, będzie $aa - 2ax + 2xx + 2ax - 2xx = (AM)^2 + (MB)^2$; to ieſt, $(AM)^2 + (MB)^2 = aa = (AB)^2$; co nam wyraża własność tróykąta proſtokątnego; i daie znáć, że kąt AMB przytykaiący do któregókolwiek punktu M linii krzywéy, ieſt zawſze proſty, (*Zob.* Jeom l. 65).

3cie Jeżeli w zrównaniu $xx + yy = (AM)^2$, położymy zamiaſt yy onego wártość $ax - xx$, mieć będziém $(AM)^2 = ax$, ſkąd wynika naſtępuiąca proporcya, $a : AM :: AM : x$, albo $AB : AM :: AM : AP$, to ieſt, że cięciwa AM ieſt śrzednią proporcyonalną między śrzednicą AB, i odcinkiém AP. (*Zob.* Jeom. 112) Tymże ſpoſobém możnaby wynaléśdź wſzyſtkie inne własności koła, które okazaliśmy w Jeometryi, a to zawſze na fundamencie tego przypuſzczenia, iż rzędna PM albo pm, ieſt śrzednią proporcyonalną między AP i PB, albo między Ap i pB.

Rachuiąc odcinki od punktu A w którym poczyna ſię śrzednica, mieliśmy zrównanie $yy = ax - xx$. Gdybyśmy ie zaś chcieli byli rachówać od śrzodka, to ieſt wziąść

wziąść za odcinki liniie CP, Cp, i. t. d. natenczas każdą z takowych linii oznaczywſzy przez z, mielibyśmy $CP = AC - AP$, to ieſt $z = \frac{1}{2}a - x$, a zatém $x = \frac{1}{2}a - z$. Położywſzy tedy zamiaſt x takową wártość w zrównaniu $y = ax - xx$, miéć będziém. $yy = a(\frac{1}{2}a - z) - (\frac{1}{2}a - z)^2$; co wychodzi na $yy = \frac{1}{4}aa - zz$; i takieto byłoby zrównanie należące do koła, rozumieiąc ſpółrzędne wzaiemnie ſobie proſtopadłe, a początek ich w śrzodku.

Wreſzcie, każda właſność iſtotnie należąca do każdego punktu linii krzywéy, wyraziwſzyſzy ią Algebraicznie, dałaby zawſze toż ſamo zrównanie; zwłaſzcza wziąwſzy też ſame liniie za odcinki i rzędne; ale odmiéniwſzy początek albo kiéronek ſpółrzędnych, albo téż oboié, można będzie wpaśdź na zrównanie odmiénne, ale zawſze tegóż ſamego ſtopnia. Sprawdzenie drugiéy części tego podania, iuż widzieliśwy odmiéniwſzy położenie początku odcinków, gdzie zamiaſt zrównania $yy = ax - xx$, mieliśmy $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, które iako wynikaiące z piérwſzego, ma za fundament tęż ſamę właſność; lecz gdybyśmy chcieli zaſadzić ſię, na téy drugiéy właſności, że każda odległość MC ieſt wſzędzie taż ſama i $= \frac{1}{2}a$; natenczas oznaczywſzy CP przez z, a PM przez y; mielibyśmy z przyczyny trókąta proſtokątnego MPC, $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, ſkąd wynika $yy = \frac{1}{4}aa - zz$; zrównanie toż ſamo co poprzédzaiące, lubo wynikaiące z inſzéy właſności.

O Ellipsie.

222. Zaſtanówmy ſię teráz nad tém, iakaby téżto była taka liniia krzywa, któraby miała tę właſność, ażeby ſumma dwóch odległościów $MF + Mf$ (fig. 28) od któregokolwiek punktu M linii krzywéy do dwóch punktów ſtałych F i f, zawſze była iednakowa i równała ſię linii daney a. *fig. 28.*

Żeby wynaléśdź właſności téy linii krzywéy, która nazywa ſię *Ellipſą*, trzeba ſzukać takiego zrównania, któreby wyrażało ſtóſunek, iaki zachodzi mocą téy właſności znaioméy, między proſtopadłémi PM ſpuſzczonémi z każdego punktu M, na iaką wiadomą liniią *np.* na Ff, i między odległościami ich FP albo AP od któregokolwiek punktu F albo A obranego podług upodobania.

Tym umyſłém, obiéram ſobie na początek odcinków punkt A, taki, ażeby biorąc od śrzodka C linii Ff, liniia CA była $= \frac{1}{2}a$; a zrobiwſzy $CB = CA$, oznaczam ſobie AP przez x; PM przez y; liniią zaś AF, która rozumié ſię bydź wiadoma, przez c; a liniią FM przez z; natenczas będzie $FP = AP - AF = {}^{*} x - c$; $Mf = FMf - MF = a - z$; a $fP = PB - Bf = AB - AP - Bf = a - x - c$.

* *Gdyby punkt* M *był obrany taki, iżby proſtopadła* MP *przypadała między* A *i* F, *natenczas* FP *byłoby wyrażone przez* c — x; *ale to w głownénı zrównaniu nieuczyniłoby żadnéy odmiany; bo w układaniu tego zrównania*

To założywſzy na przód, tróykąty proſtokątne FPM, fPM, daią $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$, tudzież $(Mf)^2 = (PM)^2 + (fP)^2$; to ieſt, $zz = yy + xx - 2cx + cc$, i $aa - 2az + zz = yy + aa - 2ax + xx - 2ac + 2cx + cc$. Z tych dwóch zrownań odiąwſzy drugie od pierwſzego, i wyrugówawſzy aa znayduiące ſię w obu częściach, będzie $2az = 2ax + 2ac - 4cx$, a zatém $z = \dfrac{ax + ac - 2cx}{a}$; tę wártość głoſki z dopiéro wynalezioną, położywſzy w zrównaniu $zz = yy + xx - 2cx + cc$, będzie $\dfrac{aaxx + 2aacx + aacc - 4acx^2 - 4a^2cx + 4ccxx}{aa} = yy + xx - 2cx + cc$, a po wyrugówaniu mianownika, po przeſtawiéniu, i po zebraniu, będzie $aayy = 4aacx - 4accx - 4acx^2 + 4ccx^2$, albo $aayy = (4ac - 4cc)\,ax + (4cc - 4ac)x^2$, albo ponieważ $4cc - 4ac$, ieſt iedno co $-(4ac - 4cc)$, ieſzcze będzie $aayy = (4ac - 4cc)ax - (4ac - 4cc)x^2$, albo naoſtatek $aayy = (4ac - 4cc).(ax - xx)$; ſkąd wyciąga ſię $yy = \dfrac{4ac - 4cc}{aa}.(ax - xx)$.

Takie tedy ieſt zrównanie, należące do linii krzywéy, któréyby każdy punkt miał własność wyżéy wymiénioną.

223. To zrównanie może ſłużyć do opiſania linii krzywéy przez punkta, naznaczywſzy koléyno głoſce x różne wymiary, i wyrachówawſzy odpowiadaiące im wár-

nia nieużywa ſię tylko kwadratu linii FP, *na który w oboim razie zarówno wypada*, $xx - 2cx + cc$, *czyto powſtawać będzie z ilości* $x - c$, *albo téż z ilości* $c - x$.

wártości głoſki y, jak uczyniliśmy wyżéy względém okręgu koła. Ponieważ ſpoſób obéyścia ſię w téy miérze, ieſt iednakowy z tamtym, dla tego tu go pomiiamy.

224. Można także ieſzcze opiſać *Ellipſę* przez punkta, w naſtępuiący obyczay; zrobiwſzy $CB = CA = \frac{1}{2}a$, bierze ſię iakakolwiek upodobanana odległość Br, i kryſli ſię powyżéy i poniżéy linii AB, z punktu f iako ze śrzodka, promiéniém Br, łuk, który w punktach M i M' przecina ſię innym łukiém, nakryślonym z punktu F iako ze śrzodka, promiéniém Ar. Tym ſpoſobém wynalezione wſzyſtkie punkta M, M', należyć będą do *Ellipſy*,

225. Własność fundamentalna z któréy wyniknęło zrównanie, podaie także ſpoſób bardzo proſty, opiſania *Ellipſy* iednym ciągiém. Jakoż, obrawſzy ſobie dwa punkta F, f, podług upodobania, i utwiérdziwſzy w nich dwa kołeczki, dwa gwoździe, albo dwie ſzpilki, nietrzeba tylko przywiązać do nich dwa kónce nitki, któraby była dłużſza od linii Ff; natenczas przy pomocy ołówka M wyciągnąwſzy nić, i trzymaiąc ią tak zawſze wyciągniętą, ołówek M proſtopadle poſtawiony wkoło oprowadziwſzy, takowy w ruchu ſwoim nakryśli żądaną liniią krzywą; bo ſumma dwóch odległościów ołówka od dwóch punktów F i f, w tém nakryśleniu, zawſze wypadać będzie równa długości całéy nici.

226. Stąd iawnie pokazuie ſię, iako liniia krzywa muſi przechodzić przez dwa punkta A i B; z przyczyny że FMf zrobiło ſię ró-

wne

wne linii AB. Bo ponieważ $Cf = CF$, więc będzie $AF = Bf$, a zatèm $AF + Af = Af + Bf = a$, iako téż $BF + Bf = BF + AF = a$. Co téż i ſamo zrównanie wſkazuie; albowiém, chcąc dóyiśdź w którém miéyſcu liniia krzywa ſchodzi ſię z liniią proſtą Ff przedłużoną, trzeba zrobić $y = 0$; z tego zaś przypuſzczenia wynika, $\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx) = 0$, a ponieważ $\frac{4ac - 4cc}{aa}$ niémoże bydź zerém, więc żeby to zrównanie miało miéyſce, muſi bydź $ax - xx$, albo $x \times (a - x) = 0$; co w dwóch przypadkach trafić ſię może: iakoto kiedy będzie $x = 0$, to ieſt w punkcie A, albo téż kiedy będzie $x = a$, to ieſt w punkcie B.

227. Z tegóż zrównania także pokazuie ſię, że liniia krzywa roſciąga ſię zarówno i powyżéy i poniżéy linii AB, i że z obu ſtron oſi AB ieſt wcale iednakowa. Albowiém, wzmiankowane zrównanie daie $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)\right]}$, ſkąd daie ſię widziéć, że każdéy wártości głoſki x albo każdéy linii AP, odpowia-

wiadaią dwie wártości głoſki y albo linii PM, doſkonale ſobie równe, ale które będąc poprzédzone znakami przeciwnémi, powinny bydź z przeciwnych ſtrón położone.

I to ieſzcze iawna ieſt, że poprowadziwſzy proſtopadłą DD' przez ſrzodek C linii AB, liniia krzywa przez nię podzielona na zoſtanie dwie części doſkonale równe i ſobie podobne; ieſtto wnioſek wynikaiący tak z wykryślenia Ellipſy, iako téż z należącego do niéy zrównania; ale takowy lepiéy ieſzcze potém pokaże ſię, gdy uczynimy nad tém zrównaniém dalſze uwagi które naſtąpić maią.

228. Liniia AB, nazywa ſię *wielką oſią* (axis major) a liniia DD' ieſt *małą oſią* (axis minor); dwa punkta F i f nazywaią ſię śrzódpałami (focus). Punkta A, B, D, D', ſą wiérſzchołkami oſiów, punkt C ieſt śrzodkiém.

229. Zeby miéć wártość rzędnéy Fm, przechodzącéy przez śrzódpáł, trzeba rozumiéć AP albo $x = AF = c$; natenczas będzié $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \times (ac - cc) = \frac{4 \cdot (ac - cc)^2}{aa}$;

ſkąd po wyciągniéniu piérwiaſtka kwadratowego, wypada $y = \pm \frac{2.(ac-cc)}{a}$, więc $mm' = \frac{4.(ac-cc)}{a}$; takowa liniia mm', dla tego że przechodzi przez śrzódpáł nazywa ſię *palirzędną* Ellipſy (parameter). *Palirzędna tedy, ieſt mniéyſza aniżeli odległość od wiérſzchołka do śrzódpału cztéry razy powtòrzona*; bo iéy wártość $\frac{4.(ac-cc)}{a}$, która na iedno wychodzi co $4c - \frac{4cc}{a}$, ieſt oczywiście mniéyſza aniżeli $4c$. Takową wártość palirzędnéy, oznaczywſzy przez p, miéć będziém $p = \frac{4ac-4cc}{a}$, a zatèm będzie $\frac{p}{a} = \frac{4ac-4cc}{aa}$; można więc poprzédzaiące zrównanie należące do Ellipſy, przemiénić na to prościéyſze, $yy = \frac{p}{a}.(aa-xx)$.

230. Zeby dóyśdź wártości linii CD, nietrzeba więcéy tylko w zrównaniu $yy = \frac{4ac-4cc}{aa}.(ax-xx)$ rozumiéć, że AP albo $x = AC = \frac{1}{2}a$; natenczas będzie $yy = \frac{4ac-4cc}{aa}.$

($\frac{1}{2}aa$

$(\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa)$, co wychodzi na $yy = ac - cc$; to ieſt że $(CD)^2 = ac - cc = c.(a-c) = AF \times BF$; ſkąd wynika ta proporcya $AF : CD :: CD : BF$, a z niéy pokazuie ſię, że *połowa małéy oſi, ieſt śrzednią proporcyonalną, między dwiéma odległościami, wziętémi od iednego z dwóch śrzódpałów do dwóch wierſzchołków* A *i* B.

Ponieważ liniia DD' ieſt iedna z nayznaczniéyſzych linii w Ellipſie, przeto też raczéy wprowadza ſię w zrównanie zamiaſt linii AF albo c. Tym końcém oznaczmy ſobie przez b takową liniią DD'; zatém miéć będziém $CD = \frac{b}{2}$, a ponieważ znalezliśmy $(CD)^2 = ac - cc$, więc będzie $\frac{bb}{4} = ac - cc$, albo $bb = 4ac - 4cc$; zrównanie tedy należące do Ellipſy, może bydź odmiénione na to, $yy = \frac{bb}{aa}.(ax-xx)$.

Ponieważ mamy $p = \frac{4ac-4cc}{a}$ albo $pa = 4ac - 4cc$ i $bb = 4ac - 4cc$, więc z tych dwóch zrównań, możemy wnieść $pa = bb$, ſkąd wynika naſtępuiąca proporcya, $a : b :: b : p$; to ieſt *że palirzędna, ieſt trzecią proporcyonalną wielkiéy oſi i małey oſi.*

231. Jeżeli w zrównaniu $yy = \frac{bb}{aa}.(ax-xx)$, wyruguiémy mianownika, miéć będziém $aayy = bb.(ax-xx)$, a zatém będzie $yy : ax-xx :: bb : aa$;

 gdzie

gdzie uważywſzy że $ax - xx$ ieſt toż ſamo co $x \times (a - x)$, i położywſzy zamiaſt iłościów Algebraicznych, ſame liniie, będzie znowu, $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$; co oznacza, *że kwadrat którēykolwiek rzędnēy, przytykaiącēy do wiélkiēy oſi Ellipſy, ma ſię do mnogości z dwòch odcinkòw* AP *i* PB, *iak ſię ma kwadrat małēy oſi, do kwadratu wielkiēy oſi.* A że ta właſność ſłuży ogołém wſzyſtkim punktóm Ellipſy, więc idzie zatém: *że kwadraty rzędnych, maią ſię między ſobą, iak mnogości z odcinków odpowiadaiących.*

232. Zrównanie $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$, nieróżni ſię (221) od zrównania, któreby należało do koła opiſanego na linii AB iako na śrzednicy
fig. 29. (fig. 29), tylko w tém, że tu ilość $ax - xx$, znayduie ſię bydź rozmnożona przez $\frac{bb}{aa}$, to ieſt przez ſtóſunek zachodzący między kwadratami małēy i wielkiēy oſi; tak iż oznaczywſzy przez z którąkolwiek z rzędnych kołowych PN, mielibyśmy $zz = ax - xx$; położywſzy tedy w zrównaniu należącém do Ellipſy takową wár-

wártość zz, zamiaſt $ax - xx$, będzie $yy = \frac{bb}{aa} zz$; po wyciągniéniu zaś piérwiaſtka kwadratowego, będzie $y = \frac{b}{a} z$, albo $ay = bz$; ſkąd wnoſi ſię $y : z :: b : a$, albo $PM : PN :: DD' : AB$ albo $:: CD : AC$. Co iawnie znać daie, *iż rzędne należące do Ellipſy, nieſą co innego, tylko rzędne koła opiſanego na wielkiēy oſi, pozmniēyſzane proporcyonalnie, to ieſt w ſtóſunku wiekiēy oſi do małēy oſi.*

Na tym fundamencie, łatwo będzie opiſać Ellipſę przy pomócy koła. Stąd także pokazuie ſię, że koło nieieſt co innego, tylko Ellipſa, któréyby dwie oſi a i b były ſobie równe, w któreyby odległość wiérſzchołka od śrzódpału, równała ſię wielkiéy oſi, albo téż ieſzcze w któréyby palirzędna równała ſię śrzednicy. Albowiém, w zrównaniach poprzédzaiących, rozumiéiąc $b = a$, albo $c = \frac{1}{2}a$, albo $p = a$, wypadnie zawſze $yy = ax - xx$, to ieſt, zrównanie należące do koła.

233. Z tych wſzyſtkich zrównań które dotąd uważaliśmy, pokazuie ſię, że liniia krzywa nazwana ellipſa, ieſt odmiénna od okręgu koła: do naryſówania którego nietrzeba więcéy, tylko mieć jednę liniią, to ieſt śrzednicę; żeby zaś naryſówać ellipſę, niedoſyć ieſt na ſaméy wiélkiéy oſi AB (fig. 28), fig. 28.
ale trzeba ieſzcze nadto mieć wiadomą albo małą oś b, albo palirzędną p, albo téż odległość c od wiérſzchołka do śrzódpału. Maiąc znaiomą wielką oś i odległość c, łatwo będzie

dzie można odkryślić ſobie ellipſę, iak widzieliśmy wyżéy. Ale gdyby była zadana wielka oś i mała oś, chcąc naryſówać ellipſę iednym cięgiém, trzebaby wprzód wynaléśdź punkta śrzódpałów, co niepodléga żadnéy trudności; albowiém wziąſzy za promień pół wielkiéy oſi, i z końca D małéy
fig. 28. oſi (fig. 28.) iako ze śrzodka, zrobiwſzy dwa małe łuczki, takowe, w których miéyſcach przecinać będą wielką oś, iakoto w F, f, tam przypadać będą punkta śrzódpałów. Bo ponieważ ſumma dwóch odległościów $FD + Df$, powinna równać ſię ilości a, więc kiedy te dwie liniie będą iednakowéy długości, każda z nich muſi równać ſię ilości $\frac{1}{2}a$.

Gdyby zadana była wielka oś i palirzędna, małą oś możnaby wynaléśdź, wziąwſzy śrzednią proporcyonalną między témi dwiéma liniiami, a to na fundamencie proporcyi $a : b :: b : p$ wyżéy wynalezionéy (230). Wynalázłſzy zaś małą oś tym ſpoſobém, reſzty dokóńczyłoby ſię, iak ſię dopiéro rzekło.

234. *Jeżeli przez którykolwiek*
fig. 28. *punkt M ellipſy (fig. 28), liniia poprowadzona* fM *od iednego z dwóch śrzódpałów, przedłuży ſię w takiéy odległości, aż przedłużenie* MG *zrówna ſię z drugą odległością* MF; *a potém wyciągnąſzy liniią* GF, *ieżeli z punktu* M *ſpuści ſię na tęż liniią* GF *proſtopadła* MOT, *takowa liniia* MOT *będzie ſtyczną ellipſy.*

Jakóż, z przyczyny równości linii MF i MG, liniia MT ieſt proſto-

padła na śrzodek linii GF; więc ieżeli z innego iakiegokolwiek punktu N teyże linii, poprowadzą ſię dwie liniie proſte NG i NF, takowe liniie będą ſobie równe. Daymy tedy iżby liniia MT, mogła dotknąć ellipſy w innym iakimkolwiek punkcie N; w takim razie, poprowadziwſzy Nf, trzeba aby $FN + Nf$, mogło zrównać ſię z $MF + Mf$, albo z $MG + Mf$, to ieſt z Gf; lecz liniia Gf ieſt mniéyſza od $GN + Nf$, a zatém mniéyſza od $FN + Nf$, więc punkt N iuż ieſt położony zewnątrz ellipſy.

235. Kąty FMO, OMG ſą ſobie równe, podług wykryślenia dopiéro opiſanego; lecz OMG ieſt znowu równy ſwemu przeciwnému w wiérzchołku fMN; więc także FMO muſi bydź równy kątowi fMN. Więc *dwie liniie poprowadzone z iednegóż punktu ellipſy do dwóch śrzódpałów, czynią z ſtyczną kąty ſobie równe.*

Doświadczenie naucza, iż promień światła padaiący na iaką powiérzchnią, odbiiaiąc ſię od niéy, czyni kąt *odbicia* (reflexion) równy kątowi *padnienia* (incidence); więc gdyby punkt F był punktém światłym,

tłym, wſzyſtkie promiénie z niego wynikaiące, padałyby na wklękłość MAM, a odbiwſzy ſię od niéy, zgromadziłyby ſię w punkcie f; i odwrotnie.

Jeżeli z punktu M linii MT, ſpuści ſię proſtopadła MI, (która oráz będzie proſtopadłą linii krzywéy), takowa liniia podzieli kąt FMf, na dwie części równe; albowiém od kątów proſtych IMT, IMN, odiąwſzy kąty równe FMT, fMN, pozoſtałe kąty FMI, IMf, muſzą także bydź ſobie równe.

236. Na tym fundamencie można wyrachówać wártość odległości PI, wziętéy od rzędnéy PM aż do tego miéyſca, w którém proſtopadła MI ſchodzi ſię z oſią. Ta liniia PI nazywa ſię *międzyległa* (ſubnormalis) a liniia MI ieſt *przytyczna* (normalis).

Zeby wyrachówać PI, trzeba wprzód wyrachówać FI. Z przyczyny że kąt FMf ieſt podzielony na dwie równe części, będzie $Mf : MF :: fI : FI$ (Jeom. 104); a zatém (Jeom. 98), $Mf + MF : Mf - MF :: fI + FI : fI - FI$. Lecz $Mf + MF = a$, więc oznaczywſzy MF przez z, iak wyżéy (222), będzie $Mf = a - z$, a zatém $Mf - MF = a - 2z$; nadto mamy $fI + FI = Ff = AB - 2AF = a - 2c$, a $fI - FI = Ff - 2FI = a - 2c - 2FI$; więc $a : a - 2z :: a - 2c : a - 2c - 2FI$; więc $aa - 2ac - 2a \times FI = aa -$

$2ac - 2az + 4z$; ſkąd wyciąga ſię $FI = \frac{az - 2cz}{a}$, albo położywſzy zamiaſt z wártość iego $\frac{ax + ac - 2cx}{a}$, wyżéy wynalezioną (222), będzie $FI = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa}$; lecz $FI = FP + PI = AP - AF + PI = x - c + PI$; więc $PI = FI - x + c = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa} - x + c = \frac{2aac - 2acc - 4acx + 4ccx}{aa} = \frac{2a.(ac - cc) - 4x.(ac - cc)}{aa} = \frac{2a - 4x}{aa} \times (ac - cc)$; albo położywſzy zamiaſt ilości $ac - cc$, iéy wartość $\frac{bb}{4}$ (230), będzie naoſtatek $PI = bb\,\frac{(a - 2x)}{2aa}$, albo $PI = \frac{bb}{aa}\,(\tfrac{1}{2}a - x)$.

237. To maiąc, łatwo także będzie miéć można wártość, odległości PT, wziętéy od rzędnéy PM aż do zniścia ſię z ſtyczną MT. Takowa liniia PT nazywa ſię *podtyczna* (ſubtangens). Chcąc tedy wyrachówać iéy wártość, trzeba uważyć, że ponieważ tróykąt IMT ieſt proſtokątny, a liniia PM ieſt proſtopadła ſpuſzczona z kąta proſtego, więc będzie (Jeom. 112) $PI : PM :: PM : PT$; to ieſt $\frac{bb}{aa} \times (\tfrac{1}{2}a - x) :$

$: y :: y : PT$; więc $PT = \frac{aayy}{bb(\frac{1}{2}a - x)}$, albo położywszy zamiast kwadratu yy wártość onego $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, $PT = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$.

Wyrażenia Algebraiczne dwóch linii PI i PT, mogą służyć do postawienia na Ellipsie prostopadłéy, i styczney w którymkolwiek punkcie M. Albowiém, maiąc zadany punkt M, spuściwszy prostopadłą PM, pokaże się wártość odległości x albo AP. A że ilości a i b rozumieią się bydź wiadome, więc będzie wiadomo wszystko, co tylko wchodzi w wyrażenie wártościów linii PI i PT.

238. Z wyrażenia linii PT można sobie wnieść, że ieżeli poprowadzi się styczna

fig. 28. kołu opisanemu na wiélkiéy osi AB (fig. 29), przez punkt N, w krórym to koło przecina się z rzędną Ellipsy PM, to obie styczne NT i MT trafiać będą w ténże sam punkt osi T. Bo ponieważ druga oś b niewchodzi w wyrażenie linii PT, więc ta liniia PT musi zawsze bydź taż sama, póki wártości a i x będą też same. A zatém wszystkie styczne poprowadzòne z punktów odpowiadaiących wszelkim ellipsom opisanym na linii AB, iako na wielkiéy osi, muszą się schodzić w iednymże punkcie T.

fig. 28. 239. Jeżeli do PT (fig. 28) doda się liniia CP, która wárta $\frac{1}{2}a - x$, będzie $CT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x} + \frac{1}{2}a - x$, co (po obróceniu wszystkiego w ułamek), wychodzi na $\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x}$; to iest, że $CT = \frac{(AC)^2}{CP}$, skąd wnosi się ta proporcya $CP : AC :: AC : CT$.

240. Chcąc także miéć wyrażenie linii TM, niebędzie w tém żadnéy trudności; bo tróykąt prostokątny TMP, daie $(TM)^2 = (TP)^2 + (PM)^2 = \frac{(ax - xx)^2}{(\frac{1}{2}a - x)^2} + \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx) = [ax - xx + \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)^2] \times \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}$.

241. Jeżeli z któregokolwiek punktu M Ellipsy, spuści się na małą oś DD' prostopadła czyli rzędna MP', oznaczywszy DP' przez x', a MP' przez y'; będzie $DP' = CD - CP' = CD - PM$, to iest, $x' = \frac{1}{2}b - y$; a zatém $y = \frac{1}{2}b - x'$. Będzie także $MP' = CP = CA - AP$; to iest, $y' = \frac{1}{2}a - x$, a zatém $x = \frac{1}{2}a - y'$. Takowe wártości zamiast x i y, położywszy w zrównaniu $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, albo $aayy = bb(ax - xx)$, będzie $\frac{1}{4}aabb - aabx' + aax'x' = \frac{1}{2}aabb - abby' - \frac{1}{4}aabb + abby' - bby'y'$; co wychodzi na $bby'y' = aabx' - aax'x'$; skąd wyciąga się $y'y' = \frac{aa}{bb}(ax' - x'x')$; zró-

zrównanie, podobne tamtemu co było do wielkiéy oſi, a zatém z którego można téż ſobie uczynić podobne wnioſki, iakoto: że *kwadrat rzędnéy P'M należącéy do małéy oſi, ma ſię do mnogości z dwóch odcinków DP' X P'D', iak ſię ma kwadrat wielkiéy oſi, do kwadratu małéy oſi*; iakóż, z tego zrównania wnoſi ſię proporcya $y'y' : ax' - x'x' :: aa : bb$, w któréy ilość $ax' - x'x'$, nieco innego ieſt, tylko $x'(a-x')$ albo $DP' \times P'D'$. Dalſze wnioſki ſą: że *kwadraty rzędnych należących do małéy oſi, maią ſię między ſobą iak mnogości z odcinków odpowiadaiących*; i że *Ellipſa może bydź nakryślona przy pomocy koła opiſanego na małéy oſi, przedłużaiąc rzędne tego koła, w ſtóſunku małéy oſi do wielkiéy oſi.*

242. Stąd co poprzédziło, pokazuie ſię, że właſności względém drugiéy oſi, ſą podobne tamtym które wynalezliśmy względém piérwſzéy oſi, przynaymniéy w tém co niezawiſło od śrzódpałów. Gdyby kto chciał mieć liniie względém téy drugiéy oſi, odpowiadaiące liniióm wyrachówanym względém piérwſzéy
fig. 28. oſi, to ieſt $P'I'$, $P'T'$, CT', i MT' (fig. 28), to ie ſobie łatwo wynaydzie przy pomocy linii onym odpowiadaiących, i troykątów ſobie podobnych, które w figurze łatwo można rozeznać. Jeżelibyśmy do wyrachówania ta-

takowych linii, użyli odcinków DP' albo x', tobyśmy na nie znalezli wyrażenia wcale podobne tamtym, które mieliśmy wyrażone w x. na też liniie odpowiadaiące piérwſzéy oſi.

Naznaczaią także palirzędną i drugiéy oſi; ale w tym razie przez takową liniią. nierozumié ſię liniia przechodząca przez śrzódpał téy drugiéy oſi (którego niéma). ale rozumié ſię trzecia proporcyonalna tey drugiéy oſi i piérwſzéy oſi.

243. Dotąd niebraliśmy odcinków inaczéy tylko od wiérſzchołka; gdybyśmy ie zaś chcieli rachówać od śrzodka C. to oznaczywſzy odcinek CP przez z, mielibyśmy AP albo $x = \frac{1}{2}a - z$; takową wártość położywſzy zamiaſt x, w zrównaniu $yy = \frac{bb}{a} \cdot (ax - xx)$, iako też w wártościach linii PI, PT, CT, i $(TM)^2$, byłoby $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{4}aa - zz)$; $PI = \frac{bbz}{aa}$; $PT = \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z}$; $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$; $(TM)^2 = (\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}) \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$.

244. Jeżeli z któregokolwiek punktu M Ellipſy (fig. 30), poprowadzi ſię przez śrzodek C oſi AB, fig. 30.
liniia proſta MCM', kończąca ſię na drugiéy ſtronie Ellipſy, to takowa liniia nazywać ſię będzie *śrzednicą*. A ieżeli przez wiérſzchołek M poprowadzi ſię ſtyczna MT, i przez śrzodek C śrzednica NN' równoległa ſtycznéy MT, takowa śrzednica nazy-

 wać

wać ſię będzie *śrzednica doſtawna* (diameter conjugata), piérwſzéy śrzednicy. Liniia mO poprowadzona z punktu m Ellipſy, równolegle ſtycznéy MT, a kończąca ſię na śrzednicy MM, nazywa ſię *rzędna należąca do téy śrzednicy*, a zaś MO nazywa ſię *odcinkiém*. Paliirzędna odpowiadaiąca śrzednicy MM' ieſt trzecia proporcyonalna liniióm MM' i NN'.

245. Teráz mamy okazać, iż rzędne mO należące do iakiéykolwiek śrzednicy, maią właſności, podobne właſnościóm rzędnych, należących do oſiów.

Tym końcém ſpuśćmy z punktów m i O proſtopadłe mp, OQ na oś AB, i poprowadźmy liniią mS równoległą téyże oſi. Oznaczywſzy AB przez a; MP przez y; CP przez z; Qp przez g; CQ przez k; miéć będziém $AP = \frac{1}{2}a - z$; $PB = \frac{1}{2}a + z$; $Ap = CA - Cp = CA - CQ - Qp = \frac{1}{2}a - k - g$; $pB = CB + Cp = \frac{1}{2}a + k + g$.

Tróykąty ſobie podobne TPM, mSO, dadzą $TP : PM :: mS$ albo $pQ : SO$; to ieſt, $\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. Tóykąty ſobie podobne CMP, COQ daią, $CP : PM :: CQ : QO$; to ieſt, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$; więc $pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. A ponieważ punkt m, ieſt punktém należącym do Ellipſy, podług (231), więc muſi bydź

$(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$, to ieſt, $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}\right)^2 : yy :: (\frac{1}{2}a - k - g) \times (\frac{1}{2}a + k + g) : (\frac{1}{2}a - z).(\frac{1}{2}a + z)$, albo $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(\frac{1}{4}aa - zz)} + \frac{ggzzyy}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} : yy :: \frac{1}{4}aa - kk - 2kg - gg : \frac{1}{4}aa - zz$, albo rozmnożywſzy wyrazy śrzednie i ſkrayne, a przytém dawſzy baczenie na te ilości, które znaydówać ſię będą oráz rozmnożone i rozdzielone przez $\frac{1}{4}aa - zz$, iako téż przez z, będzie $\frac{kkyy}{zz}(\frac{1}{4}aa - zz) - 2gkyy + \frac{ggzzyy}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aayy - kkyy - 2gkyy, - ggyy$, albo odprawiwſzy wſkazane działania z wyrazém $\frac{kkyy}{zz}.(\frac{1}{4}aa - zz)$ i wyrugówawſzy wyrazy $-kkyy$, $-2gkyy$ iako znayduiące ſię w obu częściach zrównania, nadto rozdzieliwſzy przez yy, będzie $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$; zrównanie, które nam ieſt potrzebne do naſzego przedſięwzięcia; ale nim go użyiémy, wyciągniymy wprzód z niego niektóre wiadomości.

Jeżeli punkt O, który tu uważaliśmy bydź iakikolwiek, rozumiéć będziémy położony w punkcie C, to ieſt że liniia mO przechodzić będzie przez śrzodek, albo zamiéni ſię w linią CN; natenczas CQ albo k ſtaie ſię zerém, a liniia Qp albo g zamiénia ſię w linią CR. Takowe przypuſzczenie wprowadziwſzy w zrównanie wyżéy wynalezione, to ieſt zróbiwſzy $k = 0$, po wyrugówaniu

niu mianownika, po przeſtawieniu, po zebraniu, i po rozdzieleniu przez $\frac{1}{4}aa$, będzie $gg = \frac{1}{4}aa - zz$; to ieſt $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz = (\frac{1}{2}a - z) \times (\frac{1}{2}a + z) = AP \times PB$.

To założywſzy, powróćmy do naſzéy rzeczy, i oznaczmy CM przez $\frac{1}{2}a$; CN przéz $\frac{1}{2}b'$; mO przez y'; CO przez z'. Tróykąty ſobie podobne CPM, CQO, dadzą nam $CM : CO :: CP : CQ$, albo $\frac{1}{2}a' : z' :: z : k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$. Tróykąty znowu CNR, mSO, podobne ſobie z przyczyny równoległych, daią $mO : mS :: CN : CR$, albo $y' : g :: \frac{1}{2}b' : CR = \frac{\frac{1}{2}gb}{y'}$; więc $(CR)^2 = \frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'}$; lecz mieliśmy $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$; więc będzie $\frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'} = \frac{1}{4}aa - zz$; ſkąd wyciąga ſię $gg = \frac{y'y(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$. Powróćmy teráz do zrównania $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, i położmy w niém zamiaſt gg i kk wártości dopiéro wynalezione, a mieć będziém: $\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'(\frac{1}{4}aa - zz)} = \frac{1}{4}aa - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} + \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'}$, albo po zebraniu i po rozdzieleniu przez $\frac{1}{4}aa$, $\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = 1 - \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$; albo po wyrugówaniu mianowników $\frac{1}{4}a'a'$ i $\frac{1}{4}b'b'$ będzie, $\frac{1}{4}b'b'z'z' = \frac{1}{16}a'a'b'b' - \frac{1}{4}a'a'y'y'$, albo naoſtatek $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$; ſkąd wnoſi ſię ta proporcya $y'y' : \frac{1}{4}a'a' - z'z' ::$ $b'b'$

$b'b' : a'a'$; to ieſt $(mO)^2 : MO \times OM' :: (NN')^2 : (MM')^2$. A zatém zrównanie należące do dwóch śrzednic doſtawnych iakichkolwiek, ieſt wcale podobne zrównaniu należącému do dwóch oſiów.

246. Jeżeli zrobi ſię $y' = 0$, będzie $\frac{1}{4}a'a' - z'z' = 0$; a zatém będzie $z' = \pm \frac{1}{2}a'$. Co znać daie, że liniia MM' ſpotyka ſię z Ellipſą w dwóch punktach M i M' równo oddalonych od śrzodka C; i że *wſzyſtkie śrzednice Ellipſy, przecinaią ſię w śrzodku iey, na dwie części równe.*

247. Zrównanie znowu $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$, z którego wyciąga ſię $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - z'z')}$, daie znać, że przedłużywſzy liniią mO, tak aby było $Om' = Om$, punkt m' należyć będzie do Ellipſy; więc *każda śrzednica Ellipſy, przecina na dwie części równe, liniie równoległe ſtycznéy, która przechodzi przez początek* M *téyże śrzednicy.*

248. Stąd można ſobie wnieść 1ód Ze ſtyczna poprowadzona przez koniec N śrzednicy NN', ieſt równoległa śrzednicy MM'. 2re Stąd zaś że $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - z'z')}$, można wnieść, że rzędne Om, należące

żące do śrzednicy MM', nieſą co innego tylko rzędne należące do koła, maiącego za śrzednicę MM', ale zmnieyſzone albo pomnożone w ſtóſunku ilości a' do b' i nachylone pod kątém równaiącym ſię nachyleniu śrzednic doſtawnych. Jeżeli będzie $a' = b'$, to takowe rzędne, będą zgoła równe rzędnym koła wzmiankowanego. Naoſtatek żeby wiédzieć, w którém mieyſcu Ellipſy dwie śrzednice doſtawne mogą bydź ſobie równe, nietrzeba tylko znaléśdź w którém mieyſcu wypada $CP = CR$; albo $(CP)^2 = (CR)^2$; to ieſt $zz = \frac{1}{4}aa - zz$; z tego zrównania wyciąga ſię $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$; co można wykryślić w naſtępuiący ſpoſób. Opiſawſzy na wielkiey oſi AB iako na śrzednicy (fig. 29) pół
fig. 29. koła $ANEB$, przeciętego w punkcie E przez małą oś CD, dzieli ſię łuk AE na dwie równe części w punkcie N'' z którego ſpuściwſzy proſtopadłą $N''p$ przecinaiącą Ellipſę w punktach M'', M'; linije CM'' i CM' będą dwie śrzednice doſtawne ſobie równe. Albowiém oznaczywſzy CP przez z, ponieważ tróykąt CPN'' ieſt proſtokątny i równoramiénny, z przyczyny kąta ACN'' maiącego 45°, będzie $zz + zz = (CN'')^2 = \frac{1}{4}aa$; więc $zz = \frac{1}{8}aa$, a $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

fig. 30. 249. Jeżeli ze śrzodka C, (fig. 30) ſpuści ſię proſtopadła CF na ſtyczną TM, tróykąty ſobie podobne TPM, TCF, dadzą $TM : PM :: CT : CF$; ſkąd wnoſi ſię $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Podobnież tróykąty TPM i CNR ſobie podobne z przyczyny boków równoległych, dadzą $TM :: PT :: CN : CR$; więc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; a zatém będzie $CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, albo ſkwadrówawſzy $(CN)^2 \times (CF)^2 = \ldots\ldots \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; widzieliśmy zaś wyżey, że yy albo $(PM)^2 = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz)$; $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$; $(PT)^2 = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz}$, a $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$ (245); więc położywſzy takowe wártości w poprzédzaiącém zrównaniu, i uczyniwſzy zebranie, będzie $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{1}{16}aabb$, a zatém $CN \times CF = \frac{1}{4}ab$. Lecz poprowadziwſzy ſtyczną NT'', którahy z liniią TM ſpotykała ſię w I, $CM \times CF$ wyrażać będzie powiérzchnią równoległoboku $CMIN$, a $\frac{1}{4}ab$ albo $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ powiérzchnią proſtokąta zrobionego z dwoch pół oſiów; więc *równoległoboki zamknięte ſtycznémi, poſtawionémi na końcach śrzednic doſtawnych, ſą równe między ſobą, i równe proſtokątowi, zrobionemu z dwóch oſiów.*

250. Też tróykąty fobie podobne TPM i CRN daią $PT : PM :: CR : RN$; więc $RN = \frac{CR \times PM}{PT}$, albo $(RN)^2 = \frac{(CR)^2 \times (PM)^2}{(PT)^2} = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz) \times zz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} = \frac{bbzz}{aa}$; tróykąty zaś proftokątne CRN i CPM daią, $(CR)^2 + (RN)^2 = (CN)^2$ i $(CP)^2 + (PM)^2 = (CM)^2$; więc $(CR)^2 + (RN)^2 + (CP)^2 + (PM)^2 = (CN)^2 + (CM)^2$; położywfzy w piérwfzéy części zrównania, zamiaft linii ich wártości Algebraiczne, po uczynioném zebraniu, będzie $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = (CN)^2 + (CM)^2$; więc *fumma kwadratów z dwóch pół śrzednic doftáwnych ellipfy, iakichkolwiek, równa fię fummie kwadratów z dwóch ofiów.*

251. Jeżeli w zrównaniu $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$, położymy zamiaft CR i RN ich wártości, miéć będziém $(CN)^2 = \frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}$; widzieliśmy zaś wyżéy, że $(TM)^2 = (\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}) \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$, zatém będzie $(TM)^2 = (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$; tróykąty znowu TPM, $MP'T'$ fobie podobne, daią fkwadrówawfzy, $(PT)^2 : (TM)^2$ ::

$:: (P'M)^2 : (MT')^2$, albo $\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} : (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} :: zz : (MT')^2$; więc $(MT')^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{\frac{1}{4}aa - zz}$; więc $(TM)^2 \times (MT')^2 = (CN)^4$, albo $TM \times MT' = (CN)^2$; ieżeli zaś oznaczymy palirzędną należącą do śrzednicy MM' przez p', to będzie $2CM : 2CN :: 2CN : p'$ (244); a zatém $2p' \times CM = 4(CN)^2$, albo $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; więc będzie $TM \times MT' = \frac{1}{2}p' \times CM$, fkąd wynika proporcya $CM : TM :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

Jeżeli na linii TT' iako na śrzednicy (fig. 31), opifze fię koło, takowe będzie przechodzić przez punkt C; bo kąt TCT' ieft profty; a ieżeli przedłuży fię linija CM tak daleko, aż fpotka fię z okręgiém w punkcie V; to z natury koła (Jeom. 120) wypadnie ta proporcya, $CM : TM :: MT' : MV$; więc $MV = \frac{1}{2}p'$, *fig. 31.*

252. Stąd można fobie wnieść fpofób bardzo profty, fłużący do wynaleziénia ofiów Ellipfy, a zatém i do wykryślenia iéy, niémaiąc nic więcéy wiadomego, tylko dwie śrzednice doftawne MM' i NN' i kąt który między fobą czynią.

W takim razie, trzeba przedłużyć CM, o ilość MV równą połowie palirzędnéy, potém ze śrzodka X linii CV podnieść proftopadłą XZ, która fpotka fię w punkcie Z z liniią nieokreśloną TT' przeprowadzoną przez punkt M równolegle do NN'. Daléy z punktu Z iako ze śrzodka, odległością ZC iako promiéniém, ryfuie fię koło, które fpotka fię z liniią TT' w dwóch punktach T i T', przez takowe punkta i przez punkt C poprowadzone linije TC, $T'C$, pokażą

każą

każą kierónki-dwóch ofiów. Zeby zaś mieć i wielkość onychże, trzeba, fpuściwfzy proftopadie MP i MP', wziąść CA równą śrzedniéy proporcyonalnéy między CT i CP; zaś CD, równą śrzedniéy proporcyonalnéy między CT' i CP'; albowiém, widzieliśmy wyżéy (239), że $CP : CA :: CA : CT$; i znowu łatwo ieft dowieśdź (przy pymocy tróykątów fobie podobnych TPM, TCT', iako też znaiomych wártościów linii TP, PM, i CT), że $CT' = \frac{(CD)^2}{CP'}$, to ieft że $CP' : CD :: CD : CT'$.

O Hiperboli.

fig. 32. 253. Zaftanówmy fię teráz nad táką liniią krzywą (fig. 32), któraby w każdym fwoim punkcie M miała tę włafność, iżby różnica $Mf - MF$ dwóch odległościów Mf i MF od dwóch punktów ftałych f i F była zawfze iednakowa, i równa linii danéy a.

Tym końcém (tak iak uczyniliśmy względém Ellipfy), trzeba nam znaléśdź zrównanie, wyrażaiące ftófunek między proftopadlémi PM fpufzczonémi na liniią Ff, i ich odległościami FP albo AP od iakiego ftałego punktu F albo A, obranémi podług upodobania na linii Ff.

Obié-

Obiéram fobie tedy na początek odcinków punkt A, taki ażeby liniia CA wzięta od śrzódka C linii Ff, była $= \frac{1}{2}a$; i robię $CB = CA$. To założywfzy, oznaczam fobie AP przez x; PM przez y; liniią AF, króra rozumié fię bydź wiadoma, przez c; a liniią FM, przez z; natenczas będzie $FP = AF - AP = c - x$*; $fP = fA + AP = fB + AB + AP = c + a + x$; a ponieważ $Mf - MF = a$, więc będzie $Mf = a + MF = a + z$.

Tróykąty proftokątne FPM, fPM daią $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$, tudzież $(fP)^2 + (PM)^2 = (fM)^2$, to ieft, $cc - 2cx + xx + yy = zz$, tudzież $cc + 2ac + aa + 2cx + 2ax + xx + yy = aa + 2az + zz$. Z tych dwóch zrównań odiąwfzy piérwfze od drugiego, po wyrugówaniu wyrazu aa, znayduiącego fię w obu częściach, będzie $4cx + 2ac + 2ax = 2az$; fkąd wyciąga fię $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; położywfzy

* *Gdyby punkt* P *znaydówał fię bydź położony poniżéy* F *względém punktu* A, *to liniia* FP *byłaby wyrażona przez* x — c; *ale to nieuczyniłoby w oftateczném zrównaniu żadnéy odmiany.*

wſzy tedy tę wártość zamiaſt z w pierwſzém zrównaniu, miéć będziém $cc + 2cx + xx + yy = \frac{4ccxx + 4accx + aacc + 4acxx + 2aacx + aaxx}{aa}$ albo po wyrugówaniu mianownika, po przeſtawiéniu i po zebraniu, $aayy = 4aacx + 4accx + 4acxx + 4ccxx$, albo $aayy = (4ac - 4cc)(ax + xx)$; ſkąd wyciąga ſię $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$.

254. To zrównanie, może ſłużyć do nakryślenia Hiperboli przez punkta, koléyno powynaydówane, naznaczaiąc głoſce x różne wártości.

Można także nakryślić przez punkta też Hiperbolę, wziąwſzy podług upodobania część Br, większą od linii BF, i naryſówawſzy z punktu f iako ze śrzodka, promieniém Br, łuk któryby zoſtał przecięty w iakimkolwiek punkcie M, przez inny łuk, naryſówany z punktu F iako ze śrzodka, promieniém Ar.

Naoſtatek można też ieſzcze nakryślić też Hiperbolę iednym ciągiém, w ſpoſób naſtępuiący:

W punkcie f utwierdza ſię liniiał nieokreślonéy długości, tak żeby ſię mógł koło tego punktu obracać. W punkcie F, i w iednym z punktów Q tego liniiału, przywiązuią ſię końce nitki FMQ, krótſzéy od linii fQ, w takim ſtoſunku, ażeby różnica między liniią fQ a długością nitki, równała ſię linii AB; natenczas przy

pomocy pióra albo ołówka M, część nitki MQ przytyka ſię do liniiału, a powodząc ołówkiém od M do A, i utrzymuiąc nitkę zawſze wytężoną, liniiał będzie ſię zniżać, część FM będzie ſię ukracać, i pióro albo ołowek M nakryśli żądaną liniią krzywą AM, to ieſt *hiperbolę*, Jakóż iawna ieſt, że ponieważ cała długość fQ, albo $fM + MQ$, ieſt zawſze taż ſama, i długość $FM + MQ$ ieſt także zawſze taż ſama, więc i różnica ich $fM + MQ - FM - MQ$, albo $fM - FM$, muſi także bydź zawſze taż ſama.

255. Zrównanie $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$, z którego wyciąga ſię $y = \pm\sqrt{[\frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)]}$, daie znać, że każdemu odcinkowi AP albo x, odpowiádaią zawſze dwie rzędne równé PM i PM; padaiące z obu ſtrón przedłużonéy linii AB, która nazywa ſię *główną oſią* (axis principalis); a zatém ta liniia krzywa ma drugie ramię AM, pierwſzemu doſkonale równe, oba zaś rościągać ſię mogą bez końca; albowiém oczywiſta ieſt, że im bardziéy pomnażać ſię będzie wártość odcinka x, tém też bardziéy roſnąć będą dwie wártości $\pm\sqrt{[\frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)]}$.

256. Jeżeli w téyże wártości zrobimy x ilością przéczącą, to ieſt ieżelibyśmy

my ſobie zmyślili punkt P padaiący powyżéy punktu A, natenczas wyżéy położona wártość, odmieniłaby ſię w tę, $\pm\sqrt{[\frac{4ac + 4cc}{aa}(x^2 - ax)]}$; lecz ponieważ ilość $x^2 - ax$, albo $x.(x - a)$, póty póki x ieſt mniéyſze aniżeli a, wypada zawſze ilością przéczącą, więc w takim razie, ilość $\pm\sqrt{[\frac{4ac + 4cc}{aa}(x^2 - ax)]}$ ieſt ilością zmyśloną; a zatém głoſka y niéma żadnéy rzetelnéy wártości od punktu A aż do B; kiedy zaś x ſtanie ſię większe nad a, natenczas ilość $x^2 - ax$ odmiénia ſię nazad w twiérdzącą, i wártości głoſki y ſtaią ſię znowu rzetelnémi. A ſtąd pokazuie ſię, że od punktu B poczyna ſię nowa część linii krzywéy mBm', rościągaiąca ſię tak iak piérwſza bez końca, na obie ſtrony przedłużenia AB, i doſkonale równa téyże piérwſzéy części. Bo ieżeli zrobimy $Bp = AP$, to ilość $xx - ax$ albo $Ap \times pB$ zrówna ſię ilości $AP \times PB$, a zatém i rzędna pm muſi równać ſię rzędnéy PM.

257. Jeżeli w zrównaniu $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa} \times (ax - xx)$ zrobimy $y = 0$, to znaydziémy bydź $ax + xx$ albo $x(a + x) = 0$, ſkąd wynika $x = 0$ i $x + a = 0$ albo $x = -a$; więc linia krzywa ſpotyka ſię z oſią AB w dwóch punktach A i B.

258. Jeżeli rozumiéć będziémy $AP = AF$, to ieſt $x = c$, żeby miéć wártość rzędnéy Fm', przechodzącéy

céy przez punkt F, (który nazywa ſię śrzódpałem iako téż i punkt f), to w takiém przypuſzczeniu, wypadnie $y = \pm\sqrt{[\frac{4ac + 4cc}{aa}(ac + cc)]} = \pm\sqrt{[\frac{(4ac + 4cc)^2}{aa}]} = \pm\frac{2(ac + cc)}{a}$; więc będzie podwóyna rzędna $m''m''' = \frac{4(ac + cc)}{a}$; takowa linia nazywa ſię *palirzędną* hiperboli; którą oznaczywſzy przez p, będzie $p = \frac{4(ac + cc)}{a}$, a zatém $\frac{p}{a} = \frac{4(ac + cc)}{aa}$. Używſzy tego wyrażenia, zrównanie wyżéy wynalezione należące do hiperboli, odmiéni ſię w to zrównanie prościéyſze, $yy = \frac{p}{a}(ax + xx)$.

Z wártości linii p, można ſobie wnieść, że *palirzędna głownéy oſi hiperboli, ieſt większa aniżeli odległość od wiérſzchołka* A *do śrzodpału* F *cztéry razy powtórzona;* bo takowa wártość to ieſt $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$ wychodzi na $p = 4c + \frac{4cc}{a}$, ilość oczywiście większa nad $4c$.

259. Jeżeli na śrzódku C linii AB, poſtawi ſię proſtopadła DD', któréyby połowa, była śrzednią proporcyonalną między c i $a + c$, to ieſt między AF i fA, to takowa proſtopadła nazywać ſię będzie *drugą oſią* hiperboli, którą oznaczywſzy ſobie przez b, będzie $\frac{bb}{4} = c \cdot (a + c)$, albo $bb = 4ac + 4cc$; używſzy téy ilości bb, zamiaſt $4ac + 4cc$ w zrównaniu $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$, będzie $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$. Skąd pokazuie ſię, że te trzy zrównania należące do hiperboli, nieróżnią ſię od trzech zrównań odpowiadaiących, należących do Ellipſy, tylko znakami poprzédzaiącémi kwadraty cc i xx.

Toż ſamo zrównanie $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$ wſkazuie nam także właſność podobną tamtéy, którą uważaliśmy względém Ellipſy. Jakóż, wyrugówawſzy mianownika aa, będzie $aayy = bb(ax + xx)$, ſkąd wnoſi ſię ta proporcya, $ab : ax + xx :: bb : aa$, albo $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$ albo $:: (CD)^2 : (AC)^2$; to ieſt, że *kwadrat rzędnéy należącéy do główney oſi hiperboli, ma ſię do mnogości $AP \times PB$. z dwóch odcinków, iak ſię ma kwadrat drugiéy oſi, do kwadratu głównéy*; a zatém *kwadraty rzędnych maią ſię między ſobą iak mnogości z odcinków odpowiadaiących*.

Kiedy dwie oſi a i b będą ſobie równe, to zrównanie należące do hiperboli, będzie $yy = ax + xx$, które nieróżni ſię od zrównania należącego do koła, tylko znakiém poprzédzaiącym kwadrat xx. Hiperbola natenczas nazywa ſię *hiperbolą równoramiénną* (hiperbola æquilatera).

Z zrównania $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, wyciąga ſię $4ac + 4cc = ap$; a ponieważ mieliśmy $4ac + 4cc = bb$, więc będzie $ap = bb$; ſkąd wnoſi ſię ta proporcya, $a : b :: b : p$; więc palirzędna należąca do głównéy oſi, ieſt trzecią proporcyonalną téyże głównéy oſi i drugiéy oſi.

260. Jeżeli z punktu D (fig. 32) poprowadzi ſię do punktu A liniia DA, tróykąt proſtokątny DCA, da $DA = \sqrt{[(CD)^2 + (AC)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$, albo położywſzy zamiaſt bb wártość onego $4ac + 4cc$, $DA = \sqrt{(cc + ac + \frac{1}{4}aa)} = c + \frac{1}{2}a = AF + CA = CF$. fig. 32

Więc maiąc wiadome oſi, żeby miéć śrzódpały, trzeba wznaczyć DA od C do F, a odwrotnie, żeby miéć drugą oś, kiedy ieſt zadana główna oś i śrzódpały, trzeba z punktu A iako ze śrzodka, promiéniém CF. nakryślić łuk przecinaiący proſtopadłą DD', w iakowym punkcie D.

261. Jawna ieſt, że wykryślenie hiperboli zawiſło od dwóch ilościów, to ieſt od głównéy oſi i drugiéy oſi, albo od głownéy oſi i od śrzódpałów, albo też od głównéy oſi i

i od palirzędnéy. Podług tego co ſię rzekło, wykryślenie hiperboli, zawſze łatwo będzie naprowapzić do iednego z ſpoſobów wyżéy przepiſanych. Albowiém gdyby *np.* zadana była główna oś i palirzędna, to wziąwszy śrzednią proporcyonalną między témi dwiema liniiami, mielibyśmy mnieyſzą oś, przy pomocy którey znalezlibyśmy śrzódpały.

262. *Jeżeli weźmie ſię na linii* MF *część* MG = MF *i poprowadziwſzy liniią* FG, *ieżeli z punktu* M *ſpuści ſię na nię proſtopadła* MOT, *to takowa proſtopadła będzie ſtyczną hiperboli.*

Albowiém, z innego iakiegokolwiek punktu *N* obranego na linii *TM*, poprowadźmy do dwóch śrzódpałów liniie *Nf* i *NF*, iako też do punktu *G* liniią *NG*; natenczas iawna ieſt z ſamego wykryślenia, że liniie *Nf* i *NG* ſą ſobie równe; lecz liniia *Nf* ieſt mnieyſza od $NG + Gf$, a zatém mnieyſza od $NF + Gf$; więc liniia $Nf - NF$ ieſt mnieyſza od *Gf*, to ieſt mnieyſza od $Mf - MF$; więc punkt *N* ieſt położony zewnątrz hiperboli. Toż ſamo możnaby okazać względém wſzelkiego innego punktu wziętego na linii *TM* oprócz punktu *M*.

Kąty *FMO*, i *OMG* ſą ſobie równe, mocą poprzédzaiącego wykryślenia; lecz kąt *OMG*

OMG równa ſię ſwemu przeciwnému w wierzchołku *NMQ*; więc kąt *FMO*, ieſt równy kątowi *NMQ*; więc liniia *MF* idąca do śrzódpału, czyni z ſtyczną tenże kąt, który czyni z tąż ſtyczną przedłużenie *MQ* linii *fM*, idącéy do drugiego śrzódpału.

Więc ieżeli punkt *F* ieſt punktém świattłym, to wſzyſtkie promiénie wychodzące z punktu *F*. i padaiące na wklękłość *MAM'*, tak odbiiać ſię będą, iak gdyby wychodziły z punktu *f*.

263. Wynaydziymy teráz *podtyczną* (ſubtangens) *PT*.

Ponieważ ſtyczna *MT*, dzieli kąt *FMf* na dwie równe części, więc podług (Jeom. 104) będzie $fM : MF :: fT : FT$; a oznaczywſzy, iak wyżéy, *MF* przez *z*, będzie $fM = z + a$; nadto ponieważ *Ff* albo $Bf + AB + AF = a + 2c$, więc będzie liniia *fT* albo $Ff - FT = a + 2c - FT$, a zatém poprzédzaiąca proporcya odmiéni ſię w to wyrażenie, $z + a : z :: a + 2c - FT : FT$; z którego po rozmnożeniu ſkraynych i śrzodków, wnoſi ſię zrównanie $z \times FT + a \times FT = az + 2cz - z \times FT$; z niego zaś przy pomocy zwyczaynych działań wyciąga ſię $FT = \frac{2cz + az}{2z + a} = \frac{(2c + a)z}{2z + a}$; lecz wyżéy (253),

zna-

znalezliśmy $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; więc $2z + a = \frac{4cx + 2ac + 2ax + aa}{a} = \ldots \frac{(2c+a).2x + (2c+a)a}{a} = \frac{(2c+a).(2x+a)}{a}$; takową wártość położywſzy w wártości linii FT, będzie $FT = \ldots \frac{(2c+a) \times \frac{2cx + ac + ax}{a}}{2c + a \times \frac{2x+a}{a}}$; albo wyrugówawſzy ſpólnego czynnika $\frac{2c+a}{a}$, $FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x+a}$. Tym ſpoſobém wynalázłſzy liniią FT, łatwo mieć będzie można podtyczną PT; albowiém $PT = FT - FP = FT - AF + AP = FP - c + x = \frac{2cx + ac + ax}{2x+a} - c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x+a} = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; więc $PT = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; ſkąd pokazuie ſię, że wyrażenie podtycznéy należącéy do hiperboli, nieróżni ſię od wyrażenia podtycznéy należącéy do Ellipſy, tylko znakami.

264. Jeżeli od PT odéymie ſię AP, zoſtanie AT, to ieſt odległość wzię-

wzięta od wiérſzchołka, aż do tego miéyſca gdzie ſtyczna ſpotyka ſię z oſią. Takowa tedy odległość AT będzie wyrażona przez $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x$, a po zebraniu będzie $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

265. To wyrażenie linii AT, daie nam okazyą do uczynienia tu niektórych uwag nad krzywością hiperboli. Widzieliśmy wyżéy że każde z dwóch ramión AM i AM' rościąga ſię bez końca. Atoli iednak krzywość ieſt taka, że wſzyſtkie ſtyczne, któreby tylko przytknąć można do każdego punktu tych ramión nieſkończonych, nieſpotykaią ſię nigdy z oſią tylko w długości zawartéy między punktami A i C. Jakóż ieżeli w wártości linii AT położymy koléyno zamiaſt x, wſzelkie ilości iakie tylko pomyślić można, począwſzy od zero aż nieſkończenie, to iednakże wártość linii AT roſnąć niebędzie tylko od zera aż do $\frac{1}{2}a$. Albowiém kiedy x będzie ilością nieſkończoną, to mianownik $\frac{1}{2}a + x$, powinién bydź rozumiany, iak gdyby był tylko x; bo przydawſzy mu $\frac{1}{2}a$, byłobyto rozumiéć, że x ieſzcze może bydź pomnożone, a zatém byłoby znoſić to przypuſzczenie, że x ieſt ilością nieſkończoną; lecz w takowym przypadku, wártość linii AT, wychodzi na $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$, to ieſt na $\frac{1}{2}a$; więc ſtyczna poprowadzona z końca nieſkończonego każdego ramiénia hiperboli AM, AM' przechodzi przez śrzodek C. A że ramiona Bm, Bm' położone naprzeciw piérwſzym, ſą im doſkonale równe, i że punkta

A i B, oba ſą równo oddalone od śrzodka C, więc idzie zatém, że też ſame ſtyczne ſą także ſtycznémi końcom nieſkończonym ramion hiperboli Bm, Bm. W figurze 33 takowe liniie ſą oznaczone przez XCx i TCy. fig. 33.

266. Takowe ſtyczne nazywaią ſię *końcotyczne* hiperboli (aſſimptoti); ſąto iak widzieć można liniie poczynaiące ſię od śrzodka, i bez uſtanku coráz bardziéy przybliżaiące ſię do hiperboli, a iednakże z nią niémogące ſię zniyśdź, aż w odległości nieſkończonéy.

Jeżeli przez wiérſzchołek A poprowadzi ſię liniia At, równoległa linii PM, to tróykąty ſobie podobne TAt, TPM, dadzą tę proporcyą, $PT : PM :: TA : At$, to ieſt, $\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} : y :: \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} : At = \frac{\frac{1}{2}axy}{\frac{1}{2}a+x} \times \frac{\frac{1}{2}a+x}{ax+xx} = \frac{\frac{1}{2}ay}{a+x}$, albo położywſzy zamiaſt y iego wártość $\frac{b}{a}\sqrt{(ax+xx)}$, będzie $At = \frac{\frac{1}{2}b\sqrt{(ax+xx)}}{a+x}$, wártość, która (kiedy x będzie ilością nieſkończoną) przémiénia ſię na $\frac{1}{2}b$ albo na CD; bo natenczas ax powinno bydź za nic poczytane względém xx, iako też a względém x. Zeby tedy wynaléśdź po-

łożenie końcotycznych, trzeba ſobie poſtąpić w naſtępuiący ſpoſób. Z punktu A (fig. 33), podnoſi ſię proſtopadła AL, przedłużona z obu ſtrón punktu A na iednakową ilość, równaiącą ſię linii CD; natenczas poprowadziwſzy przez śrzodek C i przez dwa końce LL' dwie liniie, takowe będą żądanémi końcotycznémi. fig. 33.

267. Zeby mieć wyrażenie linii CT (fig. 32), trzeba od CA odiąć AT; a tak będzie $CT = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{(CA)^2}{CP}$, ſkąd wnoſi ſię ta proporcya, $CP : CA :: CA : CT$.

268. Chcąc mieć wyrażenie linii TM, tróykąt proſtokątny TPM, daie $(TM)^2 = (PM)^2 + (PT)^2 = \frac{bb}{aa}\cdot(ax+xx) + \frac{(ax+xx)^2}{(\frac{1}{2}a+x)^2} = [\frac{bb}{aa}\cdot(\frac{1}{2}a+x)^2 + ax + xx]\cdot\frac{(ax+xx)}{(\frac{1}{2}a+x)^2}$.

269. Zeby mieć wyrażenie linii PI to ieſt międzyległéy; tróykąty TPM, MPI ſobie podobne, (z przyczyny iż kąt TMI ieſt proſty, a PM ieſt proſtopadła ſpuſzczona z kąta proſtego), dadzą $TP : PM :: PM : PI$, albo ax

$\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y :: y : PI = \frac{y^2(\frac{1}{2}a + x)}{ax + xx}$, albo też z przyczyny że $y^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (ax + xx)$, będzie $PI = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a + x)$.

270. Poſzukaymy teráz zrównania względém drugiéy oſi DD'; tym umyſłém poprowadźmy proſtopadłą MP' na tę drugą oś, a oznaczywſzy MP' przez y', i DP' przez x'; mieć będziém $CP' = PM = y = \frac{1}{2}b - x'$; $P'M = CP = \frac{1}{2}a + x = y'$; a zatém $x = y' - \frac{1}{2}a$; położywſzy tedy zamiaſt x i y takowe wártości w zrównaniu $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, albo $aayy = bb(ax + xx)$, po uczynionych zebraniach, będzie $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$; ſkąd pokazuie ſię, że z hiperbolą nietak ma ſię rzecz iak z Ellipſą; bo w niéy zrównanie należące do drugiéy oſi, nieieſt podobne zrównaniu należącemu do piérwſzéy czyli do główněy oſi.

271. Naoſtatek żeby mieć zrównanie względém oſi AB, rachuiąc odcinki od śrzodka C; oznaczmy CP przez z, a mieć będziém $z = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$; a zatém $x = z - \frac{1}{2}a$; położywſzy tę wártość w zrównaniu $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, będzie $yy = \frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$, to ieſt zrównanie należące do główněy oſi, ale odcinki biorąc od śrzódka.

A zaś względém oſi, ieżeli oznaczymy CP' przez z', mieć będziém $z' = CD - DP' = \frac{1}{2}b - x'$, a zatém $x' = \frac{1}{2}b - z'$; położywſzy tę wártość w zrównaniu $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$, wyżéy wynalezioném względém drugiéy oſi (270), będzie $y'y' = \frac{aa}{bb}(z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

272. Gdybyśmy chcieli wyrazić ſtóſównie do śrzodka C, wártości linii PT, CT, PI, i PM, wyżéy wynalezione, nietrzebaby więcéy, tylko położyć w takowych wártościach zamiaſt x ilość $z - \frac{1}{2}a$, a naténczas będzie $PT = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}$, $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, $PI = \frac{bbz}{aa}$, $(TM)^2 = (\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{2}aa) \cdot \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$.

A ieżeli przedłużymy liniią MT, tak daleko aż ſię ſpotka z drugą oſią w punkcie T'; tróykąty ſobie podobne TPM, TCT', dadzą $TP : PM :: CT : CT'$; albo $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y :: \frac{\frac{1}{4}aa}{z} : CT' = \frac{\frac{1}{4}aay}{zz - \frac{1}{4}aa}$; lecz $zz - \frac{1}{4}aa = \frac{aayy}{bb}$; więc $CT' = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{(CD)^2}{MP} = \frac{(CD)^2}{CP'}$; więc $CP' : CD :: CD : CT'$.

273. Jeżeli przez śrzodek C hiperboli (fig. 33), poprowadzi ſię liniia proſta iakakolwiek MCM', kończąca ſię z obu końców na hiperboli, to takowa liniia nazywać ſię będzie fig. 33.

dzie *ſrzednicą* (diameter). Każda liniia mO, poprowadzona z punktu m hiperboli, równolegle ſtyczney MT, a kończąca ſię na ſrzednicy przedłużoney $M'M$, nazywa ſię *rzędną* należącą do tey ſrzednicy (ordinata); tey zaś odpowiadaiącémi odcinkami będą linije MO, i OM'. Teraz mamy okazać, że własności rzędnych mO należących do ſrzednic hiperboli, ſą też ſame co własności rzędnych MP należących do główney oſi.

Poprowadźmy z punktów m i O, liniie mp i OQ proſtopadłe na oś AB; z punktu m wyciągniymy liniią mS równoległą linii AP; natenczas oznaczywſzy MP przez y; CP przez z; Qp przez g; CQ przez k; mieć będziém $AP = CP - CA = z - \frac{1}{2}a$; $BP = CP + BC = z + \frac{1}{2}a$; $Ap = Cp - CA = CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a$; $Bp = Cp + BC = k - g + \frac{1}{2}a$.

Tróykąty ſobie podobne CPM, CQO, daią $CP : PM :: CQ : QO$, to ieſt, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$. Tróykąty znowu TPM, mSO, także ſobie podobne, daią $PT : PM :: mS$ albo $Qp : SO$; to ieſt (272), $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y :: g : SO = \frac{gyz}{zz - \frac{1}{4}aa}$; więc $mp = SQ = QO -$

SO

$SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; a że punkt m należy do hiperboli, więc podług (259) muſi bydź $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$; to ieſt $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}\right)^2 : yy :: (k - g - \frac{1}{2}a) \times (k - g + \frac{1}{2}a) : (z - \frac{1}{2}a) \times (z + \frac{1}{2}a)$, albo $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(zz - \frac{1}{4}aa)} + \frac{ggzzyy}{(zz - \frac{1}{4}aa)^2} : yy :: kk - 2kg + gg - \frac{1}{4}aa : zz - \frac{1}{4}aa$; więc rozmnożywſzy wyrazy ſrzednie i ſkrayne, a oraz dawſzy baczenie na ilości rozmnożone i rozdzielone przez $zz - \frac{1}{4}aa$, iako też i na te co znaydować ſię będą rozmnożone i rozdzielone przez z, będzie $\frac{kkyy}{zz}(zz - \frac{1}{4}aa) - 2gkyy + \frac{ggzzyy}{zz - \frac{1}{4}aa} = kkyy - 2gkyy + ggyy - \frac{1}{4}aayy$, albo odprawiwſzy wſkazane działania w wyrazie $\frac{kkyy}{zz}(zz - \frac{1}{4}aa)$, i wyrzuciwſzy wyrazy $kkyy$ i $-2gkyy$ iako znayduiące ſię w obu częściach zrównania, nadto rozdzieliwſzy przez yy, będzie $-\frac{1}{4}\frac{aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$; zrównanie maiace nam ſłużyć do okazania własności o którą rzecz idzie: ale wprzód uważmy, że ieżeli po obu ſtronach ſrzodka C, weźmie ſię na oſi AB część CR, któraby była ſrzednią proporcyonalną między BP i AP, to ieſt taką, ażeby było $(CR)^2 = AP \times PB = zz - \frac{1}{4}aa$, i ieżeli podnióſłſzy proſtopadłą RN, kończącą ſię w N' przez liniią NN' poprowadzoną przez ſrzodek C, równolegle linii TM, ieżeli mówię zrobi ſię $CN = CN'$, to natenczas liniia NN' nazywać ſię będzie *ſrzednicą doſtawną* (diameter conjugata), ſrzednicy MM'; nazywa ſię zaś

pali,

palirzędną śrzednicy MM' trzecia proporcyonalna liniόm MM' i NN'.

Powróćmy teráz do nafzéy rzeczy; iznaczmy fobie CM przez $\frac{1}{2}a$; CN albo CN' przez $\frac{1}{2}b$; CO przez z'; a zaś Om przez y'. Tróykąty fobie podobne CPM, CQO, daią $CM : CP :: CO : CQ$; to ieft $\frac{1}{2}a' : z :: z' : k$, więc $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$.

Tróykąty mSO i $CN'R$ także podobne fobie z przyczyny boków równoległych, daią $CN' : CR :: mO : mS$, albo $\frac{1}{2}b : CR :: y' : g$; więc $g = \frac{CR \times y'}{\frac{1}{2}b'}$, a zatém $gg = \frac{CR^2 \times y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$, albo ponieważ zrobiło fię $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$, będzie $gg = \frac{y'y'(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Połóżmy teráz w zrównaniu wyżéy wynalezioném $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, zamiaft gg i kk wártości ich dopiéro wynalezione, a mieć będziém, $-\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'(zz - \frac{1}{4}aa)} = \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{1}{4}aa$, albo (po zebraniu a potém po rozdzieleniu przez $\frac{1}{4}aa$), $\frac{-z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - 1$, albo po odprawiéniu zwyczaynych działań, $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; zrównanie podobne do owego króre mieliśmy względém głównéy ofi.

274. Jeżeli zrobimy $y' = 0$, znaydziémy bydź $z'z' - \frac{1}{4}a'a' = 0$, fkąd

fkąd wyciąga fię $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; więc hiperbola fpotyka fię z liniią MM', w dwóch punktach M i M' naprzeciw fobie położonych, każdy z nich oddalony będąc od śrzodka na ilość $\frac{1}{2}a$, albo o CM; co znać daie, że wfzyftkie śrzednice przecinaią fię w śrzodku na dwie równe części.

275. Zrównanie $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} \cdot (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, daiące $y' = \pm \frac{b'}{a'} \cdot \sqrt{(z'z' - \frac{1}{4}a'a')}$, to ieft dwie wártości równe, tylko poprzédzone znakami przeciwnémi, okazuie, że przedłużywfzy liniią mO, tak ażeby $Om' = Om$ punkt m' należyć będzie do hiperboli; więc każda śrzednica MM'; przecina liniie równoległe ftycznéy, przechodzącéy przez początek M téyże śrzednicy, na dwie części równe.

276. Toż zrównanie daie iefzcze $a'a'y'y' = b'b' (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; fkąd wnofi fię $y'y' : z'z' - \frac{1}{4}a'a' :: b'b' : a'a'$, albo $(mO)^2 : MO \times OM' :: (NN')^2 : (MM')^2$; to ieft że: *kwadrat rzędnéy któréykolwiek* mO, *należącéy do śrzednicy kończącéy fię na hi-*

hiperboli, ma ſię do mnogości z dwóch odpowiadaiących odcinków MO X OM, iak ſię ma kwadrat średnicy doſtawnéy, do kwadratu pierwſzéy średnicy.

277. Jeżeli ze śrzodka C ſpuści ſię na liniią TM proſtopadła CF, to tróykąty CFT TPM ſobie podobne, dadzą $TM, : PM :: CT : CF$, a zatém będzie $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Tróykąty zaś znowu CRN', TPM także ſobie podobne, dadzą $PT : TM :: CR : CN'$ albo CN; więc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; więc $CF \times CN = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, albo ſkwadrówawſzy, $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; a że mamy $(PM)^2 = yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$; $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$ (273); i (272) $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$; $(PT)^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$; więc położywſzy te wártości zamiaſt linii, i po uczynioném zebraniu, będzie $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{1}{16}aabb$, albo $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$. A ieżeli przedłuży ſię MT aż do końcotycznéy w I, liniia MI będzie równa linii CN, iak zobaczymy niżéy, a zatém $CIMN$ będzie równoległobok, maiący powiérſzchnią ſwoię $= CF \times MI = CF \times CN$; więc punkt M niechay będzie położony gdzie chce, to równoległobok $CIMN$, zawſze równać ſię będzie w powiérſzchni, równoległobokowi zrobionemu z dwóch półoſiów; to ieſt będzie $= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab$.

278. Tróykąty ſobie podobne TPM i CRN' daią $TP : PM :: CR : RN'$, więc $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, a zaś $(RN')^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2} = \frac{bbzz}{aa}$, położywſzy zamiaſt linii ich wártości Algebraiczne i uczyniwſzy zebranie. Lecz znowu tróykąty proſtokątne CPM i CRN' daią $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$, a zaś $(CN')^2$ albo $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$; więc $(CM)^2 - (CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 - (CR)^2 - (RN')^2$; położywſzy w drugiéy części tego zrównania zamiaſt linii, ich wártości Algebraiczne wyżéy wynalezione, i uczyniwſzy zebranie, będzie $(CM)^2 - (CN)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; to ieſt, *że różnica między kwadratami dwóch pół śrzednic doſtawnych którychkolwiek, ieſt zawſze taż ſama, i równa różnicy między kwadratami dwóch półoſiów.*

Stąd wynika, że w hiperboli równoramiennéy, **każda śrzednica ieſt równa ſwoiéy** *hiperboli, ma ſię do mnogości z dwóch odpowiadaiących odcinków* MO X OM; *iak ſię ma kwadrat śrzednicy doſtawnéy, do kwadratu pierwſzéy śrzednicy.*

277. Jeżeli ze śrzodka C ſpuści ſię na liniią TM proſtopadła CF, to tróykąty CFT TPM ſobie podobne, dadzą $TM, : PM :: CT : CF$, a zatém będzie $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Tróykąty zaś znowu CRN' TPM także ſobie podobne, dadzą $PT : TM :: CR : CN'$ albo CN; więc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; więc $CF \times CN = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, albo ſkwadrówawſzy, $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; a że mamy $(PM)^2 = yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$; $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$ (273); i (272) $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$; $(PT)^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$; więc położywſzy te wártości zamiaſt linii, i po uczynionéм zebraniu, będzie $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{1}{16}aabb$, albo $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$. A ieżeli przedłu-

dłuży ſię MT aż do końcotyczney w I, liniia MI będzie równa linii CN, iak zobaczymy niżéy, a zatém $CIMN$ będzie równoległobok, maiący powiérſzchnią ſwoię $= CF \times MI = CF \times CN$; więc punkt M niechay będzie położony gdzie chce, to równoległobok $CIMN$, zawſze równać ſię będzie w powiérſzchni, równoległobokowi zrobionemu z dwóch półoſiów; to ieſt będzie $= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab$.

278. Tróykąty ſobie podobne TPM i CRN' daią $TP : PM :: CR : RN'$, więc $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, a zaś $(RN')^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2} = \frac{bbzz}{aa}$, położywſzy zamiaſt linii ich wártości Algebraiczne i uczyniwſzy zebranie. Lecz znowu tróykąty proſtokątne CPM i CRN' daią $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$, a zaś $(CN')^2$ albo $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$; więc $(CM)^2 - (CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 - (CR)^2 - (RN')^2$; położywſzy w drugiéy części tego zrównania zamiaſt linii, ich wártości Algebraiczne wyżéy wynalezione, i uczyniwſzy zebranie, będzie $(CM)^2 - (CN)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; to ieſt, że *różnica między kwadratami dwóch pół śrzednic doſtawnych ktòrychkolwiek, ieſt zawſze taż ſama, i ròwna różnicy między kwadratami dwóch pòłoſiów.*

Stąd wynika, że w hiperboli równoramienney, każda śrzednica ieſt równa ſwoiéy

iéy doftawnéy; bo ieżeli $a = b$, to będzie $(CM)^2 - (CN)^2 = 0$, a zatém $CM = CN$.

279. Jeżeli w zrównaniu $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$ położą się zamiaft linii CR i RN' ich wártości Algebraiczne, to będzie $(CN)^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$; lecz znalezliśmy wyżéy (272), $(TM)^2 = (\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa)$. $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$; więc będzie $(TM)^2 = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz} \times (CN)^2$; lecz znowu tróykąty fobie podobne MPT i $MP'T'$ po fkwadrówaniu daią, $(PT)^2 : (TM)^2 :: (P'M)^2 : (T'M)^2$, albo $\frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz} : \frac{(CN)^2 \times (zz - \frac{1}{4}aa)}{zz} :: zz : (T'M)^2$; więc $(T'M)^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{zz - \frac{1}{4}aa}$; więc $(TM)^2 \times (T'M)^2 = (CN)^4$, albo $TM \times T'M = (CN)^2$; ieżeli zaś oznaczymy przez p' palirzędną śrzednicy MM' to mieć będziém $2CM : 2CN :: 2CN : p'$ a zatém będzie $2p' \times CM = 4(CN)^2$, albo $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; więc $TM \times T'M = \frac{1}{2}p' \times CM$, fkąd wnofi się ta proporcya, $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

280. Stąd można fobie wnieść fpofób naftępuiący, do znaleziénia ofiów hiperboli, a zatém i do wykryślenia iéy, niémaiąc więcéy nic wiadomego tylko dwie śrzednice doftawne, i kąt iaki czyni iedna z drugą.

fig. 34. Trzeba wziąść na linii MC (fig. 34), liniią $MH = \frac{1}{2}p'$, i ze śrzodka I odległości CH fpuścić proftopadłą IR, która w iakowym punkcie R przetnie liniią MT', poprowadzoną przez punkt M równolegle śrzednicy doftawnéy NN'. Z tego punktu R iako ze śrzodka, promiéniém równym odległości wziętéy od R do C, ryfuie się koło, które fpotka się z liniią MT w dwóch punktach T i T'; przez nie tedy i przez śrzodek C poprowadziwfzy dwie linie TC i CT', takowe, dadzą kierunki ofiów. Albowiem iawna ieft rzecz że kąt TCT' będzie profty, bo okrąg przechodzi przez punkt C i ma za śrzednicę liniią TT'. zreſztą z natury koła, podług (Jeom. 120), wynika ta proporcya, $CM : TM :: T'M : MH$; więc kiedy zrobiło się $MH = \frac{1}{2}p'$, musi bydź $CM : TM :: T'M : p'$.

Wynalazłfzy tym fpofobém kierunki ofiów, wynaydzie się także ich wielkość, fpuściwfzy z punktu M, proftopadłe MP, MP' i zrobiwfzy liniią CA, równą śrzedniéy proporcyonalnéy między CP i CT; a liniią CD' równą śrzedniéy proporcyonalnéy między CP' i CT'; wynika to z famych wyrażeń linii CT i CT' wyżéy wynalezionych (272.)

Kiedy dwie śrzednice doftawne wiadome, fą fobie równe, to natenczas palirzędna wypada im równa, przez co ftaie się $MH = MC$; w takim razie, ponieważ dwa punkta przecięciów H i C przypadaią w iednymże punkcie, więc liniia MC ieft ftyczną koła; a zatém żeby mieć śrzodek R, nietrzeba więcéy, tylko na linii CM poftawić proftopadłą w punkcie C.

O Hiperboli między Końcotycznémi.

281. Hiperbola uważana ftófównie do fwoich końcotycznych, ma pewne własności, których wiadomość może bydź pożyteczna; dla tego tu zaftanowimy się nad niémi.

mi. (Zob. l. 266. iak wynayduią się końcotyczne).

Naprzód uważać będziémy każdy punkt E hiperboli (fig. 35), względém dwóch końcotycznych CLO, $CL'o$, poprowadziwszy linią EQ równoległą iednéy z nich; a dopiéro szukać będziémy stósunku między liniiami EQ i CQ.

Żeby wynaléśdź takowy stósunek, poprowadźmy przez którykolwiek punkt E liniią OEo, równoległą drugiéy osi DD' i liniią ES, równoległą linii CLO; przez wiérszchołek zaś A poprowadźmy liniią AG równoległą linii $CL'o$. Oznaczmy CA przez $\frac{1}{2}a$, CD albo AL albo AL' przez $\frac{1}{2}b$; CP przez z; PE przez y; AG przez m; GL przez n; CQ przez t; a QE przez u.

Natenczas, tróykąty sobie podobne CPO, CAL, dadzą $CA : AL :: CP : PO$, albo $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$ albo $a : b :: z : PO = Po = \frac{bz}{a}$; więc $Eo = \frac{bz}{a} - y$, a $Eo = \frac{bz}{a} + y$, a zatém $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy = \frac{1}{4}bb$, (położywszy zamiast yy wártość onego $\frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$ i uczyniwszy zebranie); to iest, że $EO \times Eo = (CD)^2 = (AL)^2$; własność należąca do każdego punktu hiperboli; ponieważ punkt E był obrany podług upodobania.

282. Tróykąty QEO, ESo i AGL sobie podobne; daią $AL : AG :: EO : EQ$, i $AL : GL :: Eo : ES$, więc rozmnożywszy porządkiém te dwie proporcye, żeby w nie wprowadzić to wyrażenie $EO \times Eo$, którego mamy wártość, będzie $(AL)^2 : AG \times GL :: EO \times Eo : EQ \times ES$; to iest, $\frac{1}{4}bb : mn :: \frac{1}{4}bb : ut$; więc $ut = mn$; zrównanie należące do hiperboli, uważanéy między swémi końcotycznémi. A tak w każdym którymkolwiek punkcie E hiperboli, zawsze iest $EQ \times ES$ albo raczéy $EQ \times CQ = AG \times GL$.

Teráz przypuściwszy że punkt E przypada na punkt A, to CQ odmiéni się w CG, a QE w AG; będzie tedy $CG \times AG = AG \times GL$; więc $CG = GL$. Lecz ponieważ tym sposobém punkt G staie się śrzodkiém linii CL, więc musi bydź $CG = AG = GL$; bo koło opisane na linii CL iako na śrzednicy, a zatém maiące za promién liniią CG, przechodziłoby przez punkt A, z przyczyny kąta prostego A; iest tedy $m = n$, a zatém $ut = m^2 = (CG)^2$.

Takowy nieodmiénny kwadrat m^2 albo $(CG)^2$, któremu zawsze równa się mnogość ut albo $CQ \times QS$, nazywa się *stopniém* hiperboli (potentia).

283. Z własności dopiéro okazanéy, można można sobie wniéść tę drugą: Ze *z któregokolwiek bądź punktu* E *hiperboli, poprowadziwszy li-*

 niią

niią proſtą RE*r*, *opiéraiącą ſię na kóńcotycznych, części* RE, mr, *zachwycone między hiperbolą i kóńcotycznémi ſą ſobie równe.*

Albowiém ieżeli przez punkt *m* poprowadzi ſię liniia *hm H*, równoległa linii *OEo*, tróykąty ſobie podobne *REO*, i *RmH*, daią $ER : Rm :: EO : HM$; a znowu tróykąty *rhm* i *roE* także ſobie podobne, daią $Er : mr :: Eo : mh$; rozmnożywſzy porządkiém te dwie proporcye, będzie $ER \times Er : Rm \times mr :: EO \times Eo : Hm \times mh$; lecz każda z tych dwóch mnogościów $EO \times Eo$ i $Hm \times hm$, równa ſię kwadratowi $(CD)^2$ (282); więc muſi bydź $ER \times Er = Rm \times mr$, albo $ER \times (Em + mr) = (ER + Em) \times mr$; odprawiwſzy wſkazane mnożenia, i wyrzuciwſzy z obu części zrównania, ilość $ER \times mr$, będzie $ER \times Em = Em \times mr$; więc $ER = mr$.

284. A ſtąd należy ſobie wnieść, że każda ſtyczna *Tt* hiperboli, opiéraiąca ſię na kóńcotycznych, dzieli ſię na dwie równe części w punkcie dotknięcia *M*.

285. Jeżeli przez punkt *M* poprowadzi ſię liniia *IMi* równoległa linii *DD*; tudzież ieżeli znowu przez którykolwiek punkt *E* poprowadzi ſię inna liniia *REr* równoległa ſtyczney *Tt*, to tróykąty *TMI*, *REO* ſobie podobne, dadzą $TM : MI :: RE : EO$; a tróykąty znowu *Mit*, *Eor*, także podobne ſobie, dadzą *Mt* albo $TM : Mi :: Er : Eo$; rozmnożywſzy zaś porządkiém te dwie proporcye, będzie $(TM)^2 : MI \times Mi :: RE \times Er : EO \times Eo$; lecz każda z dwóch mnogościów $MI \times Mi$ i $EO \times Eo$, równa ſię kwadratowi $(CD)^2$; więc $(TM)^2 = RE \times Er$.

286. Jeżeli ze śrzodka *C* poprowadzi ſię śrzednica *CMV*, takowa rozdzieli na dwie równe części liniią *Rr*, równoległą linii *Tt*; z przyczyny (284) że przechodzi przez śrzódek *M* linii *Tt*; więc oznaczywſzy *CM* przez $\frac{1}{2}a'$; *TM* przez $\frac{1}{2}q$; *CV* przez z'; rzędną *VE* przez y'; tróykąty *CMT*, *CVR* podobne ſobie, dadzą $CM : MT :: CV : VR$; to ieſt, $\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}q$, albo $a' : q :: z' : VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; więc $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, a $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$; a ponieważ $RE \times Er = (TM)^2 = \frac{1}{4}qq$; więc będzie $\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; lecz znowu (273) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; więc używſzy téy wártości, będzie $\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$, albo $(qq - b'b') = \frac{z'z'}{a'a'} \cdot \frac{1}{4}(qq - b'b')$, albo $(qq - b'b')\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}(qq - b'b') = 0$;

$=0$; albo $(qq-b'b')\left(\frac{z'z'}{a'a'}-\frac{1}{4}\right)=0$; a rozdzieliwſzy przez $\frac{z'z'}{a'a'}-\frac{1}{4}$, będzie $qq-b'b'=0$; ſkąd wyciąga ſię $q=b'$, albo $\frac{1}{2}q=\frac{1}{2}b'$, to ieſt $MT=CN$, gdzie przez CN rozumié ſię połowa śrzednicy doſtawnéy do śrzednicy CM, I to ieſt, co obiecaliśmy oka-
fig. 33. zać (277). Będzie tedy w fig. 33. $MI=CN$.

287. A zatém każdéy linii proſtéy
fig. 35. REr, równoległéy śrzednicy doſtawnéy CN (fig. 35) ſłużyć będzie to zrównanie $RE \times Er = (CN)^2$.

288. Stąd pokazuie ſię, że maiąc wiadome dwie półśrzednice doſtawne CM, CN
fig. 36. (fig. 36), i kąt iaki między ſobą czynią, bardzo łatwo będzie można nakryślić hiperbolę, przez punkta koléyno wynalezione. Jakóż z tego co ſię powiedziało (284 i 286), iawna ieſt, że poprowadziwſzy przez początek M śrzednicy CM liniią TMt, równoległą linii CN, i wytknąwſzy na obie ſtrony punktu M, części MT, Mt, każdą równą linii CN; ieżeli przez śrzodek C poprowadzą ſię liniie CT i Ct, takowe będą kóńcotycznémi hiperboli. Stąd zaś co ſię dowiodło (283), pokazuie ſię, że ieżeli przez punkt M poprowadzi ſię do woli, tak wiele linii proſtych PMQ, PMQ, ile ſię ſpodoba, i ieżeli na każdéy zrobi ſię $PO=MQ$, to punkta O tym ſpoſobém, wynalezione, wſzyſtkie należyć będą do hiperboli ſzukanéy. Tych wynalezionych punktów

któw O można téż potém użyć, do wynaleziénia znowu innych, takich iak ſą V, V i. t. d. poprowadziwſzy liniie proſte ROS, ROS i.t.d. i zrobiwſzy $SV=RO$.

289. Stąd także pokazuie ſię, iako między dwiéma liniiami danémi na kóńcotyczne, można wykryślić hiperbolę, któraby przechodziła przez punkt zadany między témiż liniiami.

290. Naoſtatek, przedzieliwſzy kąt kóńcotycznych, i onego ſpełniénie, każdy na dwie równe części, wypadną kierónki dwóch oſiów, których wiélkość wynaydzie ſię, podług tego co ſię rzekło (280); a to ieſt drugi ſpoſób rozwiązania tego zagadniénia, o którém rzecz była na tamtém miéyſcu.

O Paraboli.

291. Teráz mamy zaſtanowić ſię nad własnościami takiéy linii krzywéy, któréyby każdy punkt, był równo oddalony tak od punktu fig. 37.
ſtałego F (fig. 37), iako téż od linii proſtéy XZ, wiadoméy z położenia; to ieſt takiéy, ażeby z każdego i iakiegokolwiek punktu M ſpuściwſzy proſtopadłą MH, zawſze było $FM = MH$.

Z punktu F, poprowadźmy liniią FV proſtopadłą na XZ, i przedziélmy FV na dwie równe części w A; to A będzie punktém linii krzywéy, z przyczyny że $AV=AF$; takowy

kowy punkt A nażywa ſię *wier-ſzchołkiém.*

Zeby tedy wynaleśdź własności téy linii, którą nazywaią *Parabolą*, trzeba nam poſzukać zrównania wyrażaiącego ſtóſunek między proſtopadłémi MP ſpuſzczonémi na linią FV, i ich odległościami AP od punktu A. Tym umyſłém oznaczywſzy AV albo AF przez c; AP przez x; PM przez y; miéć będziém $VP = AV + AP = c + x = MH$; a ponieważ $MF = MH$, więc także $MF = c + x$; nadto będzie $FP = AP - AF = x - c$; tróykąt zaś proſtokątny FPM, daie $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$; więc $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; więc po przeſtawiéniu i po zebraniu, będzie $yy = 4cx$; takie tedy ieſt zrównanie należące do Paraboli, zobaczmy czego nas uczy.

1[ód] Z tego zrównania wyciąga ſię $y = \pm\sqrt{(4cx)}$; więc każdéy ilości x albo AP, odpowiadaią dwie wártości równe, ilości y albo PM; ale że iedna z nich ieſt twiérdząca a druga przécząca, więc te liniie przypadaią z przeciwnych ſtrón linii nieokréſlonéy API, która nazywa ſię *oſią*

(axis); to ieſt, że takowémi liniiami ſą PM i PM'. Parabola tedy ma dwa ramióna AM i AM' doſkonale ſobie rowne i rościągaiące ſię bez końca; albowiém iawna ieſt, że im bardziéy x pomnażać ſię będzie, tém *téż* bardziéy wártość $\sqrt{(4cx)}$ a zatém i y róść będzie.

2[re] Jeżeli x zrobimy ilością przéczącą, to miéć będziém $y = \pm\sqrt{(-4cx)}$, to ieſt wártość zmyśloną; co znać daie, że liniia krzywa nierościąga ſię nad punkt A.

3[cie] Jeżeli zrobimy $x = c$, żeby miéć rzędną przechodzącą przez punkt F, nazywaiący ſię *śrzódpałém* (focus), to miéć będziém $y = \pm\sqrt{(4cc)} = \pm 2c$; to ieſt że $Fm'' = 2c$; więc $m'm'' = 4c$. Takowa liniia $m''m'''$ przechodząca przez śrzódpáł, nazywa ſię *palirzędną* oſi paraboliczněy C (parameter). A tak *palirzędna oſi paraboliczněy, ieſt cztéry razy tak wielka, iak odległość* AF *od wiérſzchołka do śrzódpału.*

4[te] A zatém oznaczywſzy przez p takową palirzędną, będzie $4c = p$, i zrównanie należące do paraboli odmiéni ſię w to, $yy = px$.

292. Maiąc zrównanie odpowiadaiące paraboli, nietrudno ią będzie sobie wykryślić przez punkta koléyno powynaydówane, naznaczaiąc głosce x różne wartości, i rachuiąc odpowiadaiące każdéy z nich, wartości głoski y.

293. Można téż ieszcze wykryślić Parabolę w ten drugi sposób następuiący: Obrawszy sobie punkt A na wierszchołek, i liniią TVI na kierónek osi, wznaczaią się na niéy części AV, AF każda $= \frac{1}{4}p$; punkt F będzie śrzodpałém; dopiéro z wszystkich punktów osi stawiaią się prostopadłe nieokréślone MM; i narysowawszy z punktu F iako śrzódka, odległością VP iako promiéniém, dwa łuczki przecinaiące każdą prostopadłą w dwóch punktach M i M, te punkta należyć będą do paraboli; ponieważ liniia FM, ktora tym sposobém robi się równa linii VP będzie równa linii MH, zmyśliwszy sobie liniią VH prostopadłą osi. Ta liniia XVH nazywa się *kierónkowa* (directrix).

294. Naostatek można ieszcze wykryślić parabolę iednym cięgiém, używszy do tego *węgielnicy* VHf; to iest do któregokolwiek punktu f iednego z ramión téy węgielnicy, przywięzuie się ieden koniec nici tak długiéy iak iest liniia fH; a drugi koniec przywiązawszy do punktu F, przy pomocy ołówka M przyciska się część nici do ramiénia fH, i trzymaiąc nić zawsze wytężoną, drugie ramię węgielnicy suwa się w zdłuż linii ZX; w takowym ruchu ołówek M wykryśli parabolę MA.

295. Zrównanie $yy = px$, znać daie, że względém każdego i iakiegokolwiek punktu M, *kwadrat rzędnéy* MP, *równa się mnogości, powstaiącéy z odpowiadaiącego odcinka, rozmnożonego przez palirzędną.*

Z tegoż zrównania pokazuie się, że *kwadraty* yy *rzędnych, są między sobą iak odcinki* x, to iest, że $(PM)^2 : (pm)^2 :: AP : Ap$; albowiém $(PM)^2 = p \times AP$, a $(pm)^2 = p \times \forall p$; więc $(PM)^2 : (pm)^2 :: p \times AP : p \times Ap :: AP : \forall p$, rozdzieliwszy przez p.

Zrównanie należące do Ellipsy, wyżéy wynalezione, iest $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$; w którém ieżeli zmyślimy sobie oś a bydź nieskończoną, to trzeba z niego wyrzucić xx, iako ilość niémogącą zmniéyszyć ilości ax; toż rozumie się o ilości $4cc$ względém $4ac$, a w takim razie zrównanie poprzédzaiące, przemieni się na to, $yy = \frac{4a \times ax}{aa} = \frac{4a^2cx}{aa}$, to iest $yy = 4cx$; takie zaś wyrażenie należy do paraboli; więc *parabola nieiest co innego, tylko Ellipsa maiąca oś nieskończoną.*

296 Jeżeli złączywszy punkta F i H przez liniią FH, poprowadzi się na tę liniią prostopadła MOT z punktu M, to takowa prostopadła będzie styczną paraboli.

Jakóż, z innego punktu iakiegokolwiek N téyżé linii, poprowadźmy linie NF, NH i NZ prostopadłą

dłą na XZ; żeby takowy inny iakikolwiek punkt N mógł należyć do paraboli, trzebaby aby było $NF = NZ$; lecz liniia NZ ieſt mnieyſza od NH, która podług wykryślenia równa ſię linii NF, więc t. d.

297. Ponieważ podług tegóż poprzedzaiącego wykryślenia, kąt FMO ieſt równy kątowi OMH, a ten znowu równy ſwému przeciwnemu w wiérſzchołku fMN, przeto wynika ſtąd, że kąt FMO ieſt równy kątowi fMN.

Więc promiénie światłe wynikaiące z punktu F, i padaiące na wklękłość MAM' obiiaią ſię wſzyſtkie w kierónku równoległym oſi; i odwrotnie, promiénie wpadaiące w parabolę w kierónku równoległym oſi, wſzyſtkie zbiégaią ſię z ſobą w śrzódpale F.

298. Ponieważ liniia MH ieſt równoległa linii VP, przeto tróykąty HOM, TOF ſą ſobie podobne, a nadto równe; bo $HO = OF$; więc $FT = MH = PV = x + c$; a zatém $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; więc *podtyczna* PT *paraboli, ieſt dwóynaſób tak wielka iak odcinek* AP.

299. Jeżeli w punkcie M, poſtawi ſię proſtopadła MI na ſtyczną MT, to tróykąty TPM, PMI podobne sobie, dadzą $TP : PM :: PM : PI$, to ieſt $2x : y :: y : PI = \frac{y^2}{2x}$, albo (z przyczyny że $y^2 = px$), $PI = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$. Więc *międzyległa, ieſt w paraboli względém wſzyſtkich punktów, zawſze taż ſama, i równa połowie palirzędnéy.*

300. Jawna tedy ieſt, że maiąc znaiomy odcinek i rzędną, odpowiadaiące iakiemukolwiek punktowi M paraboli, można zawſze bardzo łatwo wynaléśdź palirzędną. Albowiém zrobiwſzy $PT = 2AP$, liniia TM będzie ſtyczną (298); a na niéy w punkcié M poſtawiwſzy proſtopadłą MI, takowa na linii AP przedłużonéy, odznaczy (299) część PI, równaiącą ſię połowie palirzędnéy.

301. Każda liniia MX (fig. 38) poprowadzona z punktu M paraboli, równolegle z oſią AQ, nazywa ſię *śrzednicą*; każda śrzednica ma ſwoię *palirzędną*, (która powiedziawſzy w powſzechności) ieſt cztéry razy tak wielka, iak odległość ME, wzięta od początku śrzednicy do śrzódpału. Każda liniia mO poprowadzona z punktu m paraboli, równolegle ſtycznéy TM, przechodzącéy przez wiérſzchołek M czyli przez początek téy śrzednicy, nazywa ſię *rzędną* téyże fig. 38.

śrze-

śrzednicy. Zobaczymy zaraz, iż rzędne należące do iakiéykolwiek śrzednicy, maią też ſamę właſność, co rzędne należące do oſi.

Wyciągniymy rzędną PM, należącą do oſi, i przez punkta m i O poprowadźmy równoległe iéy mp, OQ, naoſtatek z punktu m poprowadźmy mS równoległą oſi. Oznaczmy AP przez x; PM przez y; Qp przez g; AQ przez k. Mieć będziém naprzód, $Ap = k - g$; a potém tróykąty TPM, mSO, podobne ſobie, daią $TP : PM :: mS : SO$; to ieſt $2x : y :: g : SO = \frac{gy}{2x}$; więc $pm = QS = QO - SO = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$; a że punkt m należy do paraboli, więc podług (295) muſi bydź $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap : AP$; to ieſt, $\left(y - \frac{gy}{2x}\right)^2 : yy :: k - g : x$, albo $yy - \frac{2gyy}{2x} + \frac{ggyy}{4xx} : yy :: k - g : x$; więc rozmnożywſzy wyrazy ſkrayne i śrzednie, będzie $xyy - gyy + \frac{ggyy}{4x} = kyy - gyy$, co (po rozdzieleniu przez yy, i po wyrzuceniu wyrazów iednakowych z obu części zrównania) wychodzi na $x + \frac{gg}{4x} = k$, albo $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Teráz oznaczmy ſobie odcinek MO przez x'; a rzędną mO przez y'; mieć będziém $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; więc $x' = k - x$; a zatém $\frac{gg}{4x} = x'$; albo $gg = 4xx'$; tróykąt zaś proſtokątny mSO, daie $(mS)^2 + (SO)^2 = (mO)^2$; to ieſt, $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$. Położywſzy tedy zamiaſt gg, wártość onego $4xx'$, i zamiaſt yy, wártość iego px, po uczynioném zebraniu, będzie $4xx' + px' = y'y'$ albo $(4x + p)\, x' = y'y'$ Ale ieżeli oznaczymy przez p', palirzędną należącą do śrzednicy MX, to będzie $p' = 4 \cdot FM = 4x + 4c = 4x + p$; więc naoſtatek będzie $p'x' = y'y'$ Zrównanie tedy należące do iakiéykolwiek śrzednicy, ieſt toż ſamo, co zrównanie należące do oſi. Więc, *kwadrat rzędnéy* mO *należącéy do iakiéykolwiek śrzednicy* MX, *równa ſię mnogości, wynikaiącéy z odcinka, rozmnożonego przez palirzędną téyże śrzednicy; i kwadraty rzędnych, należących do iakiéykolwiek śrzednicy paraboli, maią ſię między ſobą, iak odcinki odpowiadaiące.*

302. Z tego wſzyſtkiego co poprzédziło, wynika, że chcąc wykryślić parabolę, którąby miała za śrzednicę liniią nieokréśloną MX, a liniią zadaną p' za palirzędną téyże śrzednicy, i któréy rzędne czyniłyby z śrzednicą pewny kąt zadany: trzeba przez początek M wyciągnąć liniią NMT, czyniącą z liniią MX kąt NMX, równy kątowi zadanému. Potém przez tenże punkt M poprowadzi ſię liniia ME, czyniąca z drugiéy ſtrony z liniią MT kąt EMT, równy kątowi NMX; natenczas zrobiwſzy $ME = \frac{1}{4}p'$, punkt E, będzie śrzódpałem paraboli (297, 301); a zatém poprowadziwſzy przez punkt E liniią nieokréśloną TEQ, równoległą śrzednicy MX, i któraby ſpotkała ſię z liniią TM w T, takowa, pokaże kierónek oſi; wiérſzchołek zaś A téy oſi, wynaydzie ſię, poſtawiwſzy proſtopadłą MP, i rozdzieliwſzy PT na dwie równe części

w

w punkcie *A* (298). A tak maiąc śrzodek i wiérſzchołek, łatwo będzie wykryślić żądaną parabolę (293, i 294).

303. Trzy linie krzywe, nad któremi dotąd zaſtanawialiśmy ſię z kolei, nazwane ſą *Przecięciami* albo *Przecinkami ſtożkowémi* (ſectiones conicæ), bo powſtaią z przecięcia ſtożka. *Np.* wypadnie Ellipſa
fig. 39. *AMmB* (fig. 39), ieżeli przetnie ſię ſtożek *CHI* przez płaſzczyznę *AMm*, tak, ażeby ta płaſzczyzna ſpotykała ſię z dwoma bokami *CH*, *CI* poniżey wiérſzchołka *C*; trzeba tu tylko wyłączyć ieden przypadek, to ieſt, kiedyby ta płaſzczyzna czyniła z bokiém *CI* tenże ſam kąt, który czyni drugi bok *CH* z podſtawą; bo z takowego przecięcia powſtawałoby koło.

Przeciwnym ſpoſobém, ieżeli płaſzczyzna przecinaiąca, nie ſpotka ſię z iednym z boków *CH*, tylko aż dopiéro w przedłużeniu onego, to natenczas wypada hiperbola *AMm*
fig. 40. (fig. 40).

Naoſtatek, ieżeli płaſzczyzna przecinaiąca ieſt równoległa iednemu z boków ſtożka *CH*, to przecię-

cie da parabolę (fig. 41); co tak ſię dowodzi. fig. 41.

Zmyślmy ſobie ſtożek *CHI* (fig. 39 i 40), przecięty przez płaſzczyznę; któraby przechodziła przez linią proſtą, łączącą wiérſzchołek *C* i śrzodek koła ſłużącego za podſtawę; to ieſt, przez płaſzczyznę, przechodzącą przez oś ſtożka; takowe przecięcie uczyni tróykąt. Przetniymy teraz ſtożek przez trzy płaſzczyzny *AMm*, *FMG*, *HmI*, proſtopadłe temu tróykątowi, i z którychby dwie oſtatnie były równoległe podſtawie ſtożka. Dwa przecięcia *FMG*, *HmI*, będą kołami (Jeom. 199); które ſpotykać ſię będą z przecięciém *AMm* w punktach *M* i *m*. Przecięcia *FG*, *HI* płaſzczyzn tych kół, z tróykątém przechodzącym przez oś, będą śrzednicami tychże kół. Przecięcia *PM*, *pm* tych kół z płaſzczyzną *AMm*, podług (Jeom. 190) będą proſtopadłe płaſzczyznie tróykąta, przechodzącego przez oś, i będą oraz rzędnémi należącémi do tychże kół, i do przecięcia *AMm*. fig. 39. i 40.

To założywſzy, tróykąty *APG*, *ApI* podobne ſobie, daią $AP : Ap :: PG : pI$; iako też tróykąty *BFP*, *BHp* także podobne ſobie, daią $PB : pB :: FP : Hp$; rozmnożywſzy porządkiém te dwie proporcye, będzie $AP \times PB : Ap \times pB :: FP \times PG : Hp \times pI$; lecz znowu z natury koła, mamy $FP \times PG = (PM)^2$, i $Hp \times pI = (pm)^2$; więc $AP \times PB : Ap \times pB :: (PM)^2 : (pm)^2$; więc kwadraty rzędnych należących do przecięcia *AMm*, maią ſię między ſobą, iak mnogości z odcinków; że zaś takowe odcinki przypadaią z dwóch ſtrón rzędnéy w fig. 39, a w fig. 40 przypadaią tylko z iednéy ſtrony, więc lini- fig. 40.

fig. 39. ia AMm (fig. 39) ieſt ellipſa, a linia AMm fig. 40. w fig. 40 ieſt hiperbola.

Co ſię tyczé fig. 41, przypuściwſzy też ſame zaſady co wyżéy, z natury koła miéć będziém $(PM)^2 = FP \times PG$, i $(pm)^2 = Hp \times pI$, albo (z przyczyny równoległych Pp, FH, i FP, Hp, które daią $FP = Hp$), będzie $(pm)^2 = FP \times pI$; więc $(PM)^2 : (pm)^2 :: FP \times PG : FP \times pI :: PG : pI :: AP : Ap$, z przyczyny tróykątów APG, ApI, ſobie podobnych; więc kwadraty rzędnych, maią ſię między ſobą iak odcinki; więc linia krzywa, ieſt parabola.

Uwagi nad Zrównaniami należącémi do Przecinków ſtożkowych.

304. Stąd, co ſię dowiodło wyżéy (245), naſtępuie, że ieżeli w Ellipſie, oznaczymy przez x, odcinek CO (fig. 30) wzięty od śrzodka na śrzednicy MM' a przez y rzędną mO równoległą śrzednicy doſtawnéy CN, to miéć będziém $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, na zrównanie należące do téy śrzednicy, niechayby bądź iakie chce czyniły między ſobą kąty, te śrzednice doſtawne. A ieżeli przez punkt m, poprowadzi ſię linia mO' równoległa linii MM' która w takim razie będzie rzędną należącą do śrzednicy NN' to oznaczywſzy CO' przez x', a zaś mO' przez y', miéć będziém

fig. 30.

$y = x'$ i $x = y'$; przez co poprzédzaiące zrównanie, odmiéni ſię w to, $x'x' = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - y'y')$, a z niego wyciąga ſię $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb - x'x')$. To ieſt, że rachuiąc odcinki od śrzodka, zrównanie należące do iakiéykolwiek śrzednicy, ieſt zawſze iednakowéy poſtaci, byléby rzędne brały ſię równoległe śrzednicy doſtawnéy.

Jeżeli b równa ſię ilości a, to zrównanie przemiéni ſię w takie, $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, które należy do koła, iak widzieliśmy wyżéy (221). Ale trzeba dobrze uważyć, że to rozumié ſię w tenczas, kiedy rzędne ſą proſtopadłe śrzednicy. Bo ieżeliby czyniły iakikolwiek inny kąt a nie proſty, to zrównanie $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, należałoby do ellipſy, uważonéy względém śrzednic doſtawnych, kiedy ſą ſobie równe.

Co ſię tyczé hiperboli, ieżeli oznaczymy przez x, odcinek CO (fig. 33) wzięty od śrzodka śrzednicy MM', kończącéy ſię na krzywości téyże hiperboli, a przez y, rzędną mO' równoległą śrzednicy doſtawnéy NN'; miéć będziém (273), $yy = \frac{bb}{aa} \times (xx - \frac{1}{4}aa)$ fig. 33.

na zrównanie należące do téy śrzednicy, niechby był kąt iaki chce, który czynią między sobą dwie śrzednice dostawne. Ale, ieżeli poprowadziwszy przez punkt m' linią $m'O'$ równoległą śrzednicy CM, oznaczymy liniią $m'O'$ przez y', która w tym razie iest rzędną należącą do śrzednicy NN' a odcinek CO' ieżeli oznaczymy przez x', mieć będziém $x' = y$ i $y' = x$; przez co poprzédzaiące zrównanie odmiéni się w to, $x'x' = \frac{bb}{aa}(y'y' + \frac{1}{4}aa)$, skąd wyciąga się $y'y' = \frac{aa}{bb}(x'x' + \frac{1}{4}bb)$, i pokazuie się, że zrównanie należące do śrzednicy dostawnéy NN', nieiest podobne tamtemu, które wynalezliśmy względém śrzednicy MM' kończącéy się na hiperboli.

Co zaś do paraboli, widzieliśmy wyżéy (301), że biorąc odcinki na iąkiéykolwiek śrzednicy, od iéy początku, a rzędne, równoległe styczné, przystawionéy do wiérszchołku téyże śrzednicy, zrównanie zawsze wypada $yy = px$, oznaczywszy rzędną przez y, odcinek przez x, a palirzędną téy śrzednicy przez p.

Naostatek, co do hiperboli uważonéy względém swoich kóńcotycznych, rachuiąc odcinki od śrzodka, na iednéy z kóńcotycznych, a rzędne biorąc równoległe drugiéy kóńcotycznéy, oznaczywszy piérwsze przez x, drugie przez y, a stopień hiperboli uważonéy między kóńcotycznémi przez aa, będzie $xy = aa$.

305. Ale tu należy dobrze uważyć, iż ażeby te zrównania należały do

do tych linii, do których ie dopiéro przystósówaliśmy, iest rzeczą istotną, aby iedna z niewiadomych np. y, rachówała się od téyże linii, na którey rachuie się druga niewiadoma x; albowiém można miéć zrównanie pod iedną z postaciów wyżéy naznaczonych, które iednakże niebędzie stósówne do śrzednic dostawnych, ieżeli to zrównanie iest należące do Ellipsy albo do hiperboli; albo téż, które ieżeliby należało do paraboli, niebędzie wyrażać stósunku między odcinkami, i między témi liniiami które dotąd nazywaliśmy *rzędnémi*. *Np.* ieżeli CM' CN (fig. 42), fig. 42. są dwie śrzednice dostawne Ellipsy, względém ktorych mamy to zrównanie, $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, gdzie rozumié się $CM' = \frac{1}{2}a$; $CN = \frac{1}{2}b$; $CQ = x$; a $QM = y$; i ieżeli przez śrzodek C poprowadzi się liniia prosta nieokréślona FCE, któraby spotykała się z rzędnémi QM w punkcie E; tudzież ieżeli oznaczymy linie CE przez z, a naostatek ieżeli przez punkt B obrany w odległości wiadoméy

$BC=m$, poprowadzi ſtę liniia BF równoległa linii QM, to natenczas oznaczywſzy CF przez n, tróykąty CBF, CQE podobne ſobie, dadzą $m:n::x:z$, więc $x=\frac{mz}{n}$; tę wártość głoſki x, położywſzy w zrównaiu wyżéy wynalezioném, będzie $yy=\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa-\frac{mmzz}{nn})$, albo $aannyy=\frac{1}{4}aabbnn-bbmmzz$, albo (rozdzieliwſzy drugą część przez $bbmm$, a oráz wſkazawſzy rozmnożenie przez $bbmm$), będzie $aannyy=bbmm(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm}-zz)$; albo naoſtatek $yy=\frac{bbmm}{aann}.(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm}-zz)$; zrównanie wprawdzie téyże poſtaci, ale którégo bez błędu, oczywiście niemożna poczytać za należące do śrzednic doſtawnych; ponieważ odcinki z rachuią ſię na linii CE, a rzędne y albo QM, rachuią ſię od punktu Q, w którym liniia EM równoległa linii CN, ſpotyka ſię z liniią CM.

306. Stąd tedy wnoſi ſię w powſzechności 1ód Ze maiąc zrównanie drugiegó ſtopnia, z dwiéma niewiadomémi x i y, ieżeli iedna z niewiadomych rachuie ſię od téy linii, na któréy miérzy ſię druga; to takowe zrównanie należyć będzie do Ellipſy, uważonéy względém ſwoich śrzednic doſtawnych; albo téż należyć będzie do koła, kiedy niezawiéraiąc w ſobie innych ſtopniów głoſek x i y iak tylko kwadraty, kiedy mówię te dwa kwadraty, znaydówać ſię będą w obu częściach zrównania, ale poprzédzone znakami przeciwnémi, i kiedy oráz ilość cała wiadoma, znayduiąca ſię w téyże części co kwądrat poprzédzony znakiém $-$, ſama miéć będzie znak $+$; i tak gdybyśmy mieli *np.* $yy=\frac{bb}{aa}(-\frac{1}{4}aa-xx)$; to zrównanie, niewyrażałoby wcale żadnéy linii; bo z niego wyciąga ſię $y=\pm\sqrt{[\frac{bb}{aa}(-\frac{1}{4}aa-xx)]}$, ilość zmyślona, i nic nieznacząca.

307. 2re Jeżeli dwa kwadraty yy i xx, położone w różnych częściach zrównania, ſą poprzédzone iednakowym znakiém, i ieżeli niebędzie innych ſtopniów głoſki x i y, iak te kwadraty, to zrównanie zawſze należyć będzie do hiperboli, uważonéy względém śrzednicy opiéraiącéy ſię na téyże hiperboli, albo téż względém śrzednicy doſtawnéy do téy piérwſzéy śrzednicy, a to podług tego, ieżeli wyráz wiadomy, mieć będzie znak przeciwny temu, iaki maią kwadraty xx i yy, albo téż taki, iaki maią te pomienione kwadraty.

308. 3cie Jeżeli zrównanie, niezawiéra w ſobie tylko ieden z kwadratów, a dwa wyrazy, z których drugi byłby mnogością wynikaiącą z rozmnożenia drugiéy niewiadoméy przez ilość wiadomą, to takowe zrównanie należyć będzie do paraboli, uważonéy

néy względém iednéy z śrzednic téyże pa-
raboli, a to ieżeli pomiénione dwa wyrazy,
położone w różnych częściach zrównania,
ſą poprzdézone iednakowym znakiém; ale
gdyby te wyrazy miały różne znaki, to zró-
wnanie niewyrażałoby wcale żednéy linii.

309. 4*te* Naoſtatek ieżeli zrównanie
miałoby tylko dwa wyrazy, z których ie-
dén byłby mnogością z dwóch niewiado-
mych x i y, a drugi byłby ilością cale wia-
domą, to takowe zrównanie wyrażałoby hi-
perbolę, uważoną względém iéy końcoty-
cznych.

310. Takie tedy ſą zrównania należące
do Przecinków ſtożkowych, uważone wzglę-
dém różnych linii do których ie przyſtóſowa-
liśmy. Wkrótce zobaczymy onych użycie,
ale nie bez pożytku będzie przodém powie-
dzieć, że ile razy nadarzy się zrównanie z
dwiéma niewiadomemi x i y, maiące warunki
wyżéy wymiénione, to zawſze łatwo bę-
dzie wykryślić przecinek ſtożkowy, do któ-
rego należy takowe zrównanie, a to poſtępu-
iąc ſobie iak w naſtępuiącym przykładzie.

Daymy tedy że mamy to zrównenie,
$ncd - qyy = gxx$; napiſáłbym go tak: $qyy =$
$ncd - gxx$; w którém rozdzieliwſzy drugą
część przez g, i oráz wſkazawſzy rozmno-
żenie przez toż g, miáłbym, $qyy = g(\frac{ncd}{g}$
$- xx)$, a naoſtatek, $yy = \frac{q}{g}(\frac{ncd}{g} - xx)$;
lecz pod tą poſtacią widzę podług (243 i 245),
że to zrównanie należy do Ellipſy, w któ-
réy ſtóſunkiém między kwadratami dwóch
śrzednic doſtawnych, ieſt $\frac{g}{q}$; i w któréy kwa-

dratém téy śrzednicy. na któréy rachuią ſię
odcinki x, ieſt ilość $\frac{4ncd}{g}$. Jakóż, przyrówna-
wſzy to zrównanie, do zrównania $yy = \frac{bb}{aa}$
$(\frac{1}{4}aa - xx)$; będzie $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, i $\frac{1}{4}aa = \frac{ncd}{g}$.
Z tych dwóch zrównań, wyciąga ſię $a =$
$\surd(\frac{4ncd}{g})$, i $b = \surd(\frac{4ncd}{q})$, ilości, daiące wy-
miary dwóch śrzednic doſtawnych. Co ſię
tyczé kąta, iaki czynią między ſobą te dwie
śrzednice doſtawne, takowy nieieſt inny, tyl-
ko tén, który czynią między ſobą liniie x i y,
i ieſt zawſze kąt wiadomy z ſamego zaga-
dniénia, z którego wyniknęło zrównanie ncd
$- qyy = gxx$. Widzieliśmy zaś wyżéy (252),
iak ſię kryśli Ellipſa, maiąc te trzy rzeczy
znaiome.

Tymże ſamym ſpoſobém poſtąpićby ſo-
bie potrzeba z zrównaniami należącémi do in-
ſzych przecinków, kiedy będą ſtóſowne z tam-
témi, które wyłożyliśmy wyżéy. Okażemy to
zaráz, iako w powſzechności, każde zrównanie
drugiego ſtopnia z dwiéma niewiadomé-
mi, albo zawſze wyraża iaki przecinek ſtoż-
kowy, albo też wcale żadnéy linii niewyra-
ża *; o czém można przekonać ſię, zobaczy-
wſzy, że każde takowe zrównanie, może za-

* *Trzeba tylko wyłączyć iedén przypadek, to ieſt kiedyby zrównanie ſkładało ſię z dwóch czynników drugiégo ſtopnia,* np. *takich,* ax + by + c, *i* dx + fy + g; *ale też w takim razie zrównanie niémoże ſię nazwać rzetelnie, bydź drugiégo ſtopnia; a iako tén przypadek nieieſt nam przydatny, przeto też nad nim bawić ſię nie będziémy.*

wſzebydź naprowadzone, i odmiénioné wi- dno z tych zrównań, które wynaleźliśmy wyżéy. Podamy zaráz do tego ſpoſób, ale ażebyśmy tém lepiéy obiaśnili i użycie iego, i wykryślénia ſtąd naſtępuiące, nie od rzeczy będzie, zaſtanowić ſię wprzód nad uwagami naſtępuiącémi.

311. Ponieważ każde zagadnié- nie co może bydź rozwiązane przez Algebrę, prowadzi zawſze do iednego albo do więcéy zrównań, przeto każde zrównanie z dwiéma niewiadomémi *u* i *t*, może zawſze bydź uważane, iako pochodzące z zagadniénia, w któremby te dwie ilości *u* i *t*, wyrażały dwie niewiadome. Takowe zagadnienie, niechay będzie iakie chce, to iednakże zrównanie zawſze uważać można, iakoby wyrażało naturę linii krzywéy; i to daie ſię łatwo poymówać. Albowiém, naznaczywſzy podług upodobania i naſtępnie, iednéy z niewiadomych *np.* ilości *u* rożne wártości, a przy pomocy zrównania i reguł Algebraicznych, za każdym razém wyrachówawſzy wártości ilości *t*, odpowiadaiące piérwſzym ilościóm, iawna ieſt, że niémaſz nic takiego, coby niepozwala-

ło wznaczyć na linii nieokreślonéy *AR* (fig. 42 43. 44) wártości *AP*, *AP*, i. t. d. równoległe między ſobą, a czyniące kąt pewny, i zrobić ie równémi wártościóm odpowiadaiącym wynalezionym na ilości *t*; obwód zrobiony z punktów *M*, *M*, i. t. d. tym ſpoſobém wynalezionych, złoży liniią krzywą, któréy natura zależyć będzie od ſtóſunku między liniiami *AP* i *PM*; a że takowy ſtóſunek ieſt wyrażony w zrównaniu, z którego wyciągnęły ſię te liniie, więc to zrównanie wyraża naturę ſaméyże lininii krzywéy. fig. 42. 43. 44.

To założywſzy, daymy że liniia krzywa ieſt przecinkiém ſtóżkowym; iawna ieſt, że ponieważ w zagadniéniu z którego wyniknęło to zrównanie, niebyło wiadomo, albo przynaymniéy mogło bydź w cale niewiadomo, ieżeli takie użycie takiego zrównania, miało dać przecinek ſtożkowy, przeto téż nieſzukało ſię takiego układu linii *AP* i *PM*, ażeby iedna z nich miała ſwóy kiérónek na śrzednicy, a druga była równoległa ſtycznéy, poprowadzonéy przez wiérſzchołek téyże śrzednicy, czegoby iednak potrzeba, chcąc ażeby zrównanie miało poſtać iednę z wyżéy położonych. A ſtąd pokazuie ſię, iakim ſpóſobém zrównanie, chociaż niebędące iednéy z przerzeczonych poſtaciów, iednakże należyć może do którego przecinka ſtożkowego.

312. Zobaczmy teráz, iak mo-
i każde zrównanie z dwiéma nie-
adoméni, przyprowadzić do ie-
ey z poſtaciów, które widzieliś-
y że należą do przecinków ſtożko-
ych, uważanych względém linii do
tórych ie ſtóſowaliśmy (304)

314. Spoſób który do tego podać mamy, wyciąga aby umieć wprzód wyrugówać drugi wyráz z zrównania drugiego ſtopnia z iedną niewiadomą. W czém niéma żadnéy trudności; bo nietrzeba tylko zrównac niewiadomą, pomnożoną (albo zmniéyſzoną, ieżeli drugi wyráz ma znak —) o połowę ſpółczynnika czyli mnożnika ilości x położonéy w drugim wyrazie, zrównać ią mówię z nową niewiadomą, oſwobodziwſzy wprzód kwadrat niewiadoméy.

Np. Zeby wyrugówać drugi wyráz z tego zrównania, $4x^2 + 12x = 9$; dzielę przez 4 i mam $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; robię $x + \frac{1}{2} = z$; ſkąd po ſkwadrówaniu mieć będę, $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = zz$; a zatém $x^2 + 3x = zz - \frac{9}{4}$; położywſzy tę wártość w zrównaniu $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$, będzie $zz - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, albo $zz = \frac{18}{4}$; zrównanie w którém iuż drugiego wyrazu niéma.

Gdybym miáł $x^2 - 4x = 7$; zrobiłbym $x - 2 = z$; i miáłbym po ſkwadrówaniu, x^2

$- 4x + 4 = zz$, albo $x^2 - 4x = zz - 4$; a położywſzy tę wártość w poprzédzaiącém zrównaniu, będzie $zz - 4 = 7$, albo $zz = 11$; zrównanie bez drugiego wyrazu.

314. Można także kiedy ſię ſpodoba, zrównać niewiadomą pomnożoną o połowę ſpółczynnika drugiégo wyrazu, nie z ſamą niewiadomą, ale z niewiadomą rozmnożoną albo rozdzieloną przez iakąkolwiek ilość; i ta uwaga będzie nam wkrótce użyteczna.

Np. W zrównaniu $x^2 - 4x = 7$, zamiaſt cobym miáł zróbić $x - 2 = z$, iak było wyżéy, mogę zrobić $x - 2 = \frac{k}{n} z$, ſkąd po tychże działaniach co piérwéy, wypadnie mi, $x^2 - 4x + 4 = \frac{kk}{nn} zz$, a zatém będzie, $x^2 - 4x = \frac{kk}{nn} zz - 4$; położywſzy zaś tę wártość w poprzédzaiącém zrównaniu, wnoſi ſię $\frac{kk}{nn} zz - 4 = 7$; to ieſt $\frac{kk}{nn} zz = 11$. W takim razie, wártość ilości x zawſze wypadać będzie iednakowa, bądź iakie chce naznaczyłyby ſię wártości ilościóm k i n. Jakóż to zrównanie, daie $\frac{k}{n} z = \sqrt{(11)}$, a ponieważ $x - 2 = \frac{k}{n} z$, więc będzié $x - z = \sqrt{(11)}$, wártość właſnie taż ſama, iaka wypadła z piérwſzego działania. Słowém, tym ſpoſobém nieodmiénia ſię nic w rzeczy ſzukanéy, ale przez takowe wprowadzenie ilości upo-
do-

dobaney, gotuie się sposobność do wypełnienia różnych zamysłów, którym niemożnaby czasem zadość uczynić, chyba sposobem dłuższym i mniey prostym, postąpiwszy sobie inaczey.

Sposoby naprowadzenia do Przecinków stożkowych, każdego zrównania drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi, byleby takowe zrównanie wyrażało rzecz podobną.

315. Niechay będzie zrównanie, $dtt + cut + euu + fdt + geu + hd^2 = 0$, w którém zawiéraią się wszystkie zrównania drugiego stopnia z dwiéma niewiadomémi u i t, i gdzie żadnego wyrazu niebrakuie. Zmyśliwszy sobie, że to zrównanie należy do linii krzywéy MM (fig. 42. i 43), w któréyby liniie AP i PM były *spółrzędnémi*; zobaczmy iak się można upewnić, że ta liniia krzywa, iest zawsze iednym z przecinków stożkowych, i naznaczmy iakim właśnie iest pzzecinkiém.

fig. 42. 43.

Kiedy niebrakuie żadnego z dwóch kwadratów t^2 i u^2, trzeba z tego zrównania wyrugówać koléyno drugi wyráz tak względém t iako też względém u, w następuiący sposób.

Zam-

Zamknąwszy między dwóma nawiasami to wszystko, co mnoży piérwszy stopiéń ilości t, oswobadzam tt, i mam $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \frac{euu}{d} + \frac{geu}{d} + hd = 0$ (A). Robie tedy podług (313), $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; skąd po skwadrówaniu, mićć będę $tt + \left(f + \frac{cu}{2d}\right)t + \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d}$ $\frac{ccuu}{4dd} = yy$; a zatém, $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t = yy - \frac{1}{4}ff - \frac{fcu}{2d} - \frac{ccuu}{4dd}$. Położywszy tę wártość w zrównaniu (A), i przestawiwszy, żeby yy zostało się samo w iedney części, mićć będę $yy = \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} - \frac{euu}{d} - \frac{geu}{d} - hd$; albo rozmnożywszy wszystko przez $4dd$, a potém pozbierawszy wyrazy rozmnożone przez iednakowe stopnie ilości u, będzie $4ddyy = ffdd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)u + (cc - 4de)uu$.

Ponieważ ilości d, c, e, f, i. t. d. wyrażaią ilości wiadome, więc dla skrócenia rachunku, można sobie oznaczyć $ffdd - 4hd^3$, tylko przez samę iednę głoskę r, ilość $2cfd - 4ged$ przez q, a $cc - 4de$ przez m, przez co poprzédzaiące zrównanie odmiéni się w następuiące, $4ddyy = r + qu + mu^2$, gdzie ilości m, q, r, mogą bydź zarówno albo twiérdzące albo przéczące.

Wyruguymy teráz drugi wyráz względém u; zaczynaiąc naprzód od oswobodzenia kwadratu uu; co nam da $u^2 + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} =$

$4dd$

$\frac{4dd}{m}yy$. (B). Ale zamiaſt zrównania proſtéy ilości $u + \frac{q}{2m}$ z nową niewiadomą x, podług reguły (313), zróbmy raczéy $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ (314); to ieſt zrównaymy ią z nową niewiadomą x, rozmnożoną przez połowę ſpółczynnika drugiego wyrazu, i rozdzieloną przez ilość upodobaną n, teráz niewiadomą, ale któréy wártość wkrótce znaydziémy *

Mamy tedy $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; a ſkwadrówawſzy wypadnie $uu + \frac{qu}{m} + \frac{qq}{4mm} = \frac{qqxx}{4mmnn}$ albo $uu + \frac{qu}{m} = \frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm}$. Położywſzy tę wártość w zrównaniu (B), mieć będziém $\frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$; zrownanie należące do Ellipſpy albo do hiperboli, ieżeli żadna z ilościów d, m, q, r i. t. d. nieieſt zerém; wyiąwſzy tylko ten przypadek, w którym iak zobaczymy niżéy, zrównanie niewyrażałoby wcale żadnéy linii. Za-

* *Ta ilość* n *ieſt tu wprowadzona dla tego, aby dane zrównanie można było proſto naprowadzić do zrównania uważanego względém śrzednic doſtawnych. Gdyby pomieniona ilość zrównała ſię proſto z ilością* x, *to zrównanie oſtateczne byłoby wprawdzie poſtaci odpowiadaiącéy Ellipſie albo hiperboli, ale należałoby do przypadku nad którym zaſtanowiliśmy ſię wyżéy* (305).

Zaſtanówmy ſię teráz nad tém w iakich przypadkach, liniia krzywa ieſt Ellipſą, w iakich hiperbolą, a naoſtatek w iakich, wcale niéma żadnéy linii krzywéy.

Tym umyſłém oſwobodziwſzy yy, mieć będziém, $yy = \frac{qqxx}{16mnndd} - \frac{qq}{16mdd} \pm \frac{r}{4ad}$, albo rozdzieliwſzy drugą część zrównania przez ſpółczynnika kwadratu xx, a oráz wſkazawſzy rozmnożenie przez tegóż ſpółczynnika, będzie $yy = \frac{qq}{16mnndd}(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq})$; zrównanie, w którém ponieważ ilości q, n, i d, ſą położone w kwadracie, więc znaki w niém niémogą ſię odmiénić, tylko w ten czas kiedyby m albo r, zamiaſt bydź ilościami twiérdzącémi, były przéczącémi; że zaś odmiana znaku przed ilością r; niepociąga za ſobą żadnéy odmiany w kwadratach yy i xx, więc liniia krzywa nieodmiénia ſię przez odmianę znaku położonego przed ilością r. Co ſię znowu tyczé ilości m, ieżeli takowa będzie przécząca, to natenczas zrównanie odmiéni ſię w to, $yy = \frac{qq}{16mnndd} \times (xx -$

$nn - \frac{4mrnn}{qq}$), albo odmiéniwszy znaki górą i dołém, będzie $yy = \frac{qq}{16mmndd} \times (nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx)$. A ztąd pokazuie się, podług (306 i 307), że kiedy *m* będzie ilością twiérdzącą, to liniia krzywa będzie hiperbolą; a przeciwnie będzie Ellipsą, kiedy *m* będzie ilością przéczącą; lecz przez *m* wyraziliśmy wyżéy ilość $cc - 4de$, w którey cc będąc położone w kwadracie, iest zawsze ilością twiérdzącą, więc *m* albo $cc - 4de$, niémoże stać się ilością przéczącą, tylko w takim razie, kiedyby $4de$ przewyższało kwadrat cc; ilości *d* i *e* niechayby były czyto obie twiérdzące, czy téż obie przéczące.

316. Więc *ażeby wiedzieć w iakich przypadkach, zróżnanie drugiego stopnia z dwiéma niewiadomémi* u *i* t, np. *takie iak to*, $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$, *należy do Ellipsy a w iakich do hiperboli, nietrzeba więcéy tylko uważyć, ieżeli kwadrat* cc *spółczynnika wyrazu* ut, *zmnieyszony mnogością* de, *cztéry razy powtórzoną, wynikaiącą z spółczynników kwadratów* t^2 *i* u^2, *czyni ilość twiérdzącą albo przéczącą: w piérwszym przypadku liniia krzywa będzie hiperbolą, a w drugim będzie Ellipsą.* Od téy reguły trzeba wyłączyć tylko iedén przypadek, to iest kiedyby *r* będąc ilością przéczącą, było większe nad $\frac{qq}{4m}$, co do Ellipsy; bo natenczas ilość $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ przemiéniaiąca się na $nn - \frac{4mrnn}{qq}$, albo na $nn\,(1 - \frac{4mr}{qq})$, staie się przéczącą, ieżeli $\frac{4mr}{qq}$ iest większe od 1, albo co iedno wychodzi, ieżeli $4mr$ iest większe nad qq, albo naostatek ieżeli *r*, iest większe nad $\frac{qq}{4m}$, przez co wártość głoski *y* a zatém i liniia krzywa, staie się tylko zmyśloną.

Pozostaie nam ieszcze okazać, iakby można wykryślić Ellipsę i Hiperbolę, które dopiéro rozeznaliśmy. Zastanówmy się nad Ellipsą.

317. Z dwóch zrównań $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$ i $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, których użyliśmy do wyrugówania drugich wyrazów, drugie zró-

 wynawnanie, mocą teraźnieyszego przypuszczenia, że m iest ilością przeczącą, odmiénia się na $u - \frac{q}{2m} = \frac{-qx}{2mn}$; ale że ilość n była obrana podług upodobania, więc można zarówno rozumiéć ią twiérdzącą albo przéczącą; rozumiciąc ią przeczącą, będzie $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; wykryśliymy tedy te dwa zrównania, żeby miéć położenie śrzednic dostawnych.

Piérwsze, to iest $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, pokazuie, iż ażeby miéć y, trzeba pomnożyć ilość t, o $\frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$; a żatém poprowadziwszy przez punkt A iako przez początek spółrzę-
fig. 42. dnych u i t (fig. 42) liniią $AB = \frac{1}{2}f$, równoległą liniióm PM albo t, przez punkt B poprowadzi się znowu liniia BKl równoległa linii AR, na któréy rachuią się odcinki u; a potém wytknąwszy do woli liniią BK, poprowadzi się liniia KL, równoległa linii AB, i taka ażeby było $KL : BK :: \frac{1}{2}c : d$; natenczas ieżeli przez punkt B i L poprowadzi się liniia nieokreślona BLQ, to liniie QM, rachówane od punktu Q gdzie ta liniia przecina liniie PM, będą wártościami głoski y. Jakóż mamy $QM = PM + PQ = PM + PI + IQ = t + \frac{1}{2}f + IQ$; tróykąty zaś BKL, i BIQ podobne sobie, daią $BK : KL :: BI$ albo $AP : IQ$; to iest $d : \frac{1}{2}c :: u : IQ = \frac{cu}{2d}$, więc $QM = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Ponieważ ilości y rachuią się od linii LQ, więc idzie zatém (305), iż ażeby zrównanie należące do Ellipsy wyżéy wynalezione, ściągalo się do

śrze-

śrzednic dostawnych, to trzeba ażeby ilości x rachówały się na linii BLQ, i żeby punkt skąd się rachuią, był srzodkiém; tak że liniia QLB iest kierónkiém iednéy z śrzednic. Zobaczmy teráz iak wynaydziémy śrzodek.

Drugie zrównanie $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, daie znać, że ieżeli na linii AP oznaczonéy przez u, weźmie się $AG = \frac{q}{2m}$, to ilość GP, która wárta $AP - AG$, wárta będzie $u - \frac{q}{2m}$; a zatém także wárta będzie $\frac{qx}{2mn}$; będzie tedy $GP = \frac{qx}{2mn}$; lecz ieżeli przez punkt G poprowadzi się liniia NGC, równoległa liniióm PM, punkt C w którym takowa liniia NGC spotka się z liniią LQ, będzie początkiém ilości x, a zatém będzie śrzódkiém. Jakóż widzieliśmy że ilości x powinny bydź rachówane na linii LQ; lecz kiedy GP iest zerém, wártość iego $\frac{qx}{2mn}$ powinna bydź także zerém, więc i x powinno natenczas także bydź zerém, co niémoże przytrafić się tylko w takim razie, kiedy ilości x poczynaią się w punkcie C; a zatém kiedy liniie QM, są rzędnémi y, to liniie CQ muszą bydź odcinkami x. A ztąd łatwo będzie miéć można wártość głoski n; albowiém mamy $GP = \frac{qx}{2mn}$, albo (położywszy zamiast x wártość iego CQ, a zamiast $\frac{q}{2m}$ wártość iego AG), będzie $GP = \frac{AG \times CQ}{n}$; więc $n =$

AG

$\frac{AG \times CQ}{GP}$; będzie tedy $n = BC$; to ieſt iż ażeby zrównanie należące do Ellipſy, wyżéy wynalezione, ſtóſówało ſię do śrzednic doſtawnych, którychby kierónki były QB i CN, trzeba położyć zamiaſt n wartość linii BC, wynalezlonéy przez poprzédzaiące wykryślenie.

Niezoſtaie nam iuż tedy więcéy do wykryślenia téy Ellipſy, tylko naznaczyć wielkość śrzednic doſtawnych; bo kąt BCN iaki czynią między ſobą, iuż ieſt znaiomy z poprzédzaiących działań. Tę zaś wielkość śrzednic można mieć bardzo łatwo, poſtąpiwſzy ſobie tymże ſpoſobém co wyżéy (310); to ieſt nietrzeba więcéy, tylko przyſtóſówać zrównanie $yy = \frac{qq}{16mddnn}(nn + \frac{4mnnr}{qq} - xx)$ do zrównania $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$. To przyſtóſówanie da nam $\frac{bb}{aa} = \frac{qq}{16mddnn}$; i $\frac{1}{4}aa = nn + \frac{4mnnr}{qq}$; więc $a = \sqrt{(4nn + \frac{16mnnr}{qq})}$; a $b = \sqrt{(\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd})}$; a ponieważ n, m, q, r, d ſą ilości wſzyſtkie znaiome, więc także będą wiadome i wartości śrzednic doſtawnych a i b, przy pomocy których iako téż znaiomego kąta BCN, iaki między ſobą czynić powinny, nakryśli ſię Ellipſa ſpoſobém wyżéy przepiſanym (252).

318. Uważmy, że kiedy wartości głoſek a i b, ſą ſobie równe, i kąt BCN proſty, to natenczas liniia krzywa ieſt kołém. Zeby zas naznaczyć w iakim to przypadku zdarza ſię, nietrzeba więcéy tylko zód W naſzém

ſzém zrównaniu należącém do Ellipſy, rozumieć $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, to ieſt że $qq = 16mddnn$, ſkąd wyciąga ſię $nn = \frac{qq}{16mdd}$.

2re Jeżeli kąt BCD ieſt proſty, to będzie $(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2 = (AG)^2$; lecz $BC = n$; a troykąty ſobie podobne BCD, BLK daią, $BK : KL :: BD$ albo $AG : CD$; to ieſt, $d : \frac{1}{2}c :: \frac{q}{2m} : CD$, ſkąd wyciąga ſię $CD = \frac{qc}{4md}$; więc $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mmdd} = \frac{qq}{4mm}$, albo $m + cc = 4dd$; ale że m ieſt ilością przécząca, przeto wypada $cc - 4de = -m$, albo $m = 4de - cc$; więc muſi bydź $4de = 4dd$, albo $d = e$.

319. A ſtąd pokazuie ſię, iż *chcąc wiedzieć ieżeli liniia krzywa ieſt kołem, Ellipſą, albo Hiperbolą*, nietrzeba mieć względu na oſtatnie trzy wyrazy fdt, geu, i hd^2 zrównania $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$; bo to zawiſło iedynie od trzech piérwſzych wyrazów, tak że ieżeli d, c, i e ſą takie, że ilość $cc - 4de$, wypada twiérdząca, to liniia krzywa będzie hiperbolą; ieżeli zaś ilość $cc - 4de$ wypada przécząca, to liniia krzywa będzie Ellipſą, wyiąwſzy tylko ten przypadek, kiedyby było $d = e$, to ieſt kiedyby dwa kwadraty u^2 i t^2 miały iednakowego ſpółczynnika; a W

w takim razie linia krzywa będzie kołém, ieżeli nadto kąt BCD wynikaiący z poprzédzaiącego wykryślenia, ieſt proſty.

320. To wſzyſtko co ſię dotąd mówiło, wyiąwſzy tylko to co było pod I. (318), ſłużv oráz do hiperboli, to ieſt, do zrównania $yy = \frac{qq}{16mddnn}(xx - nn \pm \frac{4mrnn}{qq})$, oprocz znaków. A zatém przeczytawſzy ſobie co poprzédziło, i przyſtóſowa-
fig. 43. wſzy to do figury 43, nietrzeba będzie żadnéy innéy odmiany zróbić, tylko przenieść AG, na przeciwną ſtronę linii AP, iak wſkazuie zrównanie $u \pm \frac{q}{2m} \pm \frac{qx}{2mn}$, wyżéy wynalezione (317). Wreſzcie wſzyſtko ieſt iedno, przemiéniwſzy tylko ſłowo *Ellipſa* na ſłowo *Hiperbola.*

W różnych ſzczególnych przypadkach, trafić ſię może, że ilości AG, BK, AB, KL. (fig. 42 i 43), zdadzą ſię bydź roſporządzone wcale przeciwnym ſpoſobém, iak ſię tu znayduią; ale takowe odmiany zawſze bywaią wſkazane, znakami poprzédzaiącémi ilości d, c, f, m, q i. t. d. w zrównaniach $t \pm \frac{1}{2}f \pm \frac{cu}{2d} = y$, i $u \pm \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, które wypadaią po wyrugówaniu drugich wyrazów.

321.

321. Jeſzcze nad dwóma przypadkami zaſtanowić ſię mamy, to ieſt 1ód Nad tym, kiedyby było $cc - 4de = 0$; 2re kiedyby było razém $d = 0$ i $e = 0$.

W piérwſzym przypadku, to ieſt kiedy będzie $cc - 4de = 0$, albo $cc = 4de$, liniia krzywa ieſt parabolą. Ponieważ w takim razie ilość m równa ſię zérowi, przeto poprzédzaiące wykryślenie nieieſt tu potrzebne, albowiém po wyrugówaniu drugiego wyrazu względém t, wyrazu u^2 iuż w zrównaniu nieznayduie ſię. Ten przypadek można łatwo rozeznać, uważaiąc ieżeli w zrównaniu wypada $cc = 4de$, to ieſt ieżeli trzy wyrazy t^2, ut i u^2 czynią kwadrat; bo kiedy ieſt $cc = 4de$, to ſtąd wyciąga ſię $c = 2\surd de$, przez co trzy piérwſze wyrazy zrównania, przemiéniaią ſię na $dt^2 \pm 2ut\surd de \pm eu^2$, to ieſt na ilość, która ieſt kwadratém powſtaiącym z piérwiaſtka $t\surd d \pm u\surd e$.

W tym przypadku, trzeba iak piérwéy, wyrugówać drugi wyráz względém t, przez co zrównanie (poſtąpiwſzy ſobie z niém ſłowo w ſło-

ſłowo tak iak było wyżéy), przemięni ſię na $4ddyy = r + qu$; a natenczas, żeby temu zrównaniu dać poſtać taką iak ieſt $yy = px$, to ieſt taką iaką ma zrównanie należące do paraboli, przyſtóſówane do śrzednicy, któréyby rzędne były równoległe ſtycznéy, przytykaiącéy do wierſzchołka téyże śrzednicy, żeby mówię dać mu taką poſtać, trzeba oſwobodzić yy, ſkąd wypadnie $yy = \frac{r + qu}{4dd}$; dopiéro ta druga część, robi ſię równa nowéy niewiadoméy x, rozmnożonéy przez ilość n, któréy wartość znayduie ſię iak zobaczymy niżéy; to ieſt że trzeba zrobić $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, a zatém będzie także $yy = nx$. Niezoſtanie tedy potém więcéy, tylko wykryślić zrównanie $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, które ſłużyło do wyrugówania drugiego wyrazu względém t, i zrównanie $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, które ſłużyło do drugiéy przémiany. Piérwſze z tych dwóch zrównań, ponieważ właśnie ieſt toż ſamo, co go iuż wyżéy wykryśliliśmy (317), przeto i tu

tu wykryśli ſię tymże ſamym ſpoſobém; a zatém nietrzeba więcéy, tylko przyſtóſówać do fig. 44, to wſzyſtko co ſię powiedziało tamże (317) względém fig. 42 o wykryśleniu ilości $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, gdzie przez y ſą oznaczone linii QM (fig. 44), a liniia BLQ pokazuie kierónek śrzednicy, na krórey powinny rachówać ſię x. fig. 44.

Zeby naznaczyć początek odcinków x, zatém i wierſzchołek téy śrzednicy, trzeba do tego użyć zrównania $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, które daiąc $u + \frac{r}{q}, = \frac{4ddnx}{q}$, pokazuie, że ieżeli wezmie ſię z przeciwnéy ſtrony linii AP, ilość $AG = \frac{r}{q}$ będzie $GP = \frac{4ddnx}{q}$; bo $GP = AP + AG = u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$; więc ieżeli przez punkt G. poprowadzi ſię liniia GCD równoległa liniióm PM, któraby ſpotykała ſię z liniią QLB w punkcie C, to punkt C, będzie początkiém odcinków x; albowiém zrównanie $GP = \frac{4ddnx}{q}$, znać daie, że kiedy GP ieſt zerém, to i x powinno bydź zerém, i że nadto ponieważ odcinki x powinny rachówać ſię na téy linii, od któréy poczynaią ſię rzędne y, więc powinny rachówać ſię na linii BQ.

Już tedy nieidzie więcéy tylko o naznaczenie palirzędnéy n. Lecz widzieliśmy do-

dopiéro że $GP = \frac{4ddnx}{q}$; a równoległe CD, QI daią $BC : BD$ albo $AG :: CQ : DI$ albo GP, to ieſt $BC : \frac{r}{q} :: x : \frac{4ddnx}{q}$; więc $BC = \frac{r}{4ddn}$; więc $n = \frac{r}{4BC \times dd}$; że zaś ilości r i d ſą wiadome w zrównaniu, a liniia BC ieſt wynaleziona przez wykryślenie; więc także ieſt wiadoma i ilość n oznaczaiąca palirzędną; nadto, toż ſamo wykryślenie naznacza oraz kąt, iaki czynią między ſobą ſpółrzędne CQ i QM albo x i y; a zatém łatwo będzie wykryślić ſobie parabolę, podług tego iak wyżéy przepiſało ſię (302).

322. Ponieważ zrównanie powſzechne należy do paraboli, kiedy będzie $cc = 4de$, przeto idzie zatém, że kiedy niebędzie w zrównaniu mnogości ut wynikaiącéy z dwóch niewiadomych, to w takim razie ażeby to zrównanie należało do paraboli, trzeba ażeby wniém nedoſtawało także iednego z dwóch kwadratów t^2 albo u^2; bo natenczas c będąc zerém, zrównanie $cc = 4de$, albo $o = 4de$, znać daie, że muſi bydź albo d albo $e = o$.

323. Jeżeli oba kwadraty znayduią ſię w zrównaniu, a niebędzie w niém mnogości ut, to natenczas wykryślenie wyżéy przepiſane (317)

ſtóſuiące ſię do figur 42 i 43, wypadnie próściéyſze; bo w takim razie c będąc zerém, liniia KL ieſt także zerém, a liniia BL przemiénia ſię w BK, która natenczas ſtaie ſię ſrzednicą; więc liniie x i y, ſą równoległe liniióm u i t. W tymże przypadku wyrugówanie drugiego wyrazu względém u, odbywa ſię bez używania niewiadoméy n; bo że w takim razie liniia BC to ieſt n (317), równa ſię linii BD albo AG, więc będzie $n = \frac{q}{2m}$, co odmiénia zrównanie $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, którego użyliśmy byli do wyrugówania drugiego wyrazu względém u, na $u + \frac{q}{2m} = x$.

A ſtąd pokazuie ſię, że ażeby liniia krzywa była kołém, oprócz warunków wyżéy wymiénionych (318), trzeba nadto aby kąt, który czynią między ſobą ſpółrzedne u i t, był kąt proſty.

324. Kiedy mnogość ut znayduie ſię w zrównaniu, ieżeli po wyrugówaniu drugiego wyrazu względém iednéy z dwóch niewiadomych $np.$ względém t, nieznaydówałoby ſię in-

innego ſtopnia niewiadoméy u, tylko kwadrat, to natenczas chociaż iuż niebędzie drugiego wyrazu do wyrugówania, iednakże trzeba przedſięwziąść przemianę, zależącą na tém, aby zrobić $u = \frac{lx}{n}$, gdzie $\frac{l}{n}$ rozumié ſię bydź ułamkiém niewiadomym, ale którego wártość pokaże ſię z wykryślenia, podobnego tamtemu iakie opiſało ſię wyżéy (321). Zobaczymy to niżéy w przykładzie.

325. Jeżeli ſpomiędzy trzech wyrazów t^2, ut, i u^2 niebrakuie tylko iednego z dwóch kwadratów, to zrównanie zawſze należy do hiperboli, albo niewyraża wcale żadnéy linii krzywéy; bo ieżeli d albo e ieſt zérém, to ilość $cc - 4de$, wychodząca na cc, wypada koniecznie twiérdząca.

326. Naoſtatek ieżeli razém brakuie obu kwadratów t^2 i u^2, w którymto przypadku zrównanie miałoby tę poſtać, $gut + ht - ku - l = 0$, gdzie g, h, k, i l mogą bydź zarówno albo twiérdzące albo przéczące; to także niémożnaby użyć wykryślenia danego wyżéy (317). Zrównanie w

w tym razie, należyć będzie do hiperboli uważonéy względém kończotycznych; ale że natenczas odcinki i rzędne nieſą rachówane od śrzodka, przeto można ie do tego ſtanu przywiéśdź w naſtępuiący ſpoſób.

Trzeba oſwobodzić mnogość ut, co da $ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = 0$. Potém ſumma ilościów mnożących głoſkę u, równa ſię niewiadoméy y, to ieſt robi ſię $t - \frac{k}{g} = y$; ſkąd wypada $t = y + \frac{k}{g}$; położywſzy tę wártość w zrównaniu $ut + \frac{ht}{g}$ i. t. d. $= 0$, będzie $uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$. Po takowém przekſztalceniu, ſumma wſzyſtkich ilościów mnożących głoſkę y, równa ſię nowéy niewiadoméy x, to ieſt robi ſię $u + \frac{h}{g} = x$, przez co zrównanie odmiénia ſię na to, $xy + \frac{hh}{gg} - \frac{l}{g} = 0$, albo $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, które należy do hiperboli uważonéy między kóńcotycznémi, gdzie odcinki x rachuią ſię od śrzodka na iednéy z kóńcotycznych, a rzędne rachuią ſię od téyże kóńcotycznéy, i ſą równoległe drugiéy; ſtopniém zaś hiperboli ieſt ilość $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ (282).

Żeby wykryślić tę hiperbolę, trzeba wykryślić naſtępuiące dwa zrównania, $t - \frac{k}{g} = y$, i $u + \frac{h}{g} = x$, które ſłużyły do przemiamiany. Piérwſze pokazuie, że chcąc mieć y, trzeba zmniéyſzyć każde t o ilość $\frac{k}{g}$.

fig. 45. Prowadzi ſię tedy przez punkt A (fig. 45), to ieſt przez początek ilościów u i t, liniia AB, równoległa liniióm PM, albo t, i równa ilości $\frac{k}{g}$; potém przez punkt B poprowadziwſzy liniią CBQ równoległą linii AP, liniie QM, wyrażać będą ilości y; bo $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$.

Zeby zaś mieć odcinki x; zrównanie $u + \frac{h}{g} = x$, pokazuie, że trzeba pomnożyć ilości u, to ieſt liniie AP, o ilość $\frac{h}{g}$. Wnoſi ſię tedy na przeciwną ſtronę linii AP, liniia $AG = \frac{h}{g}$, a poprowadziwſzy liniią GS, równoległą liniióm PM, któraby ſpotykała ſię z liniią BQ w punkcie C, liniie CQ wyrażać będą ilości x, a C będzie śrzodkiém hiperboli, któréy kóńcotycznémi będą liniie CQ, CS. Maiąc tedy kóńcotyczne, i zrównanie $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, wykryśli ſię hiperbola ſpóſobém wyżéy przepiſanym (289).

Gdyby w zrównaniu brakówało piérwſzych trzech wyrazów t^2, ut i u^2, to natenczas takowe, niewyrażałoby tylko liniią proſtą, któréy wykryślenie zawſze ieſt łatwe, na fundamencie tego, co ſię powiedziało o wykryśleniu zrównań ſłużących do przemian poprzédzaiących.

327.

327. A zatém $1^{\text{ód}}$ każde zrównanie drugiego ſtopnia z dwiéma niewiadomémi, wyraża zawſze albo iaki przecinek ſtożkowy, albo też niewyraża wcale żadnéy linii krzywéy. 2^{re} Takowa liniia krzywa, ieſt albo Ellipſą, albo Hiperbolą albo Parabolą, podług tego, kiedy kwadrat z ſpółczynnika mnogości ut, wynikaiącéy z dwóch niewiadomych, zmniéyſzony mnogością, wynikaiącą z ſpółczynników kwadratów t^2, i u^2 cztéry razy powtórzoną, ieſt albo przéczący, albo twiérdzący albo zerém; a w ſzczególności takowa liniia krzywa może bydź kołém, kiedy pomiéniony wypadek będąc przéczący, ſpółczynniki kwadratów t^2 i u^2 będą równe ieden drugiému. 3^{cie} Zeby zaś każde zrównanie należące do iakiego przecinka ſtożkowego, naprowadzić do poſtaci tych zrównań, które podały ſię wyżéy mówiąc o tych liniiach, trzeba w tém ſtóſować ſię do przepiſów położonych pod liczbami (315, 317, 320, 321, i 326),

Przyſtóſówanie tego co poprzédziło, do rozwiązania niektórych Zagadnién nieokréślonych.

328. Zebyśmy dali do wyrozumiénia użycie przemian dopiéro opiſanych, obierzmy ſobie na piérwſzy przykład to zagadniénie: *Znaléśdź iakiego rodzaiu byłaby li-*
fig. 46. *niia krzywa (fig. 46), któréyby odległości od każdego punktu* M *do dwòch punktów ſtałych* A *i* B *znaydówały ſię zawſze w iednakowym ſtòſunku, oznaczonym przez* g *do* h.

Zmyślmy ſobie z każdego punktu M, ſpuſzczoną liniią MP proſtopadłą na AB; i ſzukaymy ſtóſunku między témi proſtopadłémi i odległościami onych AP od punktu A; tym końcém oznaczmy ſobie AP przez u; PM przez t; a liniią wiadomą AB przez c.

To naprzód założywſzy, tróykąt proſtokątny APM, daie $AM = \sqrt{[(AP)^2 + (PM)^2]} = \sqrt{(uu + tt)}$, a tróykąt proſtokątny BPM, daie $BM = \sqrt{[(BP)^2 + (PM)^2]}$; lecz $BP = AP - AB = u - c$; więc $BM = \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$; a że ma bydź $AM : BM :: g : h$, więc będzie $\sqrt{(uu + tt)} : \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)} :: g : h$; więc $h\sqrt{(uu + tt)} = g\sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$, albo ſkwadrówawſzy, $hhuu + hhtt = gguu - 2ggcu + ggcc + ggtt$, albo $(gg - hh)uu + (gg - hh)tt - 2ggcu + ggcc = 0$; zrównanie, podług (318) należące do koła; ponieważ dwa kwadtaty uu i tt, w téyże części zrównania maią iednakowe znaki i iednakowego ſpółczynnika.

Zeby to zrównanie naprowadzić do poſtaci $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ (317); uważam, że ponieważ w niém nieznayduie ſię drugiego wyrazu względém t, przeto doſyć ieſt względém téy niewiadoméy zrobić $t = y$, ſkąd wypada, $(gg - hh)uu + (gg - hh)yy - 2ggcu + ggcc = 0$; teráz zaś trzeba wyrugówać drugi wyráz względém u; że zaś mnogość ut nieznayduie ſię w zrównaniu, dla tego doſyć będzie (323), przeſtać na użyciu reguły wyżéy podanéy (313). Oſwobodziwſzy tedy uu, mam $uu - \frac{2ggcu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy$; robię $u - \frac{ggc}{gg - hh} = x$; a ſkwadrówawſzy i położywſzy zamiaſt piérwſzéy części zrównania, onéy wártość $xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2}$, z poprzédzaiącego działania wynikaiącą, będzie $xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy$, albo $yy = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2} - xx$; zrównanie które będąc przyſtóſówane do zrównania $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, da mi $\frac{1}{4}aa = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2}$ a zatém będzie promiéń, czyli $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{gg - hh}$.

Teráz nieidzie, tylko o wynaleziénie śrzódka, który powiniën znaydówać ſię na linii APB, bo mamy $t = y$. Lecz zrównanie $u - \frac{ggc}{gg - hh} = x$, które ſłużyło do przemiany, pokazuie, iż ażeby mieć x, trzeba zmniéyſzyć u o ilość $\frac{ggc}{gg - hh}$; przeto wziąwſzy $AC = \frac{ggc}{gg - hh}$, liniia CP wyrażać będzie ilość x; bo takowa ieſt wárta $AP - AC$, to ieſt $u - \frac{ggc}{gg - hh}$. A zatém z punktu C iako ze śrzodka, promiéniém $\frac{hgc}{g^2 - h^2}$ opiſawſzy koło, każdy punkt M iego okręgu, mieć będzie tę właſność o któréy mowa.

Wreſzcie śrzodek i promień, mogą bydź wynalezione doſyć proſtym ſpoſobém, przy pomocy piérwſzego zrównania $uu - \frac{2g^2cu}{gg-hh} = \frac{-ggcc}{gg-hh} - yy$; albowiém, ponieważ śrzodek znaydówać ſię muſi na linii AP, iak dopiéro wyżéy uważyliśmy, przeto zrobiwſzy $y = 0$, po rozwiązaniu zrównania, mieć będziém dwie wártości głoſki u, wyrażaiące odległości AD i AE, w których koło DME ſpotyka ſię z liniią proſtą AB; a zatém przedzieliwſzy na połowę liniią DE, mieć będziém śrzodek C i promień koła CE. I tak rozwiązawſzy zrównanie $u^2 - \frac{2g^2cu}{gg-hh} = \frac{-ggcc}{gg-hh}$, będzie $u = \frac{g^2c}{gg-hh} \pm \sqrt{\frac{gghhcc}{(gg-hh)^2}} = \frac{g^2c \pm ghc}{gg-hh} = \frac{gc(g \pm h)}{(g-h)(g+h)}$, ſkąd wypadaią na u te dwie wártości, $u = \frac{gc}{g+h} = AD$, i $u = \frac{gc}{g-h} = AE$.

329. Obierzmy ſobie znowu na drugi przykład to zagadniénie: *Zewnątrſz linii daney AR (fig. 47) wynaléśdź wſzyſtkie i różne punkta M takie, ażeby poprowadziwſzy do dwóch punktów A i R liniie MA, MR, kąt AMR znaydówał ſię zawſze bydź równy zadanému kątowi.*

Oznaczmy ſobie przez r promień Tablic, a przez m ſtyczną kąta zadanego, któremu kąt AMR ma ſię równać; ſpuśćmy proſtopadłą MP, oznaczmy AP przez u; PM przez t; AR przez b; a natenczas będzie $PR = b - u$.

Przy-

Przypomniymy ſobie owe trzy podania wywiedzione w Tomie I. (Jeom. 282, 286 i 287), to ieſt, że ieżeli A i B ſą dwa kąty, to będzie

1ód $W\!ſt.(A+B) = \frac{W\!ſt.\,A\;Doſt.\,B + W\!ſt.\,B\;Doſt.\,A}{r}$

2re $Doſt.(A+B) = \frac{Doſt.\,A\;Doſt.\,B - W\!ſt.\,A\;W\!ſt.\,B.}{r}$

3cie $Stycz.(A+B) = \frac{r\,W\!ſt.(A+B)}{Doſt.(A+B)}$.

To założywſzy, tróykąty proſtokątne APM, RPM, daią (Jeom. 299), $AM : AP :: r : W\!ſt.\,AMP$; $AM : PM :: r : W\!ſt.\,MAP$ albo $Doſt.\,AMP$; $RM : RP :: r : W\!ſt.\,RMP$; $RM : PM :: r : W\!ſt.\,MRP$ albo $Doſt.\,RMP$; ſkąd wyciąga ſię $W\!ſt.\,AMP = \frac{r \times AP}{AM}$; $Doſt.\,AMP = \frac{r \times PM}{AM}$; $W\!ſt.\,RMP = \frac{r \times RP}{RM}$; $Doſt.\,RMP = \frac{r \times PM}{RM}$; więc ponieważ $AMR = AMP + RMP$, będzie podług formuł dopiéro wzmiankówanych, $W\!ſt.\,AMR = \frac{r \times AP \times PM + r \times RP \times PM}{AM \times RM} = \frac{r \times AR \times PM}{AM \times RM}$; a $Doſt.\,AMR = \frac{r \times (PM)^2 - r \times AP \times RP}{AM \times RM}$; więc $\frac{r\,W\!ſt.\,AMR}{Doſt.\,AMR}$ albo $Stycz.\,AMR = \frac{r \times AR \times PM}{(PM)^2 - AP \times RP}$; albo położywſzy zamiaſt linii ich wártości Algebraiczne i uczyniwſzy zebranie, będzie $m = \frac{rbt}{tt - bu + uu}$, albo $mtt + muu - mbu - rbt = 0$; zrównanie, należące do koła, iak ſię można było ſpodziéwać.

Ze-

Zeby wynaléśdź śrzodek i promień, trzeba to zrównanie przywiéśdź do poſtaci $yy = \frac{1}{4}aa - xx$. Tym umyſłém oſwobodzi wſzy tt, co mi da $tt - \frac{rb}{m}t - bu + uu = 0$, robię podług (313), $t = \frac{rb}{2m} + y$; i działaiąc tymże ſpoſobém, iak w miéyſcu wzwiankowaném, moie zrównanie przemiéniam, na to: $yy - \frac{rrbb}{4mm} - bu + uu = 0$. Zoſtaie tedy ieſzcze, wyrugówać z niego drugi wyráz względém u; a że mnogość ut niewchodzi w to zrównanie, przeto podług (323), robię proſto $u - \frac{b}{2} = x$; a działaiąc daléy podobnymże ſpoſobém, zrównanie przemiénia ſię na $yy - \frac{rrbb}{4mm} + xx - \frac{bb}{4} = 0$, albo na $yy = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm} - xx$, które przyſtóſówawſzy do zrównania $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, mam $\frac{1}{4}aa = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}$, a zatém promień albo $\frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm})}$.

Teráz tedy żeby znaléśdź śrzodek i oráz naznaczyć promień, zrównanie $t - \frac{rb}{2m} = y$, daie mi znać, że ieżeli poprowadzę liniią AB, równoległą linii PM, to ieſt ieżeli z punktu A poſtawię proſtopadłą $AB = \frac{rb}{2m}$, a oráz ieżeli poprowadzę liniią BCQ równoległą linii AR, to linie QM, będą mi wyrażać ilości y; bo $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{rb}{2m} = y$. Zrównanie znowu $u - \frac{b}{2} = x$, daie mi znać, że ieżeli wezmę na linii AR część $AG = \frac{b}{2}$, to linie GP wyrażać będą ilości x; bo $GP = AP - AG = u - \frac{b}{2} = x$; więc ieżeli przez punkt G, poprowadzę liniią GC równoległą linii PM, to punkt C będzie śrzódkiém. Nadto ieżeli poprowadzi ſię liniia AC, to z przyczyny kąta proſtego G, będzie $AC = \sqrt{[(AC)^2 + (GC)^2]} = \sqrt{(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm})}$; więc liniia AC będzie promiéniém.

Cała tedy rzecz tego wykryślénia, zależy na tém: *Ażeby na śrzodku linii AR poſtawić proſtopadłą* $GC = \frac{rb}{2m}$, *i z punktu C iako ze śrzodka, promiéniém CA, opiſać koło*; każdy kąt MAR, który będzie miał ſwóy wiérſzchołek przy okręgu koła, a oráz przechodzić będzie przez punkta A i R, będzie ſię równał kątowi zadanému. Zeby zaś wykryślić ilość $\frac{rb}{2m}$, nietrzeba więcéy, tylko poprowadzić liniią AO, któraby z liniią AB, czyniła kąt BAO równy kątowi zadanemu; takowa liniia przetnie liniią GC w punkcie ſzukanym C; albowiém w tróykącie proſtokątnym ABC, mamy r : *Sſtycz.* BAC : : AB : BC albo AG

AG, to ieſt, $r : m :: AB : \frac{1}{2}b$; więc AB al.

bo $GC = \frac{rb}{2m}$.

Jeſzcze łatwo daie ſię widziéć, że ca. łe wykryślenie kóńczy ſię na tém, ażeby przez punkt A poprowadzić liniią AO, któraby z liniią AR czyniła kąt RAO równy dopełniéniu kąta zadanego; takowa liniia przetnie w punkcie C, proſtopadłą poſtawioną na śrzodku linii AR, tak że punkt C będzie śrzodkiém, a liniia CA będzie promiéniém.

330. Stąd łatwo będzie można rozwiązać zagadniénie naſtępuiące: *Maiąc wiadome położenie trzech punktów* R, A, R′ (*fig.* 48), *i kąty pod którémi uglądaią ſię liniie* RA, AR′ *z pewnego punktu* M, *żeby wynaléśdź takowy punkt* M. fig. 48.

Na śrzodkach G i G' linii RA, i AR' trzeba poſtawić proſtopadłe GC i $G'C'$; przez punkt A prowadzą ſię liniie AC i AC' czyniące z liniiami AR i AR' każda z każdą, kąty RAC, $R'AC'$ każdy z nich równy dopełniéniu kąta RMA, $R'MA$, pod którym ieſt widziana liniia odpowiadaiąca. Z punktów C i C' iako ze śrzodków, promiéniami CA i $C'A$, opiſuią ſię dwa koła, które ſię wzaiemnie przetną w punktach A i M; a natenczas punkt M będzie ſzukanym punktém. Jeſtto oczywiſty wnioſek z rozwiązania poprzédzaiącego,

To zagadniénie, może ſłużyć do naznaczenia na Mappie kraiu iákiego, położenia punktu, z którego były uglądane trzy przedmioty znaiome.

Gdyby kąty uważone RMA, $R'MA$ były równe kątom $RR'A$, $R'RA$, to w takim

kim razie zagadniénie byłoby nieokréślone, dwa koła zeſzłyby ſię w iedno, i każdy punkt ich ſpólnego okręgu, czyniłby doſyć zagadniéniu.

331. Na trzeci przykład, niechay będzie to zagadniénie; Znaléśdź iednę liniią krzywą albo więcéy, któréby miały naſtępuiącą własność, to ieſt: *Daymy że dwie liniie* AT, AZ, (*fig.* 49) *nakryślone, czynią między ſobą kąt zadany iakikolwiek, rzecz idzie o wynaleziéniu takich linii krzywych, w którychby odległość od każdego punktu* M *do innego punktu ſtałego* F, *wzięta na linii* AZ, *była zawſze w iednakowym ſtòſunku, z drugą odległością* MT, *wziętą od tegóż punktu* M *do linii proſtéy* AT, *biorąc takową odległość ròwnolegle z liniią* AZ. fig. 49.

Z iakiegokolwiek punktu M téy linii krzywéy, zmyślmy ſobie liniią MP, równoległą linii AT, i proſtopadłą MS na liniią AZ; kąt MPS rozumié ſię zadany; a zatém iego wſtawa i doſtawa rozumieią ſię także wiadome; oznaczmy ie ſobie przez p i q, a przez r promień Tablic. * Oznaczmy także liniią AP przez u; PM przez t; i wiadomą AF przez c.

To założywſzy, w tróykącie proſtokątnym MSP, mieć będziém podług (Jeom. 299)

---

* *Można rozumiéć, iak tu w rzeczy ſaméy rozumiémy że ilości* p, q, r. *ſą zadane podług Tablic Trygonometrycznych, ale téż można ie także miéć przez wykryślenie bardzo łatwe, zrobiwſzy tròykąt proſtokątny, w ktòrymby iedén z oſtrych kątów, równał ſię kątowi wiadomému* MPS, *i dawſzy przeciwproſtkątnéy wymiar, iaki ſię ſpodoba. Takową przeciwproſtkątną wziąwſzy za* r, *pozostałe dwa boki, dadzą* p *i* q.

299), $r : Wſt.\ MPS :: MP : MS$, i $r : Wſt.\ PMS$ albo $Doſt.\ MPS :: PM : PS$; to ieſt, $r : p :: t : MS = \frac{pt}{r}$; i $r : q :: t : PS = \frac{qt}{r}$. Więc $FS = PS - PF = PS - AP + AF = \frac{qt}{r} - u + c$; tróykąt zaś proſtokątny MSF, daie $MF = \sqrt{[(MS)^2 + (ES)^2]}$, więc $MF = \sqrt{(\frac{p^2t^2}{r^2} + \frac{q^2t^2}{r^2} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc)}$; albo (z przyczyny że podług (Jeom. 283), $p^2 + q^2 = r^2$), będzie $MF = \sqrt{(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc)}$; a że liniia MF ma ſię mieć do linii MT albo AP w ſtóſunku danym, więc oznaczywſzy takowy ſtóſunek przez g do h, będzie $\sqrt{(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc)} : u :: g : h$; a zatém będzie

$$gu = h\sqrt{(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc)},$$

albo po ſkwadrówaniu i przeſtawiéniu, $h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + (h^2 - g^2)u^2 + \frac{2ch^2qt}{r} - 2ch^2u + h^2c^2 = 0$; zrównanie, wyrażaiące przecinek ſtożkowy (315 i daléy), i które (316) należyć będzie do Ellipſy, ieżeli kwadrat z ilości $-\frac{2qh^2}{r}$ zmniéyſzony o ilość h^2 cztéry razy wziętą, i rozmnożony przez $h^2 - g^2$, będzie ilością przéczącą; to ieſt, ieżeli $\frac{4q^2h^4}{r^2}$

$- 4h^4 + 4h^2g^2$, albo $\frac{4q^2h^4 - 4r^2h^4 + 4r^2h^2g^2}{r^2}$, ieſt ilością przéczącą; albo (z przyczyny że $r^2 - q^2 = p^2$), ieżeli $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ ieſt ilością przéczącą; przeciwnie należyć będzie do hiperboli, ieżeli $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ ieſt ilością twiérdzącą. A zaś będzie należyć do Paraboli, ieżeli $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ będzie zerém, to ieſt ieżeli $4r^2h^2g^2 = 4p^2h^4$, albo ieżeli $rg = ph$; naoſtatek wynaleziona liniia krzywa będzie kołém, ieżeli $h^2 = h^2 - g^2$; co bydź nigdy niémoże tylko w ten czas, kiedyby g było zerém, albo h wyrażało ilość nieskończoną; albowiém w tym oſtatnim przypadku, g^2 powinno bydź zaniedbane względém h^2.

Téraz żeby wykryślić liniią krzywą w każdym z wymiénionych przypadków, nietrzeba więcéy, tylko poſtąpić ſobie w tenże ſpoſób co wyżéy (317 i daléy); ponieważ tam zabawiliśmy ſię około Ellipſy, przeto żeby tém lépiéy okazało ſię podobiéńſtwo działań i wykryśléń względém różnych linii krzywych, przyſtóſuiémy tu do Hiperboli to, co tam było przedſięwzięto względém Ellipſy, to ieſt ſtarać ſię będziémy przyprowadzić naſze zrównanie do téy poſtaci, $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$.

Oſwobadzam tedy naprzód t^2 w zrównaniu wyżéy wynaleziónem, co mi daie $t^2 + (\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r})t + (1 - \frac{g^2}{h^2})u^2 - 2cu + c^2 =$

$= 0$. Zeby z tego zrównania wyrugówać drugi wyráz względém t, robię $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$; ſkąd po ſkwadrówaniu i przeſtawiéniu mam, $t^2 + (\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r})t = yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2}$, a zatém położywſzy w zrównaniu tę wynalezioną wártość, będzie $yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2} + (1 - \frac{g^2}{h^2})u^2 - 2cu + c^2 = 0$.

Teráz tedy trzeba znowu wyrugówać drugi wyráz względém u; ale wprzód uważam, że wyrazy $- \frac{q^2u^2}{r^2} + (1 - \frac{g^2}{h^2}) u^2$, albo $- \frac{q^2u^2}{r^2} + u^2 - \frac{g^2u^2}{h^2}$, albo . . $\frac{r^2u^2 - q^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{r^2}$, daią przemiénić ſię na $\frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{r^2}$; i że dwa wyrazy $\frac{2cq^2u}{r^2} - 2cu$, albo $\frac{2cq^2u - 2cr^2u}{r^2}$, przemiéniaią ſię na $- \frac{2cp^2u}{r^2}$; iako téż, że dwa wyrazy $- \frac{c^2q^2}{r^2} + c^2$, przemiéniaią ſię na $+ \frac{c^2p^2}{r^2}$; bo $r^2 - q^2 = p^2$. Zrównanie tedy poprzédzaiące przemiénia ſię w to, $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r} + \frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2} = 0$, albo wyrugówawſzy mianowni-

ków

ków, (i dla łatwiéyſzego rachunku), zrobiwſzy, $p^2h^2 - r^2g^2 = r^2kk$, będzie $r^2h^2y^2 + c^2h^2p^2 - 2ch^2p^2u + r^2k^2u^2 = 0$.

Oſwobodźmy tedy u^2, ſkąd wypadnie $u^2 - \frac{2ch^2p^2}{r^2k^2} u + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$; teráz zróbmy $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, wprowadziwſzy niewiadomą n; bo w początkowém zrównaniu znayduie ſię mnogość ut (315). Natenczas działaiąc iak wyżéy, i wprowadziwſzy w zrównanie tę nową wártość, będzie $\frac{c^2h^4p^4x^2}{r^4k^4n^2} - \frac{c^2h^4p^4}{r^4k^4} + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$, albo wyrugówawſzy ſpólnego mianownika $\frac{h^2}{k^2}$, i zoſtawiwſzy y^2 ſamo iedno w iednéy części, będzie $y^2 = - \frac{c^2h^2p^4x^2}{r^4k^2n^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} + \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2}$, albo rozmnożywſzy drugą część zrównania przez mnożnika ilości x^2, a oráz wſkazawſzy rozmnożenie przez tegóż mnożnika, będzie $y^2 = - \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2} (x^2 + \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - nn)$; ale że tu rzecz idzie o hiperbolę, przeto należy uważyć, że ilość r^2k^2, która nieco innnego ieſt, tylko $p^2h^2 - r^2g^2$, wyraża ilość przéczącą; albowiém podług uwagi wyżéy położonéy, ilość $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ albo $\frac{4h^2}{r^2} (r^2g^2 - p^2h^2)$, muſi bydź ilością

twiér-

twiérdzącą, chcąc miéć żeby liniia krzywa była Hiperbolą. A zatém trzeba uczynić k^2 ilością przéczącą, to ieſt kładąc wártość iego w zrównaniu, trzeba położyć $r^2g^2 - p^2h^2$, zamiaſt $p^2h^2 - r^2g^2$. Zrównanie tedy naſze przemiénia ſię w to, $y^2 = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}\left(x^2 - \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - nn\right)$; które przyſtóſowawſzy do zrównania $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4}aa)$, dla wynalezienia śrzednic doſtawnych, miéć będziém $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}$, i $\frac{1}{4}aa = \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} + nn$; ſkąd łatwo wyciąga ſię a i b; to ieſt znaydą ſię dwie śrzednice doſtawne, które, iak zobaczymy zaráz, ſą też razém dwiéma oſiami téyże Hiperboli.

Naznaczmy więc kiérónek śrzednic doſtawnych, do których ſtóſuie ſię zrównanie naſze przemiénioné. Podług tego co ſię rzekło wyżéy (317), trzeba wykryślić te dwa zrównania, $t + \frac{cq}{r} = \frac{qu}{r} = y$, i $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; ale że, iak widzieliśmy dopiéro, k^2 powinno bydź ilością przéczącą w przypadku hiperboli, o którą tu rzecz idzie, więc drugie z tych dwóch zrównań, trzeba przemienić na to, $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; nieodmiéniam znaku położonego przed wyrazém w którym zawiéra ſię x, chociaż w nim znayduie ſię także k^2, bo ilość n może bydź wzięta po-

podług upodobania tak za twiérdzącą iak za przéczącą. Trzeba tedy, poſtępuiąc ſobie daléy tymże ſpoſobém, iak w miéyſcu przerzeczoném, poprowadzić przez punkt A równolegle linii PM, liniią $AB = \frac{cq}{r}$, a potém poprowadziwſzy znowu przez punkt B inną liniią BI, równoległą linii AZ, trzeba wznaczyć podług upodobania część BK, i wyciągnąć liniią KL, równoległą linii PM, i taką ażeby było $BK : KL :: r : q$; natenczas ieżeli przez punkt B i przez punkt L poprowadzi ſię liniia LBQ, któraby ſpotykała ſię z liniią PM w punkcie Q, to liniie QM wyrażać będą ilości y. Albowiém $QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t - QI + \frac{cq}{r}$; tróykąty zaś podobne ſobie BKL i BQI, daią $BK : KL :: BI$ albo $AP : QI$; to ieſt $r : q :: u : QI = \frac{qu}{r}$; więc $QM = t - \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y$.

Ale można ieſzcze ſkrócić wykryślenie, prowadząc zaráz od punktu F liniią FB proſtopadłą na TA; gdyż iawna ieſt, że kąt FAB równa ſię kątowi APM, a zatém że w tróykącie proſtokątnym ABF, będzie $r : q :: c : AB = \frac{qc}{r}$; a tak, z przyczyny że liniia QM ieſt równoległa linii AB, liniie y ſą proſtopadłémi na BQ, więc liniia BQ, ieſt kierónkiém iednéy z oſiów, gdy tym czaſém druga muſi bydź równoległa linii QM.

Nieidzie tedy iuż więcéy, tylko o wynalezienie śrzodka. Lecz drugie zrównanie $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, znać mi daie, że trzeba

wziąść

wziąść naprzeciwko ilościów u, ilość $AG = \frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$, i poprowadzić liniią GC równoległą linii PM albo proſtopadłą na BQ; takowa zaś liniia GC odznaczy punkt C na początek ilościów x, i na ſrzodek. Jakóż ilości x powinny rachówać ſię na linii CQ, bo od niey rachuią ſię ilości y; zrównanie zaś $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, albo $AP + AG = \frac{AG \times x}{n}$, albo $GP = \frac{AG \times x}{n}$, daie znać, że tè liniie x, poczynaią ſię razém z liniiiami GP, więc liniie x muſzą poczynać ſię w punkcie C, a zatém nieſą inne tylko liniie CQ; więc punkt C ieſt ſrzodkiém.

Z Ellipſą poſtąpić ſobie trzeba tymże ſamym ſpoſobém.

Co zaś do Paraboli, ponieważ w takim razie, ieſt $rg = ph$, iak widzieliśmy wyżéy, więc zrównanie wyrażone w ilościach y i u, które mieliśmy po wyrugówaniu drugiego wyrazu względém t, i po wprowadzeniu ilości p^2 zamiaſt $r^2 - q^2$, odmiénia ſię, położywſzy w wártości ilości k^2, zamiaſt g, wártość iego $\frac{ph}{r}$, wyciągnioną z zrównania $rg = ph$, odmiénia ſię mówię w to, $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2} = 0$, albo $y^2 = \frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2}$; które żeby przywiéśdź do poſtaci zwyczaynéy zrównania należącego do Paraboli, robię, podług tego co ſię rzekło (321), $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2}$

$= nx$, i mam $yy, = nx$; a po wykryśleniu, (iak w poprzedzaiącym przypadku), zrównania $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, którego użyliśmy do wyrugówania drugiégo wyrazu względém t, łatwo będzie można wykryślić zrównanie $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, w ſpoſób podobny tamtemu co wyżéy (321); to ieſt, że oſwobodziwſzy u, co da $u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2nx}{2cp^2}$, bierze ſię na linii AP (fig. 50), część $AG = \frac{1}{2}c$, a fig. 50.
poprowadziwſzy liniią GC równoległą linii PM, punkt C będzie początkiém ilościów x, które nieinne będą tylko CQ; tak że liniia CQ będzie kierónkiém ſrzednicy, wiérſzchołek iéy będzie w punkcie C, a palirzędną będzie n; któréy wártość wynaydzie ſię iak naſtępuie: Ponieważ $AG = \frac{1}{2}c$, więc będzie $GP = AP - AG = u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2nx}{2cp^2} = \frac{r^2n}{2cp^2} \times CQ$; więc $n = \frac{2cp^2 \times GP}{r^2 \times CQ}$; równoległe zaś PQ, CG i AB, daią $CQ : GP :: CF : GF :: BF : AF$; to ieſt $CQ : GP :: BF : c$; więc $GP = \frac{c \times CQ}{BF}$; położywſzy tę wártość zamiaſt GP w wártości ilości n, będzie $n = \frac{2c^2p^2}{r^2 \times BF}$; ilość wiadoma, bo c, p, r ſą ilości zadane, a BF ieſt wiadoma z wykryślénia. Téy wártości można dać ieſzcze proſciéyſze wyrażenie, uważywſzy, że tróykąt proſtokątny FAB, daie $r : p :: AF : BF :: c : BF$; więc $BF = \frac{cp}{r}$, a zatém $n = \frac{2(BF)^2}{BF} = 2BF$.

Przyſtóſowanie tychże Fundamentów; do niektórych zagadnnién określonych.

332. Rozwiązawſzy drugie z położonych wyżéy zagadnién nieokreślonych (329), użyliśmy go (330), do rozwiązania innego zagadnienia określonego. To zaś oſtatnie (acz nieiawnie) uważaliśmy znowu, iakoby zawiéraiące w ſobie dwa inne zagadnienia oba nieokréślone, i które będąc tegóż ſamego gatunku co było pierwſze, rozwiązały ſię tymże ſamym ſpoſobém. Przecięcie ſię ſpólne dwóch linii krzywych czyli dwóch kół, o co ſzło w obu oſobnych zagadnieniach, dało rozwiązanie zagadnienia określonego. Kiedy zrównanie oſtateczne, wyrażaiące warunki zagadnienia, przechozi drugi ſtopień, to w rozwiązaniu go, podobnież trzeba ſobie poſtąpić. W przypadkach w których możnaby nieużywać tylko iednéy niewiadoméy, używa ſię ich dwie, i uſiłuie ſię z warunków zagadnienia ułożyć ſobie dwa zrównania, te będąc wykryślone z oſobna, każde z nich da liniią krzywą, któréy każdy punkt czyni zadoſyć zrównaniu odpowiadaiącemu; ieżeli zagadnienie nieieſt niepodobne, to dwie liniie krzywe ſpotkaią ſię z ſobą w iednym lub w wielu punktach, podług tego, ile zrównanie może mieć iedno albo wiele rozwiązań, albo też kiedy zawiéra w ſobie wiele przypadków zawiſłych od tychże ſamych ilościów zadanych, i zaſadzaiących ſię na tychże ſamych rozumówaniach. Takowe przecięcia daią rożne rozwiązania danego zagadnienia.

Jawna tedy ieſt, że ilekroć dwa zrównania z dwiéma niewiadomémi, niebędą przechodzić drugiego ſtopnia, to rozwiązanie nigdy

gdy zależyć niebędzie, iak tylko naywięcéy od ſpólnego przecięcia ſię dwóch Przecinków ſtożkowych. Zamiaſt że w tychże ſamych przypadkach, gdyby ſię nieużyło, iak tylko iednéy niewiadoméy, albo przy pomocy dwóch zrównań wynalezionych, gdyby wyrugówała ſię iedna z dwóch niewiadomych, to zrównanie podnioſłoby ſię do trzeciego, a częściéy aż do czwartego ſtopnia. Ale ieżeli iedno z dwóch zrównań, albo też oba, przechodzą drugi ſtopień, to natenczas rozwiązanie zawiſłoby od linii krzywych wyżſzego ſtopnia, aniżeli ſą przecinki ſtożkowe.

Zabawmy ſię teraz niektóremi przypadkami zagadnień, nieprzechodzących czwártego ſtopnia.

333. Obierzmy ſobie na pierwſze zagadnienie: *Zeby wynaléśdż dwie średnie proporcyonalne między dwiéma danémi liniiami* a *i* b.

Jeżeli ſobie oznaczymy przez t i u, te dwie proporcyonalne, mieć będziém naſtępuiącą progreſſyą $\div a : t : u : b$, z któréy wynikaią te dwie proporcye. $a : t :: t : u$ i $t : u :: u : b$, a zatém i te dwa zrównania, $au = t^2$ i $bt = u^2$, oba należące proſto do Paraboli. Dla tego poprowadziwſzy dwie liniie nieokreślone AZ, AX (fig. 51.) czyniące między ſobą kąt iakikolwiek, (dla tém większéy łatwości, można go rozumieć bydź proſty), a potém na linii AZ iako na średnicy, i z punktu A iako z wierſzchołka téyże średnicy, nakryśliwſzy Parabolę (302), któréyby palirzędną należącą do średnicy AZ było a, i w któréyby kątém ſpółrzędnych był kąt XAZ, to takowa parabola da rozwiązanie zrównania $au = t^2$, tak że liniie AB, będą odpowiadać ilościóm u, a liniie PM, będą odpowiadać ilościóm t. Podobnież na linii AX iako średnicy fig. 51.

dnicy z punktu A iako z wiérſzchołka, nakryśliwſzy parabolę, któréyby palirzędną należącą do śrzednicy AX było b, a kątém ſpółrzędnych był kąt XAZ, to takowa parabola rozwiązałaby zrównanie $bt = u^2$, tak że liniie AP; będą odpowiadać ilościóm t, a liniie PM; ilościóm u. Ale ażeby oraz i zagdniénie było rozwiązane, to trzeba żeby te oba zrównania, $au = t^2$ i $bt = u^2$ miały miéyſce razém, to ieſt żeby wártość ilości u była w obu iednakowa, iako téż i ilości t. Lecz to oczywiście dopełnia ſię w punkcie M, gdzie z ſobą ſpotykaiaią ſię dwie parabole; albowiém, ponieważ ilości u rachuią ſię na linii AZ, a ilości t na linii AX, albo równolegle linii AX; więc oczywiſta ieſt, że poprowadziwſzy liniie MP i MP równolegle liniióm AX i AZ, wártość MP ilości u w Paraboli AMM; ieſt taż ſama co wártość AP ilości u w Paraboli AMM, podobnież wártość AP ilości t w Paraboli AMM; ieſt taż ſama, co wártość PM ilości t w Paraboli AMM; a do tego iawna ieſt, że niéma tylko punkt M, gdzie wártości ilościów u i t w obu Parabolach, wypadałyby też ſame, chybabyto było w punkcie A, gdzie także te dwie liniie krzywe ſpotykaią ſię z ſobą. Ale ponieważ w tym punkcie A tak ilość u iak t ſą zerém, więc iawna ieſt, że takowy punkt niémoże zadoſyć uczynić zagadniéniu. Wártościami tedy ilościów u i t, ſą liniie AP i PM, a punkt M ieſt punktém ſpotkania ſię z ſobą dwóch linii krzywych.

334. Wreſzcie, chociaż zawſze można dóyśdź rozwiązania ſzukanego, przez oſobne wykryślenie zrównań wynalezionych, atoli czaſém, te wykryślenia daią ſię uczynić prościéyſzémi, przygotówawſzy ſobie zrównania w pewny ſpoſób. *Np.* dodawſzy z ſobą dwa zrównania $au = t^2$ i $bt = u^2$, bę-

dzie

dzie $au + bt = u^2 + t^2$; zrównanie, należące do koła, rozumieiąc że ilości u i t biorą ſię na liniiach proſtopadłych iedna drugiéy. A lubo wykryślenie Paraboli ieſt doſyć łatwe, przecięż wykryślenie koła ieſt ieſzcze łatwiéyſże, a zatém w teraźniéyſzym przypadku wolałbym wykryślić naprzód tylko zrównanie ſamo $au = t$, iak wyżéy; a potém wykryśliłbym zrównanie należące do koła, $au + bt = n^2 + t^2$, przemiéniwſzy go w zrównanie naſtępuiące, $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - xx$, przez wyrugówanie drugich wyrazów względém t i u, robiąc $t - \frac{1}{2}b = y$, i $u - \frac{1}{2}a = x$. A natenczas wziąwſzy $AB = \frac{1}{2}b$, i poprowadziwſzy liniią BQ, równoległą linii AP, miałbym liniią QM na wártość ilości y. Potém wziąwſzy $AO = \frac{1}{2}a$, i poprowadziwſzy liniią OC równoległą linii AX, miałbym liniią CQ na wártość ilości x. A zatém z punktu C iako ze śrzodka, promiéniém $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$ to ieſt promiéniém AC, opiſałbym koło, które przeciąwſzy parabolę AM w punkcie M, dałoby mi liniie MP i AP na wártości ilościów t i u.

335. Takowe wykryślenia można wielorako odmiéniać; można *np.* dodać iedno z dwóch zrównań, z drugiém rozmnożoném przez ilość iakąkolwiek upodobaną $\frac{l}{n}$, bądźto twiérdzącą bądź téż przéczącą, ſkądby mi wypadło, $au + \frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$; zrównanie, mogące należyć do Ellipſy albo do Hiperboli, podług wártości, iaka ſię da ilości $\frac{l}{n}$; tak iż wykryślenie można odbydź przez tę lub owę z tych dwóch linii krzywych, w podobny ſpoſób iak uczyniło ſię przez koło. Można na-

weț

wet odbydź go razém przez obie, albo też tylko przez iednę złączoną z kołém, a to naznaczaiąc ilości $\frac{l}{n}$ wártości przyzwoite, i które daią ſię łatwo wynaléſdź podług tego co ſię rzekło (319 i daléy).

336. Obiérzmy ſobie znowu na drugi przykład to Zagadniénie. *Zeby rozdzielić kąt albo łuk zadany na trzy części równe.*

fig. 52. Niechay będzie EO (fig. 52) łuk zadany do rozdzielénia; punkt A iego śrzodek; zmyślmy ſobie że EM ieſt trzecią częścią tego łuku, a poprowadziwſzy promiénie FA, MA ſpuśćmy proſtopadłe MP, OR. Liniie OR i AR, oznaczaiące wſtawę i doſtawę łuku zadanego OE, rozumieią ſię bydź wiadome; nazwiymy ie d i c; promiéń AF niech będzie r; naoſtatek niewiadome AP i PM nazwiymy u i t.

To założywſzy, tróykąt proſtokątny APM, daie $u^2 + t^2 = rr$. A troykąty APM, ARS podobne ſobie, daią $AP : PM :: AR : RS$; to ieſt $u : t :: c : RS = \frac{ct}{u}$. Lecz ieżeli przedłuży ſię proſtopadła MP aż do ſpotkania ſię z okręgiém w punkcie V, łuk MV będzie równy łukowi MO, każdy z nich będąc dwa razy tak wielki iak ieſt ME; więc kąt $OMS = AMP = ASR$, z przyczyny równoległych $= OSM$. Więc tróykąt SOM, ieſt równoramiénny, a zatém $OS = OM = MV = 2t$; a że $OR = OS + SR$, więc będzie $d = 2t + \frac{ct}{u}$, albo $2tu + ct = du$, albo $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$.

Dwa tedy zrównania maiące bydź wykryślone, będą te, $u^2 + t^2 = r^2$, albo $t^2 = r^2 - u^2$, i $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$. Pierwſze iuż ieſt ze

wſzyſtkiém wykryślone, iako należące do tegóż ſamego koła EMO.

Co zaś do drugiego, takowe należy do Hiperboli (326); a że w niém niedoſtaie obu kwadratów, więc podług tego co ſię rzekło w miéyſcu wſpomnioném, trzeba wſzyſtkie wyrazy zawiéraiące w ſobie ilość u, przeſtawić do iednéy części; ſkąd wypadnie $tu - \frac{1}{2}du = - \frac{1}{2}ct$, albo $\frac{1}{2}du - tu = \frac{1}{2}ct$; zrobiwſzy $\frac{1}{2}d - t = y$, i położywſzy zamiaſt t onego wártość, będzie $uy = - \frac{1}{2}cy + \frac{1}{4}cd$, albo $uy + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{4}cd$. Robię potém $u + \frac{1}{2}c = x$, i mam $xy = \frac{1}{4}cd$; zrównanie należące do Hiperboli, uważonéy między ſwémi końcotycznémi, które wynayduią ſię w ſpoſób naſtępuiący.

Zrównanie $\frac{1}{2}d - t = y$, znać daie, że ieżeli przez punkt A, początkowy ilościów u i t, poprowadzi ſię liniia AB, równoległa linii PM, i równa linii $\frac{1}{2}d$, a potém ieżeli poprowadzi ſię druga liniia QBC równoległa linii AP, to liniie QM, rachówane w przeciwném rozumiéniu względém PM, będą oznaczać ilości y. Jakóż $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2}d - t = y$; więc liniia CQ, ieſt kiérónkiém iednéy z końcotycznych.

Drugie znowu zrównanie $u + \frac{1}{2}c = x$, znać daie, że ieżeli przedłuży ſię liniia AP ku G, o ilość $AG = \frac{1}{2}c$, $= \frac{1}{2}AR$, to liniie GP albo onym równe CQ (poprowadziwſzy liniią GC równoległą linii PM), będą oznaczać ilości x; więc punkt C ieſt śrzodkiém, a liniie CQ i CG ſą końcotycznémi. A zatém podług ſpoſobu wyżéy podanego (289), wykryśli ſię hiperbola między końcotycznémi, przechodząca przez punkt A, iak o tém znać daie zrównanie $xy = \frac{1}{4}cd = \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}d = AG \times AB = CB \times AB$, która przetnie koło w punkcie ſzukanym M.

Gdyby łuk EO miał więcéy iak 90°, to natenczas iego doſtawa AR padaiąca z przeciwnéy ſtrony, byłaby przécząca; dla czego w zrównaniach, trzeba rozumiéć c bydź ilością przéczącą. Gdyby zaś łuk EO był więkſzy nad 180° a mnieyſzy od 270° iaki ieſt łuk $OEO'E$, to wſtawa i doſtawa iego byłyby przéczące; a zatém w tychże zrównaniach wyżéy położonych, trzebaby odmiénić znaki przed głoſkami c i d.

Jeżeli przedłuzy ſię liniia GC o ilość $CG' = CG$, a liniia CB o ilość $CB' = CB$, i ieżeli poprowadzą ſię liniie $B'A'$ i $G'A'$ równoległe liniióm CG' i CB', tudzież ieżeli między témi liniiami CG' i CB' (przedłużonémi nieokréślenie) iako między końcotycznémi, wykryśli ſię Hiperbola, przechodząca przez punkt A' to takowa Hiperbola ſpotka ſię z kołém w dwóch punktach A' i M', tak iak piérwſza ſpotyka ſię z niém w punktach M i M''. Z tych cztérech punktów trzy, to ieſt M, M' i M'' ſą godne uwagi. Piérwſzy z nich daie łuk EM, wynoſzący trzecią część łuku zadanego EO. Drugi M', daie łuk $E'M'$ wynoſzący trzecią część łuku $E'O$, który ieſt ſpełniéniém łuku EO. Naoſtatek trzeci M'' daie łuk $E'M''$ wynoſzący trzecią część łuku $OEO'E'$ to ieſt łuku OE pomnożonego pół okręgiém.

Jakóż, łuk $E'O$ ma za wſtawę i doſtawę ſwoię liniie RO i AR, tak iako i łuk EO, tylko iedynie z tą różnicą, że ilość AR uważana iako doſtawa łuku $E'O$ więkſzego nad 90° ieſt przécząca; lecz ta odmiana nietycze ſię tylko drugiego zrównania, i odmiénia $xy = \frac{1}{4}cd$, na $xy = -\frac{1}{4}cd$, które ieſt zrównanie należące do Hiperboli $A'M'$, i daie znać, że rozwiązanie tego przypadku, zależy na przecięciu M' tego ramiénia Hiperboli z kołém,

(zo-

(zobaczymy zaś w krótce, dla czego punkt A' niémoże zagadniéniu zadoſyć czynić), więc $P'M'$ ieſt wſtawą łuku ſzukanego, w takowym drugim przypadku. Więc takowym żądanym łukiém ieſt łuk $E'M'$, to ieſt że łuk $E'M'$ ieſt trzecią częścią łuku $E'O$.

A co ſię tyczé trzeciego rozwiązania, ieżeli pomnoży ſię łuk EO o 180°, co wykonywa ſię zrobiwſzy $E'O' = EO$, to natenczas łuk $EOE'O'$ miéć będzie za wſtawę i doſtawę liniie $R'O'$ i AR', które koniecznie muſzą bydź równe liniióm RO i AR, iedynie z tą różnicą, że piérwſze przypadaiąc z przeciwnych ſtrón tym drugim, ſą przéczące; więc ażeby miéć rozwiązanie odpowiadaiące temu przypadkowi, nietrzeba nic więcéy, tylko ilości c i d rozumiéć przéczącémi. Lecz ta odmiana nieczyni żadnéy odmiany w zrównaniu w które wchodzą c i d, to ieſt w zrównaniu $xy = \frac{1}{4}cd$; więc piérwſza Hiperbola, w ſwoiém przecięciu M'', powinna dać rozwiązanie tego trzeciego przypadku; więc $P''M''$ ieſt wſtawą łuku ſzukanego w takowym trzecim przypadku; a zatém takowym łukiém, ieſt $E'M''$ to ieſt że łuk EM'' ieſt tzecią częścią łuku $EOE'O'$.

A tak toż ſamo wykryślenie, króre ſłuży do wynaleziénia trzeciéy części łuku zadanego A, ſłuży oraz do wynaleziénia trzeciéy części, łuków od $180^{\circ} - A$, i od $180^{\circ} + A$.

Tu daie ſię przyſtoſówać to wſzyſtko, co ſię powiedziało wyżéy (335) o różnych przecinkach ſtóżkowych, których można użyć do wykryślénia, połączywſzy podług upodobania, dwa zrównania wyrażone w ilościach u i t iedno z drugiém.

Co zaś do czwartego przecięcia, takowe rzekliśmy że przypada w punkcie A', co ieſt

oczy-

oczywiſta, bo hiperbola muſi przechodzić przez punkt A'; który wynayduie ſię zrobiwſzy $B'A' = AB$, a $B'C = CB$, ſkąd winika że $AR' = AR$, a $R'A' = RO$; więc punkt A' należy do okręgu. Ale nowego rozwiązania niedaie, dla tego, że ſtał ſię wiadomym i wynalezionym przez takie działania, które niezawiſły od zrównań rozwięzuiących zągadniénie.

337. Jeżeli z zrównania $2tu + ct = du$ wyżéy wynalezionego, wyciągnie ſię wartość głoſki t, dla położenia iéy w wzrównaniu $u^2 + t^2 = r^2$, to wziąwſzy zamiaſt ilości $c^2 + d^2$, iéy wartość r^2, przeſtawiwſzy i uczyniwſzy zebranie, będzie $4u^4 + 4u^3 - 3r^2u^2 - 4cr^2u - r^2c^2 = 0$, albo $4u^3(u + c) - 3r^2u(u + c) - cr^2 \times (u + c) = 0$, a rozdzieliwſzy przez $u + c$ będzie, $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, zrownanie, w którém zawiérać ſię muſzą trzy przypadki wyżéy rozebrane; a zatém powinno miéć trzy piérwiaſtki. Jakóż z wykryślenia pokazuie ſię, że głoſka u ma w rzeczy ſaméy trzy wártości; to ieſt AP, AP', i AP''; z których dwie oſtatnie przypadaiąc z przeciwnéy ſtrony piérwſzéy wártości, daią znać, że to zrównanie ma trzy piérwiaſtki albo wártości głoſki u, takie że z nich ſą dwie przéczące, to ieſt $u = -AP'$, i $u = -AP''$, a trzecia ieſt twiérdząca, to ieſt $u = AP$.

338. Zrównanie $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, albo $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, należy do przypadku który wyżéy (160) nazwaliśmy *przypadkiém przybliżonym*; a ponieważ piérwiaſtkami tego zrównania ſą doſtawy tych trzech łuków, to ieſt $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180^\circ - EO)$ i $\frac{1}{3}(180^\circ + EO)$, więc przy pomocy Tablic wſtawnych można zawſze wynaléśdź trzy piérwiaſtki każdego zrównania trzeciego ſtopnia, w przypadku przerzeczonym, a to przez przybliżenie

nie ſię doſtateczne i niezabawne, w ſpoſób naſtępuiący. Oznaczywſzy ſobie przez $u^3 - pu + q = 0$, wſzelkie iakiekolwiek zrównanie trzeciego ſtopnia w przypadku przybliżonym, i przyſtóſówawſzy go do zrównania $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, miéć będziém $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, tudzież $-\frac{cr^2}{4} = q$; z piérwſzego z tych dwóch zrównań, wyciąga ſię $r = \sqrt{(\frac{4}{3}p)}$, a z drugiego $c = -\frac{3q}{p}$. Teráz ieżeli oznaczymy ſobie przez R promień Tablic, to wynaydziémy doſtawę odpowiadaiącą łukowi, EO taką iaka znayduie ſię w Tablicach, wyrachówawſzy czwárty wyráz téy proporcyi, $r : c$ albo $\sqrt{\frac{4}{3}p} : \frac{3q}{p} :: R :$ do czwarrtego wyrazu; takowy czwárty wyráz to ieſt $\frac{3qR}{p\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}$ znaleziony w Tablicach, będzie wſtawą dopełniénia łuku EO; a zatém dodawſzy 90 ſtopniów do liczby ſtopniów wynalézionych, albo przeciwnym ſpoſobém odiąwſzy liczbę ſtopniów wynalezionych, od 90 ſtopniów, (podług tego ieżeli q położone w zrównaniu będzie ilością twiérdzącą albo przéczącą), wypadnie łuk EO, który tu oznaczmy ſobie przez A. To maiąc, wynayduią ſię w tychże Tablicach doſtawy tych trzech łuków, jakoto $\frac{A}{3}$, $\frac{180^\circ - A}{3}$ i $\frac{180^\circ + A}{3}$; które żeby odpowiadały promiéniowi r, to ieſt żeby były wyrażone w takichże częściach iak ieſt promień r, trzeba każdą z nich rozmnożyć przez $\frac{r}{R}$, albo przez $\frac{\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}{R}$; albowiém żeby do tego ſtanu przyprowadzić np. Doſt. $\frac{A}{3}$ wziętą w Tablicach, trzeba wyrachówać tę tę proporcyą, $R : Dost. \frac{A}{3} :: r$ do dostawy odpowiadaiącéy temuż łukowi, wziętemu w kole któréby miało za promień r, to ieſt do AP albo u; a zatém trzy wártości głoſki u, będą naſtępuiące, $u = \frac{\surd(\frac{4}{3}p)}{R} dost. \frac{A}{3}$, $u = \frac{\surd(\frac{4}{3}p)}{R} dost. \frac{180° - A}{3}$, i $u = \frac{\surd(\frac{4}{3}p)}{R} dost. \frac{180° + A}{3}$; w których, to uważać należy, aby dać znak — tym wártościóm, których łuk przechodzić będzie 90°, chyba żeby był większy nad 270°. Te działania można znacznie ułatwić przy pomocy Logarytmów.

339. Obierzmy ſobie ieſzcze do rozwiązania to zagadniénie, powſzechniéyſze od tamtego króre rozwiązaliśmy wyżéy (211):
fig. 53. *Z danego punktu* D (*fig.* 53), *wiadomego z położenia względém dwóch linii AR, AP czyniących między ſobą kat także wiadomy, poprowadzić liniią* DP, *tak ażeby iéy część* RP *zawarta między pomiénionémi liniiami, równała ſię linii danéy?*

Z punktu D, poprowadźmy liniią DS, proſtopadłą linii AP przedłużonéy, i liniią DO równoległą linii AR; poprowadźmy także z punktu R, liniią RN proſtopadłą linii AP. Linii DO, DS, OS i AO rozumieią ſię bydź wiadome, iużto dla tego że punkt D ieſt wiadomy, iuż téż że kąt RAP albo onego ſpełniénie $RAN = DOS$, ieſt także wiadome. A zatém oznaczmy ſobie DO przez r; DS przez p; OS przez q; AO przez d; a liniią ktoréy liniią RP ma ſię równać, przez c, niewiadome zaś AP i AR oznaczmy ſobie przez u i t.

To założywſzy, tróykąty DSO, RNA podobne ſobie, dadzą $DO : DS :: AR : RN$, i $DO : OS :: AR : AN$; to ieſt, $r : p :: t : RN = \frac{pt}{r}$, i $r : q :: t : AN = \frac{qt}{r}$, a zatém będzie $NP = \frac{qt}{r} + u$; tróykąt zaś proſtokątny RNP, daie $(RN)^2 + (NP)^2 = (RP)^2$; to ieſt $\frac{qqtt}{rr} + \frac{2qut}{r} + uu + \frac{p^2t^2}{rr} = cc$, albo (z przyczyny że w tróykącie DSO, $p^2 + q^2 = r^2$), będzie $t^2 + \frac{2qut}{r} + u^2 = cc$.

Ale że mamy dwie niewiadome, więc trzeba nam mieć dwa zrównania; a zatém znowu dwa tróykąty DOP, RAP podobne ſobie, daią $DO : RA :: OP : AP$; to ieſt $r : t :: d + u : u$, więc $ru = td + ut$. Takie tedy ſą dwa zrównania, które trzeba wykryślić, chcąc mieć rozwiązanie zagadnienia. Pierwſze (319) należy do Ellipſy, a drugie do Hiperboli.

Zeby piérwſze z nich wykryślić, robię $t + \frac{qu}{r} = y$, a działaiąc iak wyżéy w przykładach temu podobnych, mieć będę $yy - \frac{qquu}{rr} + uu = cc$, (albo z przyczyny że $- \frac{qquu}{rr} + uu = (\frac{rr - qq}{rr}) uu = \frac{ppuu}{rr}$), będzie $yy + \frac{ppuu}{rr} = cc$. Robię $u = \frac{lx}{n}$ (324); i mam $yy + \frac{ppllxx}{rrnn} = cc$, albo (z przyczyny że iednéy z niewiadomych l i n mogę naznaczyć wártość iaka mi ſię ſpodoba), zrobiwſzy $l = r$, mieć będę $yy = cc - \frac{ppxx}{nn} = \frac{pp}{nn}(\frac{ccnn}{pp} - xx)$. To zrównanie

nie przyſtóſówawſzy do zrównania $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, znalezlibyśmy wártości obu śrzednic doſtawnych a i b, iakoto $a = \frac{2cn}{p}$, a $b = 2c$. Wynaydźmy teráz ich położenie i wártość ilości n; ale ażebyśmy tém lépiéy poięli użycie tego wykryślenia, zmyślmy ſobie wprzód, iż naznaczywſzy ilości u albo AP koléyno rożne wártości, zmyślmy ſobie mówię, poprowadzone liniie PM równe odpowiadaiącym wártościóm ilości t, i równoległe linii AR, ſkąd powſtanie liniia krzywa, nad którą zabawiamy ſię teráz. To założywſzy, ieżeli na linii AP, wznaczymy liniią AK wziętą podług upodobania, i poprowadziwſzy liniią KL równoległą linii PM, któraby miała ſię do $AK :: q : r$, miéć będziém $QM = PM + PQ = t + \frac{qu}{r}$, z przyczyny tróykątów ſobie podobnych AKL, APQ; więc $MQ = y$; więc AQ ieſt kierónkiém iednéy z dwóch śrzednic na któréy maią rachówać ſię ilości x. Lecz zrównanie $u = \frac{l}{n}x = \frac{r}{n}x$, daie znać, że ilości x poczynaią ſię tegóż ſamego czaſu co ilości u, więc ilości x, oznaczaią ſię przez liniie AQ. A tym ſpoſobém, zrównanie $u = \frac{rx}{n}$ przemiénia ſię w to, $AP = \frac{r \times AQ}{n}$, z którego wyciąga ſię $n = \frac{r \times AQ}{AP}$, albo ta proporcya $AP : AQ :: r : n$; to ieſt $AK : AL :: r : n$; a że liniia AK, ieſt wzięta podług upodobania, więc można ią rozumiéć bydź $= r$, ſkąd wyniknie $n = AL$.

Nie-

Niezoſtaie tedy tylko podług (252) wykryślić Ellipſę, któréyby śrzednice doſtawne czyniły między ſobą kąt, równy kątowi AQM, i były takie, ażeby ta, co ma za kierónek AQ, równała ſię ilości $\frac{2cn}{p}$, a ta co má za kierónek AR, równała ſię ilości $2c$. Takowa Ellipſa wykryślona, da rozwiązanie piérwſzego zrównania.

Zeby zaś wykryślić drugie zrównanie $ru = dt + ut$ albo $ru - ut = dt$, podług fundaméntów poprzédzaiących, robię $r - t = y'$, a potém $u + d = x'$, przez co zrównanie dopiéro wzwyż wymiénione, przémiénia ſię na to, $x'y' = rd$, które należy do Hiperboli uważonéy między kóńcotycznémi. A zatém podług zrównania $r - t = y'$, biérze ſię na linii AR ilość $AT = r = OD$; to ieſt przez punkt D prowadzi ſię liniia DTV równoległa linii AP; natenczas liniie VM, wyrażać będą ilości y', rachuiące ſię od V ku M, to ieſt w rozumiéniu przeciwném, iak ſię rachuią liniie PM; albowiém $VM = PV - PM = r - t$; więc $VM = y'$. Potém podług zrównania $u + d = x'$, bierze ſię $AO = d$, to ieſt, że przez punkt D poprowadzi ſię liniia DO równóległa linii AT; a natenczas liniie DV będą wyrażać ilosci x'; bo $DV = OP = OA + AP = d + u$. A zatém między liniiami DO i DV iako kóńcotycznémi, wykryśli ſię Hiperbola, przechodząca przez punkt A; z przyczyny że $x'y' = rd = AO \times AT$. Takowa Hiperbola ſpotka ſię z Ellipſą w dwóch punktach M i M', przez które poprowadziwſzy liinie MR, $M'R'$, równoległe linii AP, pokażą ſię dwa punkta R i R', takie, że ieżeli przez nie i przez punkt D poprowadzą ſię liniie DRP, $DP'R'$, części PR i $P'R'$ zawarte między

ra-

ramionami kątów RAP, $R'AP'$ równych ieden drugiému, takowe mówię części, równać ſię będą danéy linii c.

Jeżeli przedłużywſzy kóńcotyczne, wykryśli ſię Hiperbola naprzeciw położona
fig. 54. $M''A'M'''$ (fig. 54), to takowa w przypadku ſpotkania ſię z Ellipſą, wſkaże dwa nowe punkta M'', M''', przez króre poprowadziwſzy liniie równoległe linii AP, pókażą ſię na linii AT dwa nowe punkta R'', R''', takie, że ieżeli przez nie i przez punkt D poprowadzą ſię dwie liniie, to części takowych linii zamknięte między ramionami kąta TAS, będą także równać ſię danéy linii c. Takim tedy ſpoſobém, mówiąc w powſzechności, należy ſobie poſtąpić, w rozwięzówaniu Zagadnień okreſlonych, kiedy nieprzechodzą czwartego ſtopnia.

340. Gdyby rozwięzuiąc zagadnienie, nieużyło ſię było tylko iednéy niewiadoméy, to iednakże niemniéy może ſłużyć ten ſpoſób, wprowadziwſzy nową niewiadomą. Np. gdyby zadane było to zagadnienie; *Maiąc*
fig. 55. *wiadomą ſtrzałkę* CP *ucinka kulowego* (*fig.* 55), *i bryłówatość drugiego ucinka maiącego za ſtrzałkę reſztę* PM *śrzednicy, iakby wynaléśdź śrzednicę kuli?*

Niechay będzie $r:c$ ſtóſunek promiénia do okręgu, a, ſtrzałka CP; t, ſtrzałka PM; to $a+t$ będzie śrzednicą koła; a bryłówatość ucinka maiącego za ſtrzałkę PM, będzie wyrażona przez $\frac{c}{2r} \times tt(\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}t)$. Lecz że ta bryłówatość rozumié ſię bydź wiadoma, przeto oznaczam ią ſobie przez $\frac{c}{2r} \times \frac{1}{6}aap$, gdzie p ieſt ilością wiadomą. Mieć tedy będę $\frac{c}{2r}\,tt(\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}t) = \frac{c}{2r} \cdot \frac{1}{6}aap$, albo $t^3 + 3att - aap = o$.

Ze-

Zeby wykryślić to zrównanie, robię $t^2 = au$, a położywſzy tę wártość w zrównaniu dopiéro poprzédzaiącém, mieć będę, $tau + 3a^2u - a^2p = o$; zrównanie należące do Hiperboli uważonéy między kóńcotycznémi, które wykryśliwſzy przy pomocy zrównania $t^2 = au$ należącego do paraboli, z ſpólnego przecięcia ſię tych dwóch linii krzywych, pokaże ſię wártość ilości t.

Tym ſpoſobém możnaby wynaléśdź promién wnętrſznego wydrążenia bómby, któréyby była wiadoma waga. śrzednica i ſtrzałka odcinka kulowego, ſkładaiącego dno bómby.

Mieliśmy także i tu, jak uczyniliśmy w Jeometryi, położyć Przydatek niektórych użytecznych Zagadnień Artylerycznych, rozwięzuiących ſię przy pomocy fundamentów zawiéraiących ſię w tym Tomie, ale odkładamy to ſobie raczéy do naſtępuiącego Tomu, gdzie dla nich będzie lepſze miéyſce, po zaſiągnieniu dalſzych wiadomości.

KONIEC DRUGIEGO TOMU.

ZBIOR

Materyi zawartych w tym drugim Tomie.

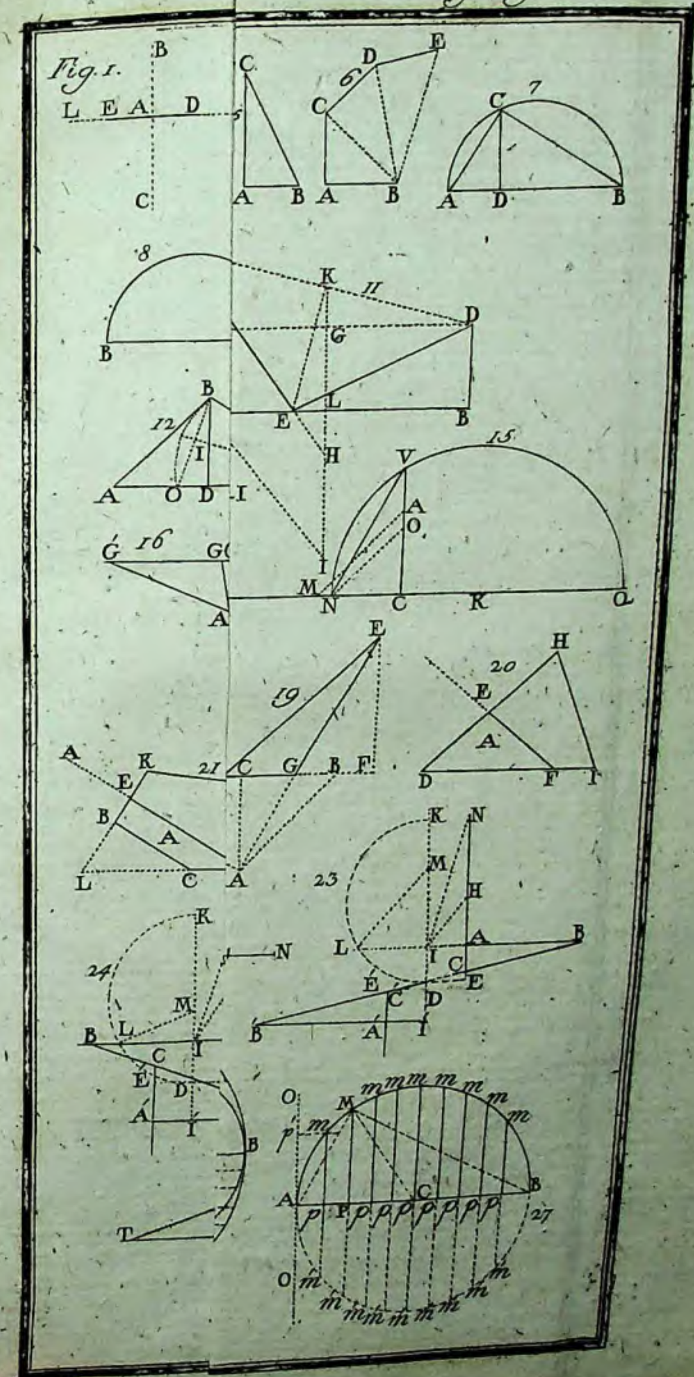
ROZDZIAŁ I.

W którym daią ſię fundamenta rachówania ilościów Algebraicznych.

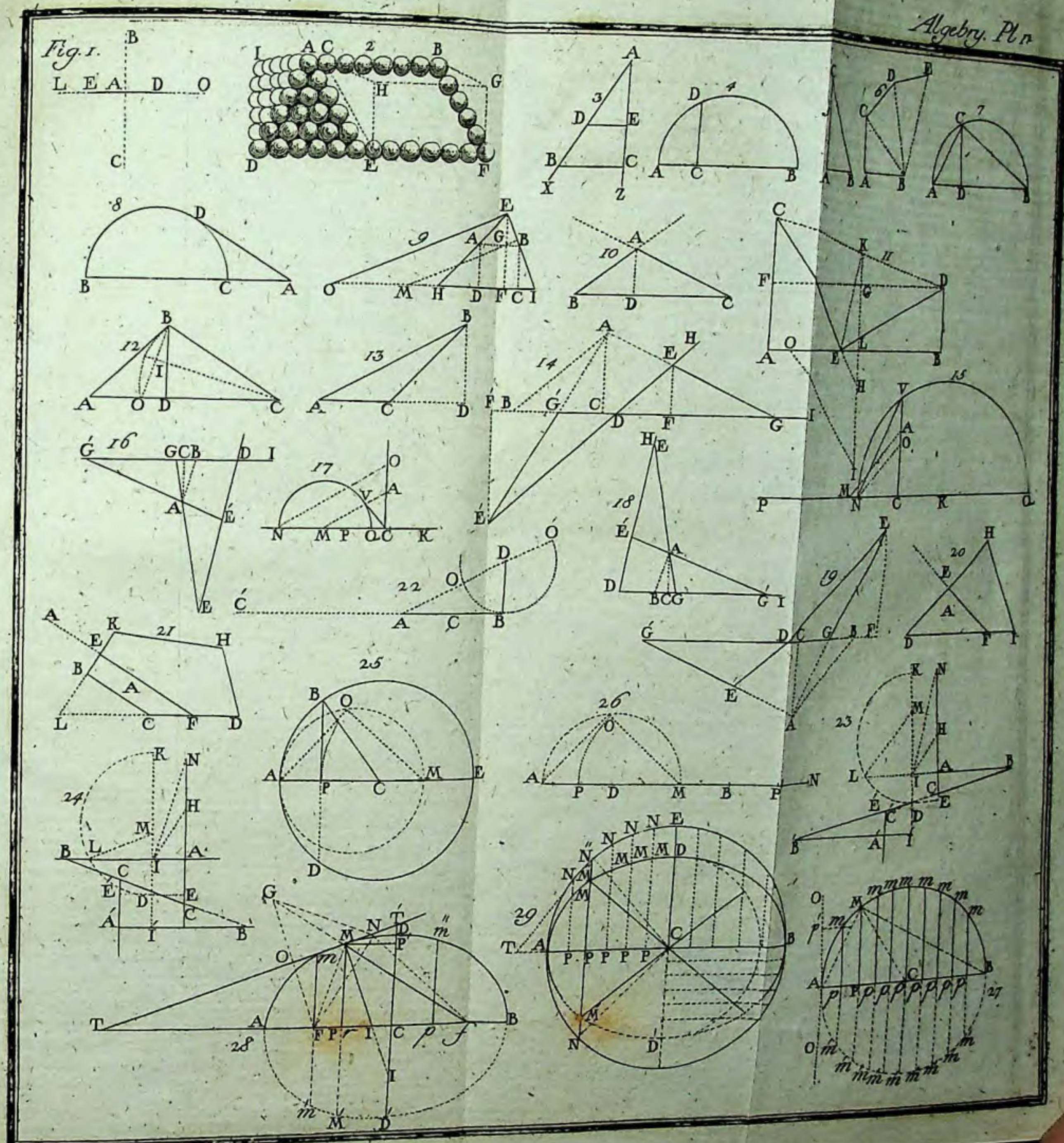
ROZDZIAŁ II.

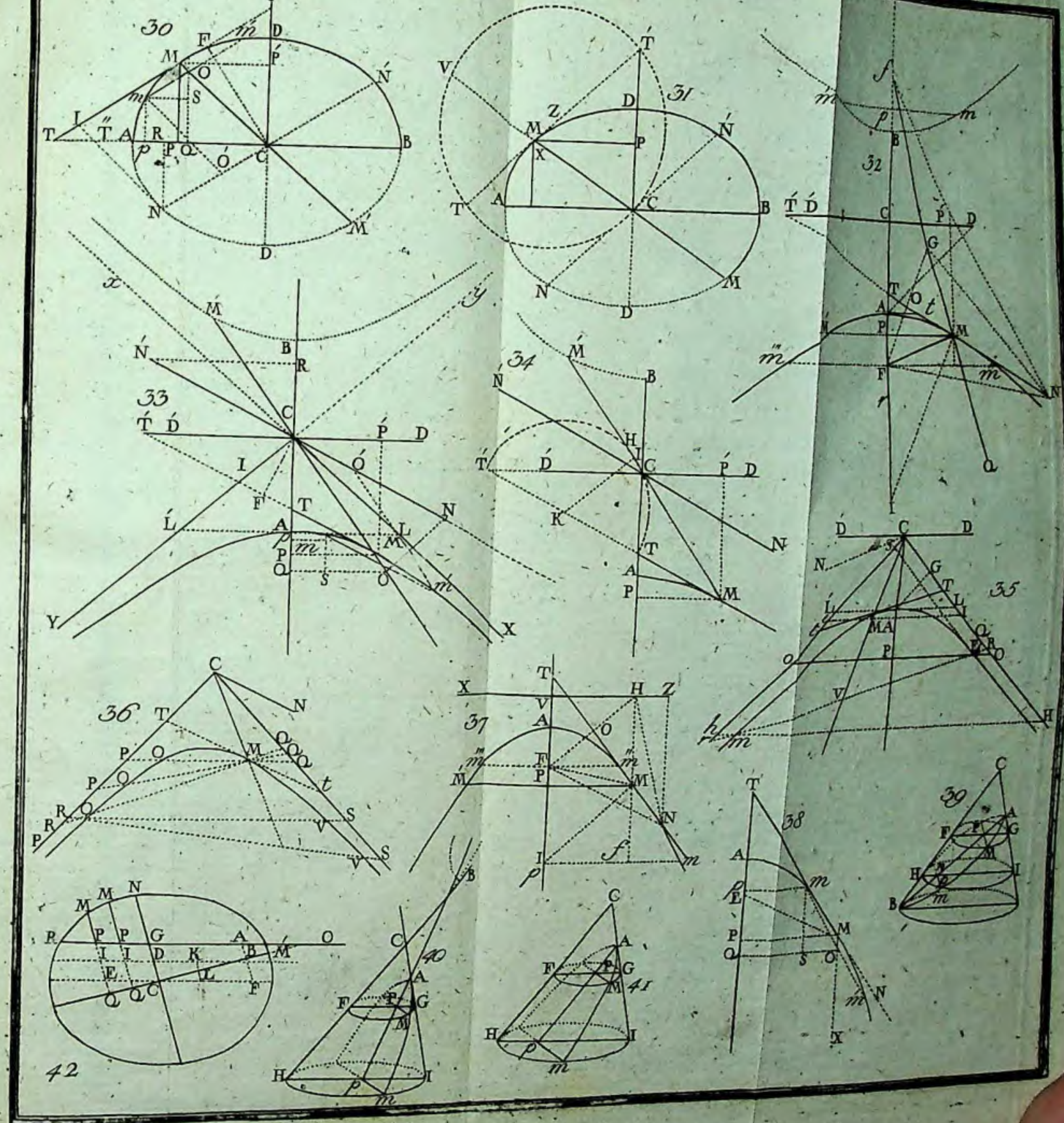
KONIEC ZBIORU MATERYI.

Algebry. Pl 1



Algebry. Pl. I.




30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42

Algebry. Pl. 3e.