NAUKA MATEMATYKI.

do użycia

ARTYLERYI FRANCUZKIEY

napiſana przez P. Bezout

Towarzyſza Akademij Nauk, i Marynarſkiéy &c. a dla pożytku poſpolitego, oſobliwiéy dla

KORPUSU ARTYLERYI NARODOWEY

na Polſki ięzyk

PRZEŁOZONA

z Rozſkazu i Nakładém

JEGO KROLEWSKIEY MCI.

PANA NASZEGO MIŁOSCIWEGO

do druku

PODANA

TOM TRZECI

Zawiéraiący w ſobie Fundamenta powſzechne MECHANIKI *i* HIDROSTATYKI; *poprzédzone Rachunkami ſłużącémi za wſtęp do Nauk Fizyczno-Matematycznych.*

W WARSZAWIE
W DRUKARNI XX. MISSYONARZOW.
R.P. M. DCC. LXXXII.

ZBIOR

Wyrazów Polskich użytych w tym trzecim Tomie, albo nowych albo mało znaiomych, niepowtarzaiąc tych, które iuż położyły ſię na początku każdego z dwóch poprzédzaiących Tomów. *

Bezwładność - - -	*Inertia.*
Biegun w Rurmuſach. -	*Embolus.*
Całka. - - - - -	*Integralis.*
Całkowy rachunek. - -	*Calculus integralis.*
Ciało Rurmuſu. - -	*Corpus Antliæ*
Granica (naywiękſzości i naymnieyſzości w liniach krzywych). -	*Limes.*
Graniczny środek - -	*Metacentrum.*
Kibić w Wadze. - -	*Vectis.*
Klin wałkowy. - -	*Ungula cylindrica.*
Kołowrot. - - - -	*Revolutio.*
Naymnieyſzość. - -	*Minimum.*
Naywiękſzość. - - -	*Maximum.*
Niezmierny. - - -	*Infinitus.*
Odmienna. - - - -	*Variabilis.*

Po-

* *Lubo wytłómaczenia tych wyrazów w przeciągu tego Tomu, przez omyłkę kładły ſię po Francuzku, atoli ſtoſuiąc ſię do pierwſzych dwóch Tomów, daiemy ie tu po Łacinie iak w tamtych.*

Pomiár (Logarytmów).	*Basis.*
Pomiérny. - - - -	*Finitus.*
Popęd - - - - -	*Impulsio.*
Różniczkowy Rachunek	*Calculus differentialis.*
Rozwiyka, rodzay linii krzywéy. - - -	*Evoluta.*
Rzędy rosnące. - -	*Series divergentes.*
Rzędy ubywaiące. - -	*Series convergentes.*
Ruchadło. - - - -	*Mobile.*
Pompa Rurmus. - - - -	*Antlia*
Rurmus ciągnący. - -	*Antlia aspirans.*
Rurmus deptaiący. - -	*Antlia calcans.*
Scałkować. - - -	*Integrare.*
Składka w Bryłach. - -	*Elementum.*
Stateczna ilość. - - -	*Quantitas constans.*
Swobodny. - - - -	*Liber.*
Tłoczliwy. - - - -	*Compressibilis.*
Układ. - - - - -	*Systema.*
Ułamek niepiérwiastkowy	*Fractio rationalis.*
Ważki do rosplynów. -	*Areometrum.*
Wypiętnówanie, (płaszczyzny). - - -	*Projectio.*
Związek (ilościów). -	*Functio.*

FUN-

FUNDAMENTA RACHUNKOW.

Służących za Wstęp do Nauk Fizyczno-Matematycznych.

WIADOMOSCI POPRZEDZAIĄCE.

1. Dotąd zabawialiśmy się regułami służącémi do rachówania ilościów, trafiaiących się bądź w iakimkolwiek stanie wielkości. Lecz nieuważaliśmy różnych odmian, przez które takowe ilości przechodzą do tego lub owego stanu wielkości. Tén nowy sposób

żania ilościów, daie okazyą do innéy części *Rozbioru*, arcy użytecznego w Naukach Fizyczno-Matematycznych, a ofobliwie w Mechanice, gdzie częftokroć niémożna naznaczyć ftófunków zachodzących między ilościami, wchodzącémi w zagadnienia zależące od téy nauki, nieuważywfzy wprzód ftófunków między różnémi odmianami ich, to ieft między przyczynkami lub uiątkami które odbiéraią co moment.

Nim tedy przyftąpimy do Mechaniki, wprzód zabawimy się nieco, tym gatunkiém rachunków, których célem ieft, rozbiérać ilości na cząftki piérwiaftkowe, i z takowych cząftek powracać nazád do famychże ilościów. Mówiąc właściwie, nieieftto żaden nowy fpofób rachòwania który tu mamy przełożyć, ale tylko przyftófowanie fpofobów podanych w trzeciéy części, a nawet ułatwiénie albo pzryprowadzenie do proftfzego ftanu tamtych reguł.

2. Zakładamy fobie tu dwa zamiary. Piérwfzy ma nauczyć, iak zftępuie fię od ilościów do *składek* (elements) z których powftały te

te ilości; fpofób zaś iakim tò wykonywa fię, nazywa fię Rachunkiém *Różniczkowym* (Calcul differentiel). Drugi pokaże nam drogę do powrócenia od *składek* do famych ilościów; a fpofób takowy nazwiémy rachunkiém *cálkowym* (Calcul Integral).

3. Ponieważ uważać mamy ilości ftófównie do ich piérwiaftków, to ieft ftófównie do przyczynków niefkończenie małych którémi fię pomnażaią, przeto nim poftąpimy dáléy, należy wprzód wytłómaczyć fię co rozumiémy przez ilości niefkończenie albo raczéy niezmiérnie małe, niezmiérne, i.t.d. i pokazać porządek iaki trzeba zachować w rachunkach między témi ilościami.

Mówimy tedy, że ilość ieft niezmiérna albo niezmiérnie mała względém drugiéy, kiedy niémożna naznaczyć żadnéy ilości tak wiélkiéy albo tak małéy, którąby wyrażała ftófunek między pomiénionémi dwiéma ilościami, to ieft liczbę razy, iaką mieści w fobie iedna drugą.

4. Ponieważ wſzelka ilość, póki nieprzeſtanie bydź ilością, niémoże przeſtać bydź ſpoſobną do przyięcia zawſze iakiego pomnożenia albo umniéyſzenia; przeto téż niémoże bydź żadnéy ilości tak małéy albo tak wielkiéy względém drugiéy ilości, ażeby niémożna było myślą poiąć trzeciéy ilości, niezmiérnie mniéyſzéy lub niezmiérnie większéy.

Np. ieżeli x ieſt niezmierne względém a, lubo w takim razie niepodobna ieſt naznaczyć między niémi ſtóſunku, to atoli nieprzeſzkadza mi wyſtawić ſobie w myśli trzecią ilość, któraby była taką względém x, iaką ieſt x względém a, to ieſt, któraby była czwártym wyrazém proporcyi poczynaiącéy ſię od tych trzeh, $a : x : : x :$; takowy tedy czwárty wyráz, iakim ieſt $\frac{x^2}{a}$, będzie niezmiernie większy od x; albowiém on zawiéra w ſobie x tyle razy, ile rozumie ſię że x zawiéra w ſobie a. Podobnież nic mi nieprzeſzkadza, dla czego niémógłbym poiąć myślą czwártego wyrazu téy proporcyi, $x : a : : a$; a takowy znowu czwárty wyráz, iakim ieſt $\frac{a^2}{x}$, będzie niezmiérnie mniéyſzy od a; ponieważ powinièn mieścić ſię w a tyle razy, ile rozumie ſię, że a mieści ſię w x. W téy miérze umyſł niczém ſię nieogranicza, i można poymówać ieſzcze nową ilość, któraby znowu była niezmiérnie mała względém ilości

$\frac{a^2}{x}$, tak iako ta ieſt niezmiérnie mała względém a. Takowe ilości nazywaią ſię ilościami *niezmiérnemi*, albo *niezmiérnie małémi* różnych ſtopniów.

Powiedziawſzy w powſzechności, mnogość z dwóch ilościów niezmiérnych, albo niezmiérnie małych piérwſzego ſtopnia, ieſt niezmiérnie większa albo niezmiérnie mniéyſza, od każdego z dwóch czynników które ią ſkładaią.

Jakóż, maiąc $xy : y : : x : 1$, ieżeli x ieſt ilością niezmiérną, to w ſobie będzie zawiérać iedność, niezmiérną liczbę razy; więc znowu xy zawiérać muſi w ſobie y, niezmiérną liczbę razy.

Temu podobne rozumówanie, pokazuie, że mnogość albo ſtopién ilości iakiéy od tylu wymiarów ile ſię ſpodoba, w któréyby wſzyſtkie czynniki były niezmiérne piérwſzego ſtopnia, będzie niezmiérna takiego ſtopnia, iaka będzie liczba czynników ſkładaiących tę mnogość.

I tak, ieżeli x ieſt niezmiérne, to x^4 będzie niezmiérne w czwartym ſtopniu, to ieſt, niezmiérnie większe aniżeli x^3, które znowu ieſt niezmiérnie większe aniżeli x^2, a to niezmiérnie większe aniżeli x.

Jakóż, $x^4 : x^3 :: x^3 : x^2 :: x^2 : x :: x : 1$. Przeciwnie zaś trzeba rozumiéć, gdyby x było niezmiérnie małe; bo natenczas x^4 byłoby niezmiernie małe w czwartym ſtopniu, to ieſt niezmiérnie mniéyſze aniżeli x^3, to zaś niezmiérnie mniéyſze aniżeli x^2, a znowu to oſtatnie, niezmiérnie mniéyſze aniżeli x.

Ale ieżeli czynniki ſkładaiące mnogość, niewſzyſtkie ſą niezmiérne, to natenczas ſtopiéń niezmiérności, niezależy tylko od liczby ſamych czynników niezmiérnych.

J tak axy, ieſt tylko tego ſtopnia co xy; albowiém $axy : xy :: a : 1$; i tego oſtatniego ſtóſónku wártość może bydź naznaczona, ieżeli a ieſt ilością pomiérną.

Uważmy dobrze tę różnicę w ſtóſówaniu iłościów niezmiérnych, albo niezmiérnie małych, iużto między ſobą, iuż téż do innych iłościów, względém których piérwſze ilości ſą niezmiérne albo niezmiérnie małe. Jeżeli x, ieſt iłością niezmiérną względém a, to niémaſz nic takiego coby mogło pomiérzyć ſtóſunek między niémi zachodzący: ale w témże przypuſzczeniu, ſtóſunek między

x, a między x rozmnożoném, albo rozdzieloném przez iakąkolwiek bądź liczbę pomiérną, będzie ſtóſunek pomiérny; i tak x niezmierne albo niezmiérnie małe, nieieſt ſtóſówne do a, ieżeli to a rozumié ſię bydź liczbą pomiérną; ale toż x nieieſt niezmiérne ani niezmiérnie małe względém ax; bo x ma ſię do $ax :: 1 : a$.

5. Żeby to wyrazić w rachunku, że ilość x ieſt niezmiérna względém innéy ilości a, albo co na iedno wychodzi, ażeby wyrazić, że a ieſt niezmiérnie małe względém x, trzeba w wyrażeniu Algebraiczném, w którémby te ilości znaydówały ſię razém, odrzucić wſzyſtkie ſtopnie ilości x, niżſze od naywyżſzego ſtopnia, a zatém i wſzyſtkie wyrazy w których x nieznayduie ſię.

Np. ieżeli w wyrazie $\frac{3x+a}{5x+b}$, x rozumié ſię bydź niezmiérne względèm a i b, to trzeba odrzucić a i b, co da $\frac{3x}{5x}$ albo $\frac{3}{5}$, na wártość ilości $\frac{3x+a}{5x+b}$, kiedy x ieſt niezmiérne. Jakóż $\frac{3x+a}{5x+b}$, ieſt iedno co $\frac{3+\frac{a}{x}}{5+\frac{b}{x}}$ (rozdzieliwſzy wſzyſtko górą i dołém przez x); lecz kiedy x rozumié ſię niezmiérne względém a i b, to ułamki $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{x}$ wyrażaiące ſtóſunki zachodzące między ilościami a, b, i x, powinny bydź koniecznie odrzucone; bo podług tegóż ſamego przypuſzczenia, takowe ſtóſunki, ſą zawſze mniéyſze od wſzelkiéy ilości chociażby ią ſobie iak naymnieyſzą w myśli wyſtawić; więc w takim razie, ilość wyżéy zadana muſi wychodzić na $\frac{3}{5}$.

Podobnież gdyby było $x^2 + ax + b$, to ieżeli x ieſt niezmiérne, ta ilość wyſzłaby na x^2. Jakóż wiedzieliśmy dopiéro, że podług tego przypuſzczenia, trzeba odrzucić b względém ax; lecz znowu x^2 ieſt niezmiérne względém ax, bo $x^2 : ax :: x : a$; więc z téyże przyczyny, należy odrzucić ax względém x^2; więc przerzeczona ilość, wychodzi na x^2.

Przeciwnym ſpoſobém, gdyby x było niezmiérnie małe, nietrzebaby zachować tylko te wyrazy, w których wykładniki należące do x będą naymniéyſze.

I tak, $x^2 + ax$, wychodzi na ax, ieżeli x rozumié ſię niezmiérnie małe; $\frac{ax + b}{cx + d}$, wychodzi na $\frac{b}{d}$, kiedy i tu x rozumié ſię niezmiérnie małe.

Nietrzeba ſię obawiać, ażeby te odrzucenia, odmiéniły wnioſki, iakie

wy-

wynikać maią z rachunków, w których ſię użyły. I owſzém niémożna inaczéy, tylko przez te odrzucenia, wyrazić to co ma bydź wyrażono, to ieſt że x ieſt niezmiérne, albo niezmiérnie małe, i tylko przez nie przychodzi ſię do wnioſku zgadzaiącego ſię z przypuſzczeniém na przód założoném. Albowiém rozumieiąc x niezmiérne, gdyby ſię nieodrzuciły wyrazy podług poprzédzaiącéy nauki; gdyby *np.* z ilości $\frac{3x + a}{5x + b}$ albo $\frac{3 + \frac{a}{x}}{5 + \frac{b}{x}}$ nieodrzuciły ſię wyrazy $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{x}$, to ponieważ w takim razie, rachunek nieokazówałby, że ilości $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{x}$ ſą ſtóſunkami mniéyſzémi nad wſzelkie, iakie tylko pomyślić można, przeto takowy rachunek niémógłby dać tego czego ſię ſzuka, to ieſt wártości przerzeczonéy ilości, w takim razie, kiedyby x było niezmiérne; ſłowém, rozumiéć że $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{x}$ wpływaią iakóżkolwiek w ilość

ſzu-

ſzukaną, byłobyto ſprzeciwiać ſię założonemu przypuſzczeniu.

W dalſzym przeciągu niebędzie zbywać nam na okazyach, okazania na oko téy prawdy, względém odrzucenia ilościów niezmiérnych w niżſzych ſtopniach, tym czaſém atoli naſtępuiący przykład, może ſłużyć na poparcie poprzédzaiącego rozumówania. Ułóżmy ſobie taki rzęd, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, i. t. d. iawna ieſt, że wſzyſtkie wyrazy tego rzędu, coráz bardziéy przybliżaią ſię do iedności, a iednak téy granicy przeſtąpić nigdy niémogą. Każdy wyráz może bydź oznaczony przez $\frac{x}{x+1}$, gdzie x wyraża liczbę miéyſca tego wyrazu. Ponieważ tedy wyrazy przybliżaią ſię nieuſtannie do iedności, a to tém bardziéy im bardziéy oddalaią ſię od początku, więc téy granicy dóyśdź niémogą, aż dopiéro w odległości niezmiérnéy od pomiénionego początku; a zatém ażeby miéć oſtatni wyráz tego rzędu, trzeba rozumiéć, że w wyrażeniu $\frac{x}{x+1}$, x ieſt ilością niézmiérną; lecz w takim razie, podług wyżéy założonego fundamentu, przerzeczona ilość wychodzi na $\frac{x}{x}$, to ieſt na 1; więc odrzucenie wyrazu $+1$ z ilości $\frac{x}{x+1}$, nietylko niepſuie wnioſku, ale nawet czyni go takim iakim bydź powinién. Słowém, przez takowe odrzucenie wykonywa ſię to, czego wyciąga założone przypuſzczenie.

Taki tedy ieſt porządek, iaki zachować trzeba w rachunku między

dzy ilościami niezmiérnemi albo niezmiérnie małémi różnych ſtopniów. Lecz w przyſtóſówaniu tego podanego fundamentu względém odrzucenia ilościów, mogą zdarzyć ſię niektóre przypadki, o których należy nam uprzédzić czytelnika.

Daymy tedy że mamy te dwie ilości, $xx + ax + b$, i $xx + ax + c$; ieżeli w nich x ieſt niezmiérne, to oczywiście każda z nich wychodzi na xx, tak iż różnicą między niémi zdaie ſię bydź zero w tym przypadku, lubo w rzeczy ſaméy takową różnicą ieſt $c - b$, albo $b - c$. Rozwiązanie téy na pozór trudności, ieſt naſtępuiące.

Różnicą między témi dwiéma ilościami, ieſt w rzeczy ſaméy $c - b$ albo $b - c$; lecz kiedy ſię ſzuka téy różnicy, po założoném przypuſzczeniu, że x w obu ilościach ieſt niezmiérne, to w takim razie ieſtto ſzukać, czém ieſt takowa różnica względém tychże ilościów; a że natenczas każda z nich ieſt niezmiérna, więc powinno bydź znaleziono, iak w rzeczy ſaméy znayduie ſię, że pomiéniona różnica ieſt zerém względém

nich,

nich. Kiedy tedy zadaie ſię pytanie, w co obraca ſię wypadek z pewnych działań przedſięwziętych z wielą ilościami, to reguła wyżéy podana, powinna bydź wykonana w ſamym wypadku, a nie w każdéy ilości wziętéy zoſobna.

J tak pokaże ſię, że ſumma ilościów $-xx + ax + b$, i $xx + bx + c$, ieżeli x ieſt niezmiérne, wychodzi na $ax + bx$; w powſzechności, pomiéniona ilość czyniąca po zebraniu $ax + bx + b + c$, kiedy x ieſt niezmiérne, wychodzi na $ax + bx$. Podobnież ilość $-\sqrt{(xx - bb)}$, kiedy x ieſt niezmiérne, zdawałaby ſię bydź zerèm. Ale że wyrażenie $\sqrt{(xx - bb)}$, ieſt tylko wſkazaniém pierwiaſtka z ilości $xx - bb$; przeto żeby miéć różnicę między tą ilością a między x, trzebaby takową ilość $xx - bb$ rozłożyć w rzęd, podług (Alg. 133); a natenczas ilość $x - \sqrt{(xx - bb)}$ przemiénia ſię w tę, $x - x + \frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3}$ i. t. d. albo $\frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3} +$ t.. d. która, ieżeli x ieſt niezmiérne względém b, wychodzi na $\frac{bb}{2x}$.

FUNDAMENTA RACHUNKU ROŻNICZKOWEGO.

6. Uważaiąc ilość odmiénną, iako roſnącą ſtopniami niezmiérnie małémi; żeby doyśdź wártości ta-

takowego przybywania, naynaturalniéyſza zdaie ſię, naznaczyć wártość téy ilości uważonéy w iakimkolwiek momencie czaſu, i znowu w drugim momencie naſtępuiącym zaráz bezśrzednie po piérwſzym; a natenczas różnica między témi dwiéma wártościami, wyrażać będzie pomnożenie albo umniéyſzenie, jakie odbiéra takówa ilość: i to ieſt co nazywa ſię *różnicą* albo raczéy *różniczką*, téy ilości.

7. Chcąc naznaczyć różniczkę iakowéy ilości odmiénnéy nieſkładanéy, iakoto *np.* ilości x albo y, piſze ſię dx, albo dy; to ieſt poprzédzaiąc ią głoſką d poſpolicie używaną do tego wyrażenia. Ale żeby wſkazać różniczkę ilości ſkładanéy, *np.* takiéy iak x^2 albo $5x^3 + 3x^2$ albo $\sqrt{(x^2 - aa)}$ i. t. d. trzeba takową ilość zamknąć między dwóma nawiaſami, położywſzy przed piérwſzym nawiaſém głoſkę d; i tak piſze ſię $d(x^2)$, $d(5x^3 + 3x^2)$, $d(\sqrt{[x^2 - aa]})$ i. t. d.

Odtąd ilości odmiénne oznaczać będziémy przez oſtatnie głoſki Abecadła t, u, x, y, z; a ilości ſtateczne, to ieſt które zachowuią zawſze iednakową wártość, przez głoſki początkowe a, b, c, i. t. d; ieżelibyśmy zaś gdzie inaczéy ſobie poſtąpili, to oſtrzéżemy o tém. A co należy do głoſki d, ta niebędzie używana do czego inſzego, tylko do oznaczenia różniczki téy ilości którą będzie poprzédzać.

8. Z tego opiſania różniczki iakiéykolwiek ilości, daie ſię widzieć, że chcąc miéć różniczkę takiéy ilości w któréy głoſki odmiénne znayduią ſię bydź położone tylko w piérwſzym ſtopniu, niebędąc rozmnożone ani rozdzielone iedne przez drugie, niéma więcéy do czyniénia, tylko przed każdą odmiénną położyć cechę *d*, zoſtawiwſzy każdéy znak iaki miała.

Np. rożniczką ilości $x + y - z$ będzie $dx + dy - dz$. Jakóż, żeby mieć takową rożniczkę, trzebaby uważać x, odmiéniaiące ſię na $x + dx$, y, na $y + dy$, a z, na $z + dz$; lecz w takim razie, ilość zadana $x + y - z$, odmiéniłaby ſię na $x + dx + y + dy - z - dz$; więc wziąwſzy różnicę między tym oboim ſtaném ilościów, będzie $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$; to ieſt że na różniczkę wypadnie, $dx + dy - dz$.

Tóż ſamo rozumiéć trzeba, chociażby odmiénne wchodzące w ilość zadaną, miały ſpółczynników czyli mnożników ſtatecznych.

J tak, różniczką ilość $5x + 3y$, ieſt $5dx + 3dy$; różniczką ilości $ax + by$, ieſt $adx + bdy$; iakóż, kiedy x i y odmiéniaią ſię na $x + dx$ i $y + dy$, to ilość $ax + by$, odmiénią ſię na $a(x + dx) + b(y + dy)$, to ieſt na $ax + adx + by + bdy$; więc różnicą między tym oboim ſtaném, czyli różni-

czką przerzeczonéy ilości, ieſt $adx + bdy$; to ieſt, powiedziawſzy w powſzechności, każdą odmiénną trzeba poprzédzić céchą *d*.

Gdyby w ilości zadanèy, znaydówał ſię iaki wyráz cały ſtateczny, to różniczka będzie taka, iak gdyby tego wyrazu wcale niebyło; to ieſt że różniczką tego wyrazu byłoby zero; i to ieſt oczywiſta, bo ponieważ różniczka nieieſt co innego tylko przybywanie ilości, więc ilość ſtateczna niémoże miéć różniczki, żeby oráz nieprzeſtała bydź ſtateczną.

I tak różniczką ilości $ax + b$, ieſt proſto adx.

9. Kiédy ilości odmiénne trafią ſię nieſkładane, ale iednakże będą między ſobą rozmnożone, to trzeba zachować naſtępuiącą regułę: *Zróżniczkuy wyráz, koléyno względém każdéy odmiénnéy, tak iak gdyby reſzta była mnożnikiém ſtatecznym.* *

Np. żeby zróżniczkówać xy, różniczkuię naprzód, iak gdyby x było ſtateczne, mam xdy; potém różniczkuię tęż ſamę ilość

* *Zeby w piſaniu uniknąć wſzelkiéy dwuwykładności, ilość odmiénną którа ma bydź poprzédzona céchą* d, *należy piſać na oſtatku.*

xy, iak gdyby znowu y było ftateczne, i mam ydx; tak że całą różniczką ilości xy, będzie $xdy + ydx$.

Przyczynę téy reguły można wyrozumiéć, wróciwfzy fię do famego fundamentu. Albowiém, żeby miéć różniczkę ilości xy, trzeba uważać x, iakoby odmiéniało fię na $x + dx$, to ieft iakoby pomnażało fię o ilość niezmiérnie małą dx, a y iakoby odmiéniało fię na $y + dy$, to ieft iakoby pomnażało fię o ilość niezmiérnie małą dy; a natenczas xy, wychodzi na $(x + dx) \times (y + dy)$, to ieft na $xy + xdy + ydx + dydx$; więc różnicą między tym oboim ftaném, albo różniczką zadanéy ilości, ieft $xy + xdy + ydx + dydx - xy$, albo $xdy + ydx + dydx$; więc ażeby to wyrazić w rachunku, że ilości dy i dx fą niezmiérnie małe, trzeba (5) wyrzucić ilość $dydx$, iako niezmiérnie małą drugiego ftopnia (4), a zatém iako niezmiérnie małą względem ilościów xdy i ydx, które fą niezmiérnie małe piérwfzego ftopnia; więc naoftatek różniczka ilości xy albo $d(xy)$, mufi bydź $xdy + ydx$, to ieft taka iaką daie reguła.

Podług téyże reguły, różniczka ilości xyz, byłaby $xydz + xzdy + yzdx$; różniczkując naprzód iakby xy było ftateczne, potém iakby xz było ftateczne, a naoftatek iakby yz było ftateczne. Co da fię wywiéśdź iak wyżéy, uważaiąc x, y, i z, odmiéniaiące fię na $x + dx$, $y + dy$ i $z + dz$; w którymto przypadku xyz, wychodzi na $(x + dx)\ (y + dy)\ (z + dz)$, albo na $xyz + xydz + xzdy + yzdx + ydxdz + zdydx + xdzdy + dxdydz$; więc różnicą między ilościami w tym oboim ftanie i po uczynioném zebraniu i po odrzuceniu ilościów niezmiérnie małych drugiego i trzeciego ftopnia, będzie ilość $xydz + xzdy + yzdx$, to ieft taka, iaką daie reguła.

10. Jeżeli ilość zadana, ieft iakimkolwiek ftopniém ilości odmiénnéy, to trzeba poftąpić fobie podług reguły naftępuiącéy: *Rozmnoż przez wykładnika, zmniéyfz tego wykładnika o iednę iedność, i rózmnòż przez różniczkę ilości odmiénnéy.*

Stófuiąc to do ilości x^2, miéć będę $2xdx$, mnożąc przez wykładnika 2, zmniéyfzaiąc wykładnika 2 o 1, a naoftatek mnożąc przez dx, to ieft przez różniczkę ilości odmiénnéy x. Podobnież znaleźlibyśmy, że różniczką ilości x^3, ieft $3x^2dx$; a ilości x^4, byłoby różniczką $4x^3dx$; iako też ilości x^{-1}, będzie $-x^{-2}dx$; ilości x^{-3}, będzie $-3x^{-4}dx$; ilości $x^{\frac{1}{2}}$, będzie $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; ilości $x^{\frac{4}{3}}$, będzie $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$; a w powfzechności ilości x^m, różniczką będzie $mx^{m-1}dx$, wykładnik m niechay będzie iaki chce, czyto twiérdzący czy przeczący, cały czy ułamkowy.

Żeby wyrozumiéć przyczynę téy reguły, wróćmy fię znowu do fundamentu: Uważmy x, iakoby odmiéniaiące fię na $x + dx$; (gdzie dx rozumié fię niezmiérnie małe); natenczas x^m przemiénia fię na $(x + dx)^m$; to ieft podług reguł wyżéy podanych (Alg. 126); przemienia fię na $x^m + mx^{m-1}dx + m . \frac{m-1}{2} . x^{m-2}dx^2 +$ t.d., albo tylko na $x^m + mx^{m-1}dx$, (z przyczyny że wyraz $m . \frac{m-1}{2} x . ^{m-2}dx^2$

ieſt niezmiérnie mały drugiego ſtopnia, a następuiące byłyby ieſzcze poślednieyſzych ſtopniów); więc różnicą między dwiéma ilościami w tym oboim ſtanie, albo różniczką ilości x^m, ieſt $x^m + mx^{m-1}dx - x^m$, to ieſt $mx^{m-1}dx$.

Gdyby znaydował ſię ſpółczynnik albo mnożnik ſtateczny, przytomność iego nieuczyniłaby żadnéy odmiany; bo zoſtałby ſię w różniczce taki, iaki był w ſaméy ilości; i tak $d(ax^m)$, wychodzi na $max^{m-1}dx$.

11. Owóż iuż ieſt wſzyſtko co trzeba wiedziéć żeby bydź w ſtanie zróżniczkówania wſzelkiego rodzaiu ilościów Algebraicznych; a zatém to wſzyſtko co ma naſtąpić niebędzie tylko przyſtóſówaniém reguł poprzédzaiących.

12. Gdyby była zadana ilość $\frac{x}{y}$, to ieſt ułamek, podług tego co ſię rzekło (Alg. 118) napiſałbym ią tak xy^{-1}; a natenczas używſzy reguły wyżéy podanéy (9), miałbym $d(xy^{-1}) = xd(y^{-1}) + y^{-1}dx$; a zatém podług (10) byłoby $d(xy^{-1}) = -xy^{-2}dy + y^{-1}dx$.

Po uczynionèm zebraniu téy ilości, będzie $-\frac{xdy}{y} + \frac{dx}{y}$, albo $\frac{ydx - xdy}{y^2}$, gdzie widziéć daie ſię, że różniczka ułamka $\frac{x}{y}$, równa ſię różniczce dx licznika, rozmnożonéy przez mianownika y, a potèm zmnieyſzonèy rożniczką y mianownika, rozmno-

żo-

żoną przez licznika x, wſzyſtko rozdzieliwſzy przez kwadrat mianownika; i tać ieſt reguła iaką poſpolicie podaią do różniczkówania ułamków. Ale iawna ieſt, że niéma potrzeby obciążać ſobie pamięci tą nową regułą; bo doſyć ieſt podług przepiſu (Aleg. 118) przeſtawić mianownika do licznika, a potém zadany ułamek zwyczaynie zrózniczkówać.

13. Gdyby potrzeba było zróżniczkówać ilość ax^3y^2; należy naprzód uważyć x^3 i y^2, iakoby dwie ilości odmiénne nieſkładane, ſkąd pogług (9) wypadnie, $d(ax^3y^2) = ax^3d(y^2) + ay^2d(x^3)$; a potém podług (10), będzie $d(ax^3y^2) = 2ax^3ydy + 3ay^2x^2dx$. W powſzechności $d(ax^my^n) = ax^md(y^n) + ay^nd(x^m) = nax^my^{n-1}dy + may^nx^{m-1}dx$.

14. Jeżeli ilość co ma bydź różniczkówana ieſt wieloſłowna, ale niezawiéra w ſobie żadnych ſtopniów ilościów wieloſłownych, to każdy z wyrazów ſkładaiących ią trzeba zróżniczkówać zoſobna; i tak będzie $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2dx + 2bxdx + cxdy + cydx$. Podobnież, $d(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}) = d(ax^2 + bx + cx^{-2}y) = 2axdx + bdx - 2cx^{-3}ydx + cx^{-2}dy$. Takóż, $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2ydx + x^3dy + 2aydy$; bo tu należy ſobie przypomniéć, że ſtateczna b^3 niéma różniczki, albo że różniczką iéy ieſt zero.

15. Jeżeliby znaydówał ſię wykładnik należący do całéy ilości wieloſłownéy, iakoto w tém wyrażeniu, $(a + bx + cx^2)^5$, to całą takową ilość podpadaiącą pod tego wykładnika, trzeba uważać iakby była tylko iedną oſobną ilością odmiénną, która zróżniczkuie ſię podług reguły wyżéy podanéy

(10) do ilościów wynieſionych do iakiegokolwiek ſtopnia. I tak będzie $d(a + bx + cx^2)^5 = 5(a + bx + cx^2)^4 \times d(a + bx + cx^2) = 5(a + bx + cx^2)^4 \times (bdx + 2cxdx)$. Podobnież będzie $d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} d(a + bx^2) = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} \times 2bxdx = \frac{10}{3}bxdx(a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

16. Jeżeliby ilość będąc wieloſłowna, ſkładała ſię z różnych czynników, to każdego czynnika uważać trzeba iakby odmiénną iednoſłowną, i poſtąpić ſobie podług reguły wyżéy podanéy (9) do mnogościów ſkładaiących ſię z wielu odmiénnych iednoſłownych. I tak ilość, $x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, którą uważać można iakby ſkładaiącą ſię z dwóch czynników x^3 i $(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, da $d[x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}] = (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} d(x^3) + x^3 d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, to ieſt podług reguł poprzédzaiących, $3x^2dx\,(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3}bx^4dx(a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$. Podobnież, $d\left(\frac{(x + a)^3}{(x + b)^2}\right) = [(x + a)^3 \times (x + b)^{-2}] = (x + a)^3\, d(x + b)^{-2} + (x + b)^{-2}\, d(x + a)^3$; to ieſt $= -2(x + a)^3 (x + b)^{-3} dx + 3(x + b)^{-2}(x + a)^2 dx$, co ſię przemiénia na $-\frac{2(x + a)^3 dx}{(x + b)^3} + \frac{3(x + a)^2 dx}{(x + b)^2}$, i wychodzi na - - - - $\frac{(x + 3b - 2a)(x + a)^2 dx}{(x + b)^3}$.

17. Jeżeli ilość zadana ieſt piérwiaſtkowa, to w niey zamiaſt znaków piérwiaſtkowych, trzeba położyć wykładniki ułamkowe, w ſpoſób indziéy przepiſany (Alg. 105), a potém ią zróżniczkówać podług reguł wyżéy podanych. I tak: $d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; $d\sqrt[5]{(x^3)} = d(x^{\frac{3}{5}}) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx$; - -

$d[\sqrt{(aa - xx)}] = d(aa - xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} d(aa - xx) = -xdx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$; $d(x^m \sqrt[q]{[(a + bx^n)^p]}) = d[x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}] = x^m d(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} + (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} d(x^m) = \frac{pnb}{q} x^{m+n-1} dx(a + bx^n)^{\frac{p}{q}-1} + mx^{m-1} dx(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

O *Różniczkach drugich, trzecich* i. t. d.

18. Oprócz różniczek które dopiéro uważaliśmy i które nazywaią ſię *Różniczkami piérwſzémi*, uważaią ſię także *różniczki drugie, trzecie*, i. t. d.; które chcąc ukazać, trzeba położyć przed ilością odmiénną dwa *d*, ieżeli ma bydź wſkazana druga różniczka; a trzy *d* ieżeli idzie o trzecią różniczkę, i tak daléy. *Np.* ddx znaczy drugą różniczkę ilości x.

W drugich różniczkach, ilość odmiénna uważa ſię iakby przybywała ſtopniami nierównémi, któréy różnica rozumié ſię niezmiérnie mała względém tychże przybytków. I tak ddx ieſt niezmiérnie małe względém dx. Podobnież w różniczkach trzecich, $dddx$ albo d^3x (bo takowe ró-

różniczki znaczyć ſię zwykły zarówno tym oboim ſpoſobém), ieſt niezmiérnie małe względém ddx; i tak daléy.

Zeby naznaczyć kwadrat ilości dx, naturalnie napiſaćby trzeba $(dx)^2$, ale dla ſkrócenia piſać ſię zwykło dx^2, co niémoże ſprawić żadnéy omyłki, ani bydź wzięte za różniczkę ilości x^2; bo tę oſtatnią poſtanowiliśmy ſobie znaczyć przez $d(x^2)$.

Uważmy to dobrze, że lubo ilości ddx i dx^2, ſą obie niezmiérnie małe drugiego ſtopnia, ale ſobie nieſą równe; bo ddx wyraża drugą różniczkę ilości x, czyli dwoie różniczkówania iedno po drugiém naſtępuiącego z tąż ilością x, a dx^2 wyraża kwadrat różniczki dx.

W dochodzeniu drugich różniczek nayNaturalniéy zdaie ſię, uważać ilość odmiénną w trzech ſtanach naſtępuiących iedén po drugim a ſobie niezmiérnie bliſkich, wziąść różnicę między piérwſzym ſtanèm a drugim, potèm między drugim a trzecim, a naoſtatek wziąść znowu różnicę między témi dwiéma różnicami. *Np.* piérwſzy ſtan ilości x ieſt x; w drugim momencie x pomnaża ſię o ilość dx, ſkąd powſtaie $x + dx$; w naſtępuiącym daléy momencie $x + dx$ pomna-

ża

ża ſię o iłość $dx + d(dx)$, gdzie $d(dx)$ wyraża to, o wiele przybytek drugiego momentu przewyżſza przybytek piérwſzego momentu, czyli różnicę ilości dx. A zatém troiaki ſtan iedén po drugim naſtępuiący ilości x, będzie wyrażony w tych ilościach: x, $x + dx$, $x + 2dx + d(dx)$. Różnica między piérwſzym a drugim ſtaném ieſt dx, różnica zaś między drugim i trzecim ieſt $dx + d(dx)$; a naoſtatek różnica między témi dwiéma różnicami, czyli druga różniczka ilóści x, będzie $d(dx)$; a zatem będzie $ddx = d(dx)$. Więc, *żeby miéć różniczkę drugą iakiéykolwiek ilości, niepotrzeba tylko zróżniczkówać ròżniczkę pierwſzą podług reguł wyżéy podanych.*

Np. żeby miéć różniczkę drugą ilości xy; naprzód ſzukam iéy piérwſzéy różniczki, którą znalázłſzy $xdy + ydx$, takową różniczkuię powtórnie, iak gdyby ilości x i dx tudzież y i dy, były wſzyſtkie ilościami odmiénnémi, i mam $xddy + dydx$, $+ dydx + yddx$, albo $xddy + 2dydx + yddx$. Podobniéż, znalázłbym drugą rożniczkę ilości x^2, zróżniczkówawſzy naſamprzód x^2, co mi da $2xdx$, a potém różniczkuiąc $2xdx$, iak gdyby iłości x i dx, były dwie ilości odmiénne pomiérne, ſkąd mi wypada na drugą różniczkę, $2xddx + dx^2$. Podobnież będzie $dd(ax^m) = d(max^{m-1}dx) = m.(m-1).ax^{m-2}dx^2 + max^{m-1}ddx$. *

Gdy-

* *W tym ſpoſobie brania różniczek drugich, może zachodzić trudność; o ktòréy dobrze będzie uprzédzić tu czytelnika. Wynayduiąc różniczki piérwſze, odrzucaią ſię ilości niezmiérnie małe drugiego ſtopnia; a że ròżniczki drugie ſą także ilościami niezmiérnie małémi*

Gdyby była zadana do różniczkówania ilość, w którą wchodziłyby różniczki piérwſze, bądźto że takowe wyniknęły lub nie z doſkonałego różniczkowania, to w takim razie, trzeba ſobie poſtąpić w ténże ſpoſób co wyżéy. I tak, $d(xdy) = xddy + dxdy$. Podobnież, $d\left(\frac{dy}{x}\right) = d(x^{-1}dy) = -x^{-2}dxdy + x^{-1}ddy$. Jako tèż, $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = d(dxdy^{-1}) = ddxdy^{-1} - dxdy^{-2}ddy = \frac{ddx}{dy} - \frac{dxddy}{dy^2}$.

19. Trafia ſię bardzo częſto w rachunkach w które wchodzi wiele ilościów odmiénnych, że różniczka iednéy z tych odmiénnych, rózumié ſię bydź ſtateczną. I to przypuſzczenie ieſt zawſze wolne; bo zawſze można ſobie wziąść iednę z różniczek piérwſzych, za wyráz ſtateczny, do którego ſtóſuią ſię inne różniczki piérwſze; to przypuſzczenie mówię, ułatwia rachunek, bo wyrazy zawiéraiące w ſobie drugie różniczki takiéy odmiénnéy, odpadaią; tak że ieżeli dx ieſt ſtateczne, to będzie $ddx = 0$, przez co ruguią ſię wſzyſtkie wyrazy, zawiéraiące w ſobie ddx. W takim przypadku nietrzeba więcéy tylko dać baczenie, ażeby nieróżniczkować wyrazu dx (czyli różniczki ſtatecznéy), w tych wyrazach gdzie ſię znayduie.

drugiego ſtopnia, przeto czyż nienależy obawiać ſię. ażeby to co ſię odrzuciło w piérwſzém ròzniczkowaniu, niewpływało w niedoſkonałość drugich różniczek? Ale zaiſte nie; bo ta odrzucona ilość niezmiérnie mała drugiego ſtopnia, niémoże dać na ſwoię ròżniczkę tylko ilość niezmiérnie małą trzeciego ſtopnia, która względém drugiéy ròżniczki powinna bydź odrzucona, iako niezmiérnie małéy drugiego ſtopnia.

I tak ròżniczka ilości, $\frac{dx}{dy}$, wziętéy w tém rózumiéniu że dx, iéſt ſtateczne albo $d(dxdy^{-1})$, w témże rozumiéniu, będzie $-dxdy^{-2}ddy$ albo $-\frac{dxddy}{dy^2}$. Przeciwnie przypuściwſzy za ſtateczną dy, różniczka pomiéniónéy ilości byłaby $\frac{ddx}{dy}$.

20. Co ſię tyczé różniczek trzecich, łatwo widziéć ſię daie rozumuiąc iak wyżéy, że dla wynaleziénia ich, nietrzeba więcéy tylko zwyczaynie zróżniczkować różniczki drugie, poczytaiąc tak ſame ilości odmiénne, iako téż ich różniczki piérwſze i drugie za tyléż ilościów odmiénnych od ſiebie różnych; tóż ſa-

ſamo ma ſię rozumiéć o innych różniczkach wyżſzego ſtopnia. Należy tylko uważyć, że ieżeli w przechodzie od piérwſzych różniczek do drugich, iedna z piérwſzych różniczek była wzięta za ſtateczną, to iuż i w całém dalſzém różniczkowaniu powinna zawſze bydź brana za ſtateczną.

21. W tém wſzyſtkiém co poprzédziło rozumieliśmy, że odmiénne x, y i. t. d. pomnażaią ſię wſzyſtkie razém, to ieſt że kiedy x ſtaie ſię $x + dx$, y także ſtaie ſię $y + dy$, tóż o innych. Ale zdarzyć ſię może, że gdy iedne ilości roſną drugie umniéyſzaią ſię. W takim przypadku, po zróżniczkówaniu, w wypadku daie ſię znak — różniczce téy ilości odmiénnéy, która ſię zmniéyſza. Albo téż można zoſtawić różniczkę taką iaka wypada podług reguł poprzédzaiących, ale w przyſtóſówaniu iéy do iakiego zagadniénia, trzeba pamiętać żeby brać w ſpoſób przéczący ilość, która oznacza różniczkę głoſki odmiénnéy zmniéyſzaiącéy ſię.

Przeſtroga.

Jakóż

Jakóż ieżeli y, zmniéyſzyło ſię o ilość q, a przez zróżniczkówanie przypuściło ſię że y odmiéniło ſię na $y + dy$, to muſi bydź $y - q = y + dy$, albo $- q = dy$, albo $q = - dy$; a zatém w takich przypadkach, to co w różniczkówaniu oznaczyło ſię przez dy, wſzędzie indziéy powinno bydź oznaczono przez $- dy$. Zobaczymy to w przykładach niżéy.

Tož ſamo rozumiéć ſię ma o różniczkach drugich względém różniczek piérwſzych. Jeżeli różniczka piérwſza zmniéyſza ſię, to w dalſzém różniczkówaniu poſtępuie ſię zwyczaynie, ale w przyſtóſówaniu iéy potém do iakiego zagadniénia, oznaczy ſię przez $- ddy$, co było oznaczono przez ddy, ieżeli piérwſzą różniczką było dy.

Te ſą reguły różniczkówania, kiedy ilości z któremi ma bydź działano, ſą zadane bezśrzednie. Ale trafia ſię często, że nie z ſamémi ilościami, ale tylko z pewnémi ich wyrażeniami działać potrzeba. *Np.* zamiaſt kątów, używaią ſię częſtokroć ich wſtawy, ſtyczne i. t. d. zamiaſt ilościów biorą ſię ich Logarytmy. Zobaczmy tedy, iak ſobie trzeba poſtąpić w różniczkówaniu takich wyrażéń.

O różniczkach Wſtaw, Doſtaw i. t. d.

22. Kiedy ieſt zadana do różniczkówania ilość taka iak wſt. z (czyli wſtawa kąta albo łuku z), trzeba ſobie wyſtawić w myśli iż z przemiénia ſię na $z + dz$, a natenczas wſt. $(z + dz)$ — wſt. z,

bę-

będzie różniczką ilości wyrażonéy przez wſt. z. Lecz podług tego co ſię rzekło w Jeom. (286), wſt. $(z + dz) =$ wſt. z doſt. $dz +$ wſt. dz. doſt. z, wziąwſzy za promień 1. A znowu, wſtawą łuku niezmiérnie małego dz ieſt ſamże łuk, a doſtawa nieróżni ſię od promiénia, więc będzie, wſt. $dz = dz$, a doſt. $dz = 1$; więc wſt. $(z + dz) =$ wſt. $z + dz$ doſt. z; więc wſt. $(z + dz) -$ wſt. z, albo $d($wſt. $z) = dz$ doſt. z, to ieſt: *Że różniczka wſtawy kąta albo łuku maiącego za promień iedność, znayduie ſię, rozmnożywſzy różniczkę kąta przez iego doſtawę.*

23. Podobnież, różniczka tego wyrażenia, doſt. z, albo doſt. $(z + dz) -$ doſt. $z =$ doſt. z doſt. $dz -$ wſt. z. wſt. $dz -$ doſt. z; bo podług (Jeom. 287) doſt. $(z + dz) =$ doſt. z. doſt. $dz -$ wſt. z. wſt. dz; więc maiąc wzgląd na to, że wſt. $dz = dz$, a doſt. $dz = 1$, będzie $d($doſt. $z) =$ doſt. z. $- dz$. wſt. $z -$ doſt. $z = - dz$ wſt. z; to ieſt *Że różniczka doſtawy kąta, maiącego za promień iedność, znayduie ſię, rozmnożywſzy różniczkę kąta (wziętą z znakiém przeciwnym) przez wſtawę tegóż kąta.*

Za-

Zawſze tedy będzie $d($wſt. $z) = dz$ doſt. z, a $d($doſt. $z) = - dz$ wſt. z. Przy pomocy tych dwóch zaſád, można zróżniczkówać, wſzelką ilość, złożoną z wſtawy i doſtawy, a to podług reguł wyżéy podanych,

I tak maiąc różniczkówać, doſt. $3z$, będzie $d($doſt. $3z) = - 3dz$ wſt. $3z$. Podobnież $d($doſt. $mz)$ (gdzie m rozumié ſię bydź liczbą ſtateczną), będzie $= - mdz$ wſt. mz; a $d($wſt. $mz) = mdz$ doſt. mz. Tudzież $d($wſt. z doſt. $t) =$ doſt. t $d($wſt. $z) +$ wſt. z $d($doſt $t) = dz$ doſt. t doſt. $z - dt$ wſt. z wſt. t. Jako téż $d($wſt. $z)^m = m$ (wſt. $z)^{m-1}$ $d($wſt. $z) = mdz$ doſt. z (wſt. $z)^{m-1}$.

24. Gdyby było zadano $\frac{\text{wſt.}\, z}{\text{doſt.}\, z}$, co wyraża ſtyczną kąta z, kiedy promiéniém ieſt 1; (bo podług (Jeom. 282) doſt. z : 1 :: wſt. z : ſtycz. z); to będzie $d\left(\frac{\text{wſt.}\, z}{\text{doſt.}\, z}\right) = d[(\text{wſt.}\, z)(\text{doſt.}\, z)^{-1}] = dz$ doſt. z (doſt. $z)^{-1} + dz$ (wſt. $z)^2$ (doſt. $z)^{-2} = \frac{dz\ \text{doſt.}\, z}{\text{doſt.}\, z} + \frac{dz\,(\text{wſt.}\, z)^2}{(\text{doſt.}\, z)^2} = \frac{dz\,(\text{doſt.}\, z)^2 + dz\,(\text{wſt.}\, z)^2}{(\text{doſt.}\, z)^2} = \frac{dz}{(\text{doſt.}\, z)^2}$; bo podług (Jeom. 283), (doſt. $z)^2 +$ (wſt. $z)^2 = 1$.

Więc, *różniczka ſtycznéy kąta maiącego za promień* 1, *równa ſię różniczce kąta*

roz-

rozdzielonéy przez kwadrat wſtawy tegoż kąta.

Skąd na odwrót można wnieść, że różniczka kąta, równa ſię różniczce ſtycznéy tegóż kąta, rozmnożonéy przez kwadrat iego doſtawy. Jakóż, ponieważ $d\left(\frac{\text{wſt.}\,z}{\text{doſt.}\,z}\right)$ albo $d(\text{ſtycz.}\,z) = \frac{dz}{(\text{doſt.}\,z)^2}$, więc muſi bydź $dz = (\text{doſt.}\,z)^2\, d(\text{ſtycz.}\,z)$.

25. Przeciwnie maiąc $\frac{\text{doſt.}\,z}{\text{wſt.}\,z}$, co wyraża dotyczną kąta z, będzie $d\left(\frac{\text{doſt.}\,z}{\text{wſt.}\,z}\right) = d[(\text{doſt.}\,z)(\text{wſt.}\,z)^{-1}] = -dz\,\text{wſt.}\,z\,(\text{wſt.}\,z)^{-1} - dz\,(\text{doſt.}\,z)^2\,(\text{wſt.}\,z)^{-2} = -\frac{dz\,\text{wſt.}\,z}{\text{wſt.}\,z} - \frac{dz\,(\text{doſt.}\,z)^2}{(\text{wſt.}\,z)^2} = \frac{-dz(\text{wſt.}\,z)^2 - dz\,(\text{doſt.}\,z)^2}{(\text{wſt.}\,z)^2} = \frac{-dz}{(\text{wſt.}\,z)^2}$. Więc *różniczka dotycznéy kąta, równa ſię różniczce kąta (wziętéy w ſpoſób przéczący), rozdzielonéy przez kwadrat wſtawy tegoż kąta.* Zobaczymy niżéy użycia tego różniczkówania.

O różniczkach Logarytmowych.

26. Przypomniymy ſobie (Aryt. 200), że Logarytmy, ſąto liczby naſtępuiące po ſobie rzędém w progreſſyi Arytmetycznéy iakiéykolwiek, odpowiadaiące wyráz w wyráz innému rzędowi liczb poſtępuiących w progreſſyi Jeometrycznéy iakiéykolwiek.

To założywſzy, niechay będą y i y' dwa wyrazy po ſobie naſtępuiące progreſſyi Jeometrycznéy, w któréyby ſtóſunkiém było r, a dwóma piérwſzémi wyrazami a i a'. Podobnież, niech będą x i x' dwa wyrazy po ſobie naſtępuiące progreſſyi arytmetycznéy, w któréyby b i b' były dwóma piérwſzémi wyrazami. Daymy oráz że x i x' ſą położone w témże miéyſcu progreſſyi arytmetycznéy, iak y i y' w progreſſyi Jeometrycznéy, w którymto razie x i x' będą Logarytmami wyrazów y i y'.

Z natury progreſſyi Jeometrycznéy (Arytm. 195), wypada $y' = ry$, a zaś $a' = ra$; położywſzy w piérwſzém zrównaniu wártość głoſki r wyciągniętą z drugiego zrównania, będzie $y' = \frac{a'y}{a}$, albo $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$. Daymy teráz że różnicą między y' i y ieſt z, albo że $y' = y + z$; miéć będziém $\frac{y+z}{y}$ albo $1 +$

 z

$\frac{z}{y} = \frac{a'}{a}$, a zatém $\frac{z}{y} = \frac{a'}{a} - 1 = \frac{a-a}{a}$, albo $\frac{az}{y} = a' - a$. Z drugiéy ſtrony z natury progreſſyi Arytmetycznéy (Arytm. 188) wypada $x' - x = b' - b$.

Zeby teráz miéć ſtóſunek zachodzący między témi dwiéma progreſſyami, daymy że różnica $a' - a$ dwóch piérwſzych wyrazów w piérwſzéy progreſſyi, ma ſię do różnicy $b' - b$ dwóch piérwſzych wyrazów drugiéy progreſſyi, iak ſię ma iedność do liczby iakiéykolwiek m. to ieſt że $a' - a : b' - b :: 1 : m$; miéć będziém $m(a' - a) = b' - b$; położywſzy tedy w tém oſtatniém zrównaniu zamiaſt $a' - a$ i $b' - b$ wártości dopiéro wynalezione, będzie $\frac{maz}{y} = x' - x$; zrównanie, wyrażaiące ſtóſunek między progreſſyą Jeometryczną iakąkolwiek, i między odpowiadaiącą iéy progreſſyą Arytmetyczną także iakąkolwiek.

Zmyślmy ſobie teráz że w obu progreſſyach wyrazy po ſobie naſtępuiące ſą iedne drugim niezmiérnie bliſkie; natenczas z, wyrażaiące

ce różnicę między y' a y odmiéni ſię w dy, a $x' - x$ wyrażaiące różnicę między x' a x, odmiéni ſię w dx, ſkąd poprzédzaiące zrównanie odmiéni ſię w to: $\frac{mady}{y} = dx$. Co ſię dotyczé m, które oznacza ſtóſunek między różnicą dwóch piérwſzych wyrazów progreſſyi Arytmetycznéy, a między różnicą dwóch piérwſzych wyrazów progreſſyi Jeometrycznéy, takowe mówię m niemniéy przeto będzie pomiérne, lubo te dwie różnice ſą w takim razie niezmiérnie małe; albowiém to łatwo poymówać ſię daie, że dwie ilości niezmiérnie małe, mogą zawiérać w ſobie iedna drugą tyle razy, ile ſię wzaiém zawiéraią ilości pomiérne.

Zrównanie tedy $\frac{mady}{y} = dx$, uczy nas że różniczka dx logarytmu liczby oznaczonéy przez y, równa ſię różniczce dy ſaméyże liczby, różniczce mówię, rozdziélonéy przez tęż liczbę y, a rozmnożonéy przez piérwſzy wyráz a progreſſyi Jeometrycznéy fundamentalnéy, i przez liczbę m. oznaczaiącą ſtóſunek między różnicą dwóch piérwſzych wyrazów progreſſyi Arytmetycznéy, a różnicą dwóch piérwſzych wyrazów progreſſyi Jeometrycznéy. Ponieważ takowa licz-

ba m, uſtanawia nieiakim ſpoſobèm ſtóſunek między dwiéma progreſſyami, przęto nazywa ſię *pomiarém* (modulus).

A ſtąd pokazuie ſię że iedna i taż ſama liczba y może miéć różne logarytmy, podług wártości iaka ſię naznaczy liczbie m i piérwſzému wyrazowi progreſſyi Jeometryczněy. Ale między tèmi wſzyſtkiémi różnémi układami logarytmów, do Rachunków Algebraicznych naywygodniéyſzy ieſt tèn, w którym piérwſzym wyrazém progreſſyi Jeometrycznéy ieſt 1, i pomiarém także 1. Natenczas zrównanie $\frac{mady}{y} = dx$, zawiéraiące w ſobie wſzelkie różnc układy logarytmów, odmiènia ſię w to: $\frac{dy}{y} = dx$.

27. Więc w układzie logarytmów używanym w Rachankach Algebraicznych, *różniczka* dx *logarytmu* x, *liczby iakiéykolwiek* y, *równa ſię różniczce* dy *téyże liczby, rozdzielonéy przez tęż liczbę* y. Na téy zaſadzie łatwo można wynaléśdź różniczkę logarytmu każdéy ilości Algebraicznéy, ale nim do tego przyſtąpimy uważmy 1*ód* Ze logarytmy o których tu mówa, nieſą te co w Tablicach, ale łatwo można wniéść ſobie iedne z drugiah, iak zobaczymy niżéy. 2*re.* Ze piérwſzy wyráz b progreſſyi Arytmetycznéy nieznayduie ſię w zrównauiu $\frac{mady}{y} = dx$; to zrównanie, iako i to drugie oſobne $\frac{dy}{y} = dx$, które ſobie wnieśliśmy z piérwſzego, maią zawſze miéyſce, niechay będzie iaki chce tén piérwſzy wyráz b, to ieſt logarytm piérwſzego wyrazu a progreſſyi

Jeometrycznéy. A zatèm ieſt nam wolno dla prościéyſzego wyrażenia, za logarytm piérwſzégo wyrazu progreſſyi Arytmetycznéy wziąść zero. A że założyliśmy ſobie iż w progreſſyi Jeometrycznéy którą teráz zabawiamy ſię, piérwſzym wyrazém ieſt iedność, więc za logarytm iedności obiérzemy ſobie zero; ale to trzeba dobrze zważyć, że do tego mamy zupełną wolność.

Tym ſpoſobèm tedy obrawſzy iedność za piérwſzy wyráz progreſſyi Jeometrycznéy, a zero za piérwſzy wyráz progreſſyi Arytmetycznéy, albo za logarytm iedności, reguły podane indziéy (Arytm. 207 i daléy) względém użycia logarytmów, ſłużą i tu zarówno. A tak przypomniawſzy ie ſobie i rościągnąwſzy ie powſzechniéy, pokąże ſię, że zamiaſt $l(ab)$, można wziąść $la + lb$, gdzie przez l oznacza ſię logarytm. Podobnież $l\frac{a}{b} = la - lb$; tudzież $la^m = mla$: naoſtatek $l\sqrt[n]{a^m} = la^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}la$.

To założywſzy na przód, na fundamencie zaſady wyżéy uſtanowionéy względém różniczki logarytmu liczby iakowéy, znaydziemy $dlx = \frac{dx}{x}$; $dl(a+x) = \frac{d(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$; $dl\left(\frac{a}{a+x}\right) = d[la - l(a+x)] = -\frac{d(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}$, pomniąc na to że różniczką ſtatecznéy la ieſt zero.

Podobnież, $dl\frac{1}{x} = d(l1 - lx) = \frac{dx}{x}$; $dl(x^2) = d(2lx) = \frac{2dx}{x}$; $dl(xy) = d(lx + ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$; $d(l\frac{y}{x}) = d(lx - ly) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$; $dl(\frac{a+x}{a-x}) = d[l(a+x) - l(a-x)] = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$; $d[l(aa+xx)] = \frac{d(aa+xx)}{aa+xx} = \frac{2xdx}{aa+xx}$; $dl\sqrt{(aa+xx)} = \frac{d\sqrt{(aa+xx)}}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(aa+xx)}\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{xdx}{aa+xx}$; albo wygodniéy, $dl\sqrt{(aa+xx)} = d[\frac{1}{2}l(aa+xx)] = \frac{xdx}{aa+xx}$; $dl[x^m(a+bx^n)^p] = d[lx^m + l(a+bx^n)^p] = d(mlx + pl(a+bx^n)] = \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n}$. Te przykłady mogą bydź doſtateczne na pokazanie, iakim ſpoſobèm różniczkuią ſię wſzelkie inne ilości logarytmowe.

O różniczkach ilościów Wykładniczych.

28. Trafiaią ſię także czaſém ilości takiéy poſtaci, c^x, x^y, to ieſt ilości maiące wykładniki odmiénne; przeto też takowe ilości na-

nazywaią ſię *wykładniczémi* (Exponentielles). Żeby wiédzieć iak ie różniczkować, daymy że $x^y = z$; a natenczas, wziąwſzy logarytm każdéy części tego zrównania, mieć będziém $lx^y = lz$; a zatém $dl(x^y) = \frac{dz}{z}$; więc $dz = zdl(x^y)$, albo (położywſzy zamiaſt z i dz onych wártości), $d(x^y) = x^y dl(x^y)$; to ieſt, że *różniczka ilości wykładniczéy znayduie ſię, rozmnożywſzy też ilość wykładniczą, przez różniczkę iéy logarytmu.*

I tak $d(x^y) = x^y d(lx^y) = x^y d(ylx) = x^y(dylx + \frac{ydx}{x})$. Podobnież $d(a^x + y^z) = d(a^x) + d(y^z) = a^x d(la^x) + y^z d(ly^z) = a^x d(xla) + y^z d(zly) = a^x dxla + y^z(dzly + \frac{zdy}{y})$. Takóż $d(aa+xx)^x = (aa+xx)^x dl(aa+xx)^x = (aa+xx)^x d[xl(aa+xx)] = (aa+xx)^x [dxl(aa+xx) + \frac{2x^2dx}{aa+xx}]$; toż o innych. W rachunkach dość często używać ſię zwykła ilość c^x, gdzie c rozumié ſię bydź liczbą którey logarytm $= 1$. Różniczką tedy tey ilości podług tego co poprzedziło, będzie $c^x d\,(lc^x)$, co wychodzi na $c^x d\,(xlc) = c^x . dxlc$; że zaś lc rozumieliśmy bydź $= 1$, więc będzie prosto $d(c^x) = dxc^x$; to iest że ta osobna ilość wykładnicza, ma za różniczkę swoię też ilość wykładniczą, rozmnożoną przez różniczkę swego wykładnika. Zobaczymy to niżey.

Prystósowanie Reguł poprzedzaiących.

29. Zeby reguły poprzedzaiące i onych użyteczność w pospolitey Algebrze, okazały się przykładami, umyśliliśmy przystósować ie do rzeczy iuż nam wiadomych, to iest do zagadnień Jeometrycznych i Rachunkowych.

Prystósowanie do Podtycznych. Stycznych, i. t. d. w liniiach krzywych. fig. 1.

30. Zeby poprowadzić styczną iakieykolwiek linii krzywey AM (fig. 1), trzeba sobie zmyślić tę liniią krzywą, iakoby wielokąt złożony z nieskończoney czyli niezmierney liczby boków niezmiernie małych; przedłużenie MT iednego z takowych boków Mm, będzie styczną, która wynaydzie się względem każdego iakiegokolwiek punktu M, wyrachowawszy wartość Podtyczney PT, albo części tey linii na którey rachuią się odcinki, części mówię zawartey między rzędną PM i między punktem T gdzie przecina się styczna z pomienioną liniią odcinków. Zobaczmy iak takowa Podtyczna wynayduie się.

Trzeba sobie zmyślić dwie rzędne MP, Mp, przechodzące przez dwa końce M i m boku niezmiernie małego Mm; i liniią Mr, równoległą linii AP albo osio dcinków. Natenczas, tróykąt niezmiernie mały Mrm, będzie podobny tróykątowi pomiernemu TPM i da tę proporcyą: $rm : rM :: PM : PT$. Lecz nazwawszy AP, x; PM, y; iawna iest, że liniia Pp albo oney równa rM będzie wyrażona przez dx, a rm przez dy; więc będzie $dy : dx :: y : PT = \frac{ydx}{dy}$. I to iest powszechna formuła, służąca do wynalezienia Podtyczney w iakieykolwiek linii krzywey, czyto liniie x i y są sobie wzaiemnie prostopadłe, czy nie, byleby liniie y były zawsze sobie

bie równoległe. Zobaczmy teráz jak ta formuła da ſię przyſtóſówać do każdéy linii krzywèy wyrażonèy w zrównaniu.

Daymy że natura linii krzywéy iakiéykolwiek AM, ieſt wyrażona w iakimkolwiek zrównaniu, w które wchodzą odmiénne x, y, i ilości ſtateczne. Zróżniczkówawſzy takowe zrównanie, niebędą w niém nigdy znaydówać tylko dwoiakie wyrazy, to ieſt iedne rozmnożone przez dx a drugie przez dy. Łatwo tedy będzie przy pomocy poſpolitych reguł Algebraicznych, wyciągnąć z tego zrównania różniczkowego wártóść ilości $\frac{dx}{dy}$, w którą wchodzić niebędą tylko x, y, i ſtateczne. Takową wártość położywſzy w formule $\frac{ydx}{dy}$ albo $y \times \frac{dx}{dy}$, wypadnie wártość Podtyczney wyrażona w głoſkach x, y, i w ilościach ſtatecznych; naoſtatek zamiaſt y położywſzy wártość iego wyrażoną w x, a wyciągniętą z zrównania należącego do linii krzywéy, wypadnie taż Podtyczna wyrażona tylko w ſamych x i w ſtatecznych: a tak ażeby wynaléśdź Podtyczną odpowiadaiącą iakiemukolwiek punktowi M, nietrzeba więcéy, tylko w tym oſtatnim wypadku położyć zamiaſt x wártość odcinka AP, odpowiadaiącego temu punktowi M.

Daymy *np.* że liniia krzywa o którą rzecz idzie ieſt ellipſa, do któréy należące zrównanie ieſt $y = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ (Alg. 230).

Ró-

Różniczkuię to zrównanie i mam $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$, albo $2aaydy = abbdx - 2bbxdx$; wyciągam z niego wártość ilości $\frac{dx}{dy}$, dzieląc naprzód przez dy, a potém przez mnożnika wyrázu dx, i mam $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb - 2bbx}$; a zatém będzie $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aay^2}{abb - 2bbx}$; naoſtatek położywſzy zamiaſt y^2 onego wártość $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, iaką daie zrównanie należące do téy linii, po zebraniu miéć będę, $\frac{ydx}{dy}$ albo $PT = \frac{2(ax - xx)}{a - 2x} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$, wártość właśnie taż ſama, którą znaleźliśmy indziéy (Alg. 237), ale która tu znayduie ſię ſpoſobém daleko prędſzym. Uważmy tu po drodze, iako takowy wypadek popiéra to, co powiedziało ſię wyżéy (5) względém ilościów odrzucaiących ſię w rachunku; albowiém używaiąc tu rachunku różniczkowego, w którym podług reguł, ilości niezmiérnie małe drugiego ſtopnia rozumiéią ſię bydź odrzucone, względem ilościów niezmiérnie małych piérwſzego ſtopnia, znalezliśmy ténże ſam wypadek co indziéy w przyſtóſówaniu Algebry do Jeometryi, gdzie tokowéy Podtycznéy ſzukaliśmy iak nayproſtſzą drogą i ſpoſobém iak nayściśléyſzym. A ſtąd pokazuie ſię, że odrzucaiąc pomiénione ilości tak iak ſię przepiſało, nieco innego w tém czyni ſię, tylko nieiako daie ſię piętno rachunchunkowi takie iakie mieć powinien, ażeby wyrażał treść zagadnienia.

Podobnymże ſpoſobém trzeba ſobie poſtąpić, w wynaydówaniu Stycznych, międzyległych, Przytycznych i.t.d. Daymy dla prościéyſzèy rachuby że ilości x i y ſą ſobie wzaiemnie proſtopadłe; żeby mieć ſtyczną, trzeba znowu przyſtóſówać tróykąt Mmr do tróykąta TPM, ſkąd wypadnie $rm : Mm :: PM : TM$; lecz że z przyczyny tróykąta proſtokątnego Mrm, ieſt $Mm = \surd[(rM)^2 + (rm)^2] = \surd(dx^2 + dy^2)$; więc $dy : \surd(dx^2 + dy^2) :: y : TM$; więc $TM = \frac{y\surd(dx^2 + dy^2)}{dy} = \frac{y\surd(dx^2 + dy^2)}{\surd(dy^2)} = y\surd(\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}) = y\surd(\frac{dx^2}{dy^2} + 1)$. A zatèm zróżniczkówawſzy zrównanie należące do téy linii krzywèy, trzeba wyciągnąć z niego wártość ilości $\frac{dx}{dy}$, i kwadrat iéy położyć w wyrażeniu ſtycznèy; potèm zamiaſt y położywſzy wártość iego wyrażoną w x i w ſtatecznych, wyciągniętą z zrównania należącego do tèy linii krzywèy, wypadnie ſtyczna wyrażona w x i w ſtatecznych. Przyſtóſówawſzy ſobie to do Ellipſy, wypadłoby na ſtyczną iéy właśnie toż ſamo wyrażenie, które znaleźliśmy byli na ſwoiém miéyſcu (Alg. 240).

Zeby mieć międzyległą, trzeba ſobie zmyślić liniią MQ proſtopadłą ſtycznéy TM, i uważyć że tróykąty Mrm, MPQ maiące boki wzaiemnie ſobie proſtopadłe, ſą ſobie podobne; a zatèm daią $Mr : rm :: PM : PQ$; to ieſt $dx : dy :: y : PQ = \frac{ydy}{dx}$. Więc zróżniczkówawſzy zrównanie należące do linii krzywèy, trzeba z niego wyciągnąć wártość ilości $\frac{dy}{dx}$, i położyć ią w wyrażeniu $\frac{ydy}{dx}$, a potém ſkóńczywſzy iak wyżéy, wypadnie wártość międzyległéy, wyrażona w x i w ſtatecznych.

Np. zrównanie $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ należące do Ellipſy, po zróżniczkowaniu daie $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$; więc będzie $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{bb}{aa}(a - 2x)}{2y}$; a zatém międzyległa $\frac{ydy}{dx}$ =

$= \frac{bb}{aa} \times \frac{a-2x}{2} = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a - x)$, wyrażenie toż famo które znaleźliśmy indziéy (Alg. 236).

Zeby mieć Przytyczną MQ, nietrzeba tylko podobnież przyftófować tróykąt Mrm do tróykąta MPQ.

Obierzmy fobie na drugi przykład formuły należącéy do Podtycznych i Międzyległych, zrównanie wyrażaiące własności Paraboli, które ieft (Alg. 291) $yy = px$. Zróżniczkówawfzy go mieć będziém $2ydy = pdx$; więc $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, a $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$; więc Podtyczna $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$; a Międzyległa $\frac{ydy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$; co zgadza fię dofkonale z wyrażeniami indziéy wynalezionémi (Alg. 288 i 299).

Na trzeci przykład wezmiémy fobie zrównanie $y^{m+n} = a^m x^n$ wyrażaiące w powfzechności wfzelkiego rodzaiu Parabole. Zgodziliśmy fię indziéy na to ażeby nazywać *Parabolą* wfzelką liniią krzywą, do któréy należące zrownanie byłoby takie iak $y^{m+n} = a^m x^n$, o dwu wyrazach, ale gdzie wykładniki głofek x i y położone w różnych częściach tegóż zrównania, miałyby iednakie znaki.

Zróżniczkówawfzy to zrównanie, mieć będziém $(m+n)\, y^{m+n-1} dy = na^m x^{n-1} dx$; więc $\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n-1}}{na^m x^{n-1}}$; więc Podtyczna

ty-

tyczna $\frac{ydx}{dy}$, będzie $\frac{(m+n).\,y^{m+n}}{na^m x^{n-1}}$, albo (położywfzy zamiaft y^{m+n} onego wartość $a^m x^n$, będzie $\frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)\,a^m x^n}{na^m x^{n-1}} = \frac{m+n}{n}\,x$; fkąd pokazuie fię, że Podtyczna w liniiach krzywych tego rodzaiu, równa fię odcinkowi x tyle razy powtórzonemu, ile będzie iedności ów w wykładniku głofki y, rozdzielonym przez wykładnika głofki x; co ma miéyfce iako to iuż widzieliśmy indziéy w Paraboli pofpolitéy, gdzie Podtyczna ieft wyrażona przez $2x$, i gdzie wykładnik głofki y rozdzielony przez wykładnika głofki x, ieft w rzeczy, faméy $\frac{2}{1} = 2$.

Obierzmy fobie znowu teraz na przykład liniią krzywą, któréy natura byłaby wyrażona w zrównaniu między różniczkami fpółrzędnych. Daymy że liniia krzywa BM (fig. 2.) ieft taka, że odcinki AP, Ap, *fig. 2.* i. t. d. biorą fię w niéy w progreffyi arytmetycznéy, a rzędne odpowiadaiące PM, pm i. t. d. w progreffyi jeometrycznéy; takowa liniia krzywa nazywa fię *Logarytmową*, z téy przyczyny że gdy rzędne wyftawiaią z kolei wfzelkie liczby iakie tylko bydź mogą, odcinki wyftawiaią Logarytmy odpowiadaiące takowym liczbóm; do takiéy tedy linii należy zrównanie $\frac{amdy}{y}$; bo widzieliśmy wyżéy (26), że to zrównanie wyraża ftófunek między liczbami i logarytmami odpowiadaiącémi tym liczbóm. Będzie tedy $\frac{dx}{dy} = \frac{am}{y}$, a zatém Podtyczna

ydx

$\frac{ydx}{dy}$ odmiéni fię w to wyrażenie, $\frac{amy}{y}$ albo am; to ieft, że Podtyczna PT, odpowiadaiąca każdemu i iakiemukolwiek punktowi iednéyże linii logarytmowéy, ieft zawfze taż fama i równa fię piérwfzéy rzędnéy AB albo a, tyle razy powtórzonèy, ile będzie iednościów w pomiarze m.

31. Jeżeli zrównanie należące do linii krzywéy byłoby takie, że o iedén ráz gdy ilości x rofną, ilości
fig. 3. y umniéyfzaią fię, iak w fig. 3, to natènczas liniia rM powinna bydź wyrażona przez $-dy$ (21); a w takim razie proporcya, $rM : rm :: PM : PT$, fłużąca do wynaleziénia Podtycznéy, odmiénia fię w tę, $-dy : dx :: y : PT = -\frac{ydx}{dy}$; a tak w rachubie niebędzie żadnèy innèy różnicy, oprócz że Styczna zamiaft padania z ftrony odcinków A, względém rzędnèy PM, padać będzie z ftrony przeciwnéy: dla czego wyrażenie $\frac{ydx}{dy}$ można zawfze wziąść za formułę Podtycznych; gdzie ieżeli rzędne zmniéyfzaią fię coráz, to wártość ilości $\frac{ydx}{dy}$ wypadać będzie

pod kfztáłtèm przéczącym; daiącym znać że takowa wártość powinna bydź wznaczona z przeciwnèy ftrony tèy ftronie, gdzie ilości x biorą początek.

Np. wziąwfzy zrównanie należące do koła, w ktorém początek odcinków uważał fię od śrzodka, to ieft (Alg. 221.) zrównanie $yy = \frac{1}{4} aa - xx$; iawna ieft, że kiedy CP albo x (fig. 4.) rośnie, to y albo PM fig. 4.
zmniéyfza fię, a zatém Podtyczna PT pada z ftrony PM przeciwnéy początkowi odcinków C; co też i rachunek wfkazuie: albowiém zrózniczkówafzy, będzie $2ydy = -2xdx$, a zatém $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$; więc $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = \frac{-(\frac{1}{4}aa - xx)}{x}$, wártość w któréy znak $-$ daie znać, że ią trzeba wznaczyć z ftrony przeciwnéy téy ftronie, która uważała fię w braniu ilości $\frac{ydx}{dy}$ za formułę należącą do Podtycznèy.

Weźmy fobie iefzcze na przykład zrównanie $xy = aa$, należące do Hiperboli uważonéy między kóńcotycznémi (Alg. 282); mieć będziém $xdy + ydx = 0$, a zatém $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y}$; więc $\frac{ydx}{y} = \frac{-xy}{dy} = -x$; co nam znać daie, że chcąc przytknąć ftyczną do Hiperboli uważonéy między kóńcotycznémi, trzeba wziąść na kóńcotycznéy bliżfzéy fig. 5. punktowi M o który rzecz idzie (fig. 5) z ſtrony PM przeciwnéy początkowi A odcinków x, liniią $PT = AP = x$.

A tu pokazuie ſię, z iaką łatwością wynayduią ſię te wſzyſtkie rzeczy przy pomocy rachunku różniczkowego.

Na wzór Paraból w powſzechności wſzelakiego rodzaiu, nazywaią ſię Hiperbolami uważonémi względém końcotycznych, wſzelkie liniie krzywe, do których należące zrównanie takie iak $y^m = a^{m+n}x^{-n}$, ieſt o dwu wyrazach, ale w którém wykładniki należącc do y i do x położonych w różnych częściach tegóż zrównania, maią znaki przeciwne. Możnaby i takowe liniie krzywe wziąść ſobie ieſzcze za przykład, ale obrachówanie iego zoſtawiamy czytelnikowi, które odbywſzy znaydzie, że Podtyczną ieſt, $-\frac{m}{n}x$; to ieſt, że pada z ſtrony przeciwnéy początkowi odcinków x, i równa ſię odpowiadaiącému odcinkowi powtórzonemu tyle razy, ile ieſt iednościów w wykładniku głoſki y rozdzielonym przez wykładnika głoſki x.

32. Uważmy ieſzcze, że $\frac{dx}{dy}$ wyraża ſtyczną tego kąta, iaki czyni liniia krzywa w każdym ſwoim punkcie, z rzędną odpowiadaiącą; a $\frac{dy}{dx}$ wyraża ſtyczną kąta, iaki czyni liniia krzywa z oſią odcinków. Jakóż w tróy-
fig. 1. kącie proſtokątnym Mmr (fig. 1) (wziąwſzy za promién Tablic iedność)

dność) wypada proporcya, $rm : rM :: 1 : \text{Stycz.}\, rmM$; więc $\text{Stycz.}\, rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$. Więc żeby dóyśdź w którèm miéyſcu liniia krzywa albo iéy ſtyczna, czyni z rzędną kąt iaki pewny zadany, albo kąt którego ſtyczna byłaby wiadoma; oznaczywſzy takową ſtyczną przez m będzie $m = \frac{dx}{dy}$; potèm, przez zróżniczkówanie zrównania należącego do linii krzywéy wynalazłſzy wártość ilości $\frac{dx}{dy}$, i zrównawſzy ią z m, wypadnie zrównanie, w którém położywſzy zamiaſt y wártość iego wyrażoną w x i w ſtatecznych, wyciągnioną z zrównania należącego do linii krzywéy, wynaydzie ſię wártość albo wártóści głoſki x, odpowiadaiące tym punktóm, w których liniia krzywa z rzędną czyni kąt dany; a ieżeliby ta liniia krzywa, nieczyniła nigdzie kąta równego zadanému, to wártości głoſki x wypadną w rachunku w poſtaci zmyślonéy, albo tèż ſamo zrównanie, wſkaże oczywiſte niepodobieńſtwo.

Np. w Hiperboli do którey należałoby to zrównanie, $yy = 2(ax + xx)$, znalazłoby ſię $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a + 4x}$, wártość która zrównana z m, daie $\frac{2y}{2a + 4x}$ albo $\frac{y}{a + 2x} = m$; ſkąd wyciąga ſię $y = ma + 2mx$; a że znowu zrównanie należące do téy linii krzywéy daie $y = \sqrt{[2(ax + xx)]}$, więc $ma + 2mx = \sqrt{[2(ax + xx)]}$, albo ſkwadrówawſzy, $mmaa + 4mmax + 4mmxx = 2ax + 2xx$. Teráz gdyby było zapytano, w którém miéyſcu takowa Hiperbola czyni z rzędną kąt od 45º; ponieważ ſtyczna odpowiadaiąca 45*temu* ſtopniowi, równa ſię promiéniówi, więc będzie $m = 1$, co przemiénia zrównanie na $aa + 4ax + 4xx = 2ax + 2xx$ albo $2xx + 2ax + aa = 0$; a zatém będzie $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa\ \frac{1}{2}aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}aa)}$; wártości zmyślone, które znać daią, że hiberbola do którey należałoby to zrównanie $yy = 2(ax + xx)$, nieczyni w żadném miéyſcu z rzędną kąta od 45º.

Przyſtóſówanie do ograniczenia linii krzywych, a w powſzechności do ograniczenia wſzelkich ilościów, tudzież do zagadnién o naywiękſzościach i naymniéyſzościach (de maximis & minimis).

33. Widzieliśmy dopiéro wyżéy (32), że $\frac{dx}{dy}$ wyraża ſtyczną kąta, iaki czyni z rzędną albo ſa-

ſama liniia krzywa albo iéy ſtyczna w każdym punkcie; a $\frac{dy}{dx}$ wyraża ſtyczną kąta, iaki czyni albo ſama liniia krzywa, albo iéy ſtyczna z oſią odcinków. Więc chcąc wiedziéć w którém miéyſcu ſtyczna linii krzywéy, ſtaie ſię równoległą rzędnym, trzeba poſzukać w którèm miéyſcu wártość ilości $\frac{dx}{dy}$ albo co na iedno wychodzi w którém miéyſcu dx, ſtaie ſię zerém; żeby zaś wiedziéć w którém miéyſcu ſtyczna linii krzywéy ieſt równoległa odcinkóm trzeba ſzukać w którém miéyſcu $\frac{dy}{dx}$ albo co na iedno wychodzi, w którém miéyſcu dy ſtaie ſię zerém. Albowiém iawna ieſt, że w piérwſzym przypadku, między liniią krzywą a między rzędnémi, w drugim zaś przypadku, między liniią krzywą a między odcinkami niéma żadnego kąta.

A ſtąd wynika iawnie, że chcąc wiedziéć ieżeli liniia krzywa, wyrażona w daném zrównaniu, ma w iakim punkcie ſwoię ſtyczną ró-

 wno-

wnoległą rzędnym albo odcinkóm, trzeba takowe zrównanie zróżniczkówać, a wyciągnąwſzy z niego wártość ilości $\frac{dx}{dy}$, i licznika takowéy wártości zrównawſzy z zerèm, wypadnie nowe zrównanie, które wráz z zrównaniém należącém do ſamèyże linii krzywèy, pokaże wártości głoſek x i y, daiących znać w którém miéyſcu ſtyczna ieſt równoległa rzędnym, tak iż ieżeliby to zdarzyć ſię miało w kilku miéyſcach, to też wártości głoſek x i y, wypadną kilkorakie. Przeciwnie zaś zrównawſzy mianownika z zerèm, to takowe zrównanie wráz z zrównaniém należącém do ſamèyże linii krzywéy, pokaże wártości głoſek x i y odpowiadaiące tym miéyſcóm, w których ſtyczna ieſt równoległa odcinkóm.

Zebyśmy to obiaśnili iakim znaiomym przykładém, obierzmy ſobie liniią krzywą wyrażoną w tém zrownaniu, $yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb$, które należy do koła, ieżeli x i y rozumieią ſię wzaiemnie proſtopadłe, początek ich biorąc od punktu A położonego zewnątrſz koła. Liniie AP (fig. 6) ſą wyrażone przez x, a liniie PM, PM' przez y, maiące dwie wárto- fig. 6.

to-

tości, odpowiadaiące każdéy wártości x, a wynikaiące z tegóż zrówniania.

Zróżniczkówawſzy to zrównanie, będzie $2ydy + 3xdx = 2adx + 2bdy$; ſkąd wyciąga ſię $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$. Zrównaymy z zerém naprzód licznika, żeby dóyśdź w których miéyſcach ſtyczna wypada równoległa rzędnym, a mieć będziém $2y - 2b = 0$, albo $y = b$. Położywſzy tę wártość w zrównaniu należącém do linii krzywéy, wypadnie $bb + xx = 3ax - 2aa + 2bb - bb$ albo $xx - 3ax = -2aa$, któreto zrównanie rozwiązane, da $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa)}$, to ieſt $x = 2a$, i $x = a$; co nam znać daie, że liniia krzywa albo iéy ſtyczna, wypada równoległa rzędnym w dwóch punktach R i R', z których każdy ma za rzędną liniią b, a z których ieden R ma za odcinek liniią $AQ = a$, drugi zaś R' ma za odcinek liniią $AQ' = 2a$.

Teráz żeby dóyśdź w którém miéyſcu liniia krzywa albo iéy ſtyczna ieſt równoległa odcinkóm, zrównaymy z zerém mianownika wártości ilości $\frac{dx}{dy}$, a mieć będziém $3a - 2x = 0$, albo $x = \frac{3}{2}a$. Położywſzy tę wártość w zrównaniu należącém do linii krzywéy, mieć będziém $yy + \frac{9}{4}aa = \frac{9}{2}aa - 2aa + 2by - bb$ albo $yy - 2by + bb = \frac{1}{4}aa$; a po wyciągnieniu piérwiaſtka kwadratowego, będzie $y - b = \pm \frac{1}{2}a$, więc $y = b \pm \frac{1}{2}a$, to ieſt $y = b + \frac{1}{2}a$ i $y = b - \frac{1}{2}a$; co nam znać daie, że ſtyczna wypada równoległa odcinkóm, w dwóch punktach T i T', które maią za ſpólny odcinek liniią $AS = \frac{3}{2}a$, a z których ieden T', ma za rzędną $ST' = b + \frac{1}{2}a$, drugi T ma za rzędną liniią $ST = b - \frac{1}{2}a$.

Pun-

Punkta Q i Q' nazywaią ſię *granicami* odcinków (limites); bo między Q i Q' każdému odcinkowi AP odpowiadaią wárto. ści rzetelne PM i PM' wyrażone przez y; zamiaſt że między Q i A, i od Q' aż daléy, niéma żadnego punktu któryby należał do linii krzywéy; tak iż przypuściwſzy x bydź mniéyſze anizeli AQ czyli a, albo téż więkſze anizeli ieſt AQ' czyli $2a$, nieznaydziémy żadnéy rzetelnéy wártości odpowiadaiącéy głoſce y. Jakóż, ieżeli w zrównaniu położymy zamiaſt x, ilość $a-q$ mniéyſzą nad a, albo téż ilość więkſzą nad $2a$, taką iak $2a+q$, po rozwiązaniu zrównania, wártości głoſki y znaydziémy zmyślóne.

Podobnież, ieżeli zmyślimy ſobie linią AL, równoległą rzędnym a przechodzącą przez punkt A, która będzie oſią rzędnych, i ieżeli przez punkta T i T' poprowadzą ſię liniie TL. TL' równoległe odcinkóm; to liniie $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$, i $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$, będą granicami rzędnych; albowiém iawna ieſt, że niémoże bydź więkſzéy rzędnéy nad AL', ani téż mniéyſzéy nad AL, z przyczyny że ſtyczna muſi bydź równoległa odcinkóm. A zatém ieżeli położymy w zrównaniu należącém do linii krzywèy, zamiaſt y, ilość mniéyſzą anizeli ieſt $b-\frac{1}{2}a$, np. taką iak $b-\frac{1}{2}a-q$, zobaczymy rozwiązuiąc zrównanie, że wártości głoſek x wypadną nam zmyślone. Tóż będzie, położywſzy zamiaſt y, ilość $b+\frac{1}{2}a+q$, to ieſt większą nad $b+\frac{1}{2}a$.

34. Rzędna ST, ieſt naywiękſza ſpomiędzy tych wſzyſtkich, co przytykaią do części wklękłéy okręgu RTR'. A znowu rzędna ST', ieſt naymniéyſza ſpomiędzy tych wſzyſtkich, co przytykaią do części wypukłéy; rzędne zaś QR i $Q'R'$ ſą oráz i naymniéyſze ſpomiędzy przytykaiących do części wklękłéy, i naywiękſze ſpomiędzy przytykaiących do części wypukłéy.

35. A tak iedénże ſpoſób ſłuży oráz 1^{od} Do naznaczenia granic odcinkóm i rzędnym. 2re Do naznaczenia w iakich przypadkach ſtyczna ſtaie ſię równoległa odcinkóm albo rzędnym. 3^{cie} Do wynaleziénia naywiękſzych odcinków albo rzędnych.

36. Lecz, niech będzie ilość iaka chce w iaki chce ſpoſób wyrażona Algebraicznie, takowe wyrażenie iéy Algebraiczne, zawſze da ſię uważać iakoby wyrażenie rzędnèy należącéy do iakiéy linii krzywéy. *Np.* maiąc wyrażenie $\frac{x^2 \times (a-x)}{aa}$, i takową ilość nazwawſzy y, będzie $y = \frac{x^2(a-x)}{aa}$; to zrównanie mogę ſobie uważać, iakby było należące do takiéy linii krzywèy, w którèyby x było odcinkiém a y rzędną. Natèn-

tènczas ieżeli ilość $\frac{x^2 \times (a-x)}{aa}$, może w pewnym razie ſtać ſię większą lub mnieyſzą, aniżeli w wſzelkim innym przypadku (co nazywa ſię że ilość ieſt ſpoſobna do przyięcia *nayięſzości* lub *naymnieyſzości*), to w takim razie, oczywiście trzeba tylko ſłowo w ſłowo trzymać ſię ſpoſobu wzwyż podanego; to ieſt naprzód zróżniczkówać zrównanie, a potèm wyciągnąwſzy z niego wártość ilości $\frac{dx}{dy}$, zrównać z zerém licznika albo mianownika takowéy wártości.

37. I na tèmcito należy cała rzecz tycząca ſię *naywiękſzościów* i *naymnieyſzościów*, iedna z naypożyteczniéyſzych w Rachunku Rozbiorowym, maiąca za cèl, ażeby znaléśdź, która ieſt naywiękſza albo naymnieyſza ſpomiędzy wielu ilościów, roſnących albo ubywaiących zawſze iednakowo, a mówiąc w powſzechności maiąca za cél, ażeby wynaléśdź taką ilość, która ſpomiędzy wſzyſtkich poſiada w naywyżſzym ſtopniu iakie pewne właſności. Zobaczmy to w przykładach.

38. Niechay będzie zadano, żeby liczbę a rozdzielić na dwie części takie, ażeby mnogość z nich wynikaiąca była większą aniżeli gdyby taż liczba podzieliła ſię na iakieżkolwiek inne części. Oznaczmy ſobie przez x iednę z takowych części, to druga będzie wyrażona przez $a - x$; a mnogość z nich przez $ax - xx$; która daymy że ieſt $= y$; mieć będziém $y = ax - xx$; więc zróżniczkówawſzy będzie, $dy = adx - 2xdx$, a zatém $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$. Zrównawſzy licznika z zerém, będzie $1 = 0$, co ieſt rzeczą niepodobną. a zatém ieżeli tu ma mieyſce naywiękſzość, to chyba wynaydzie ſię, zrównawſzy mianownika z zerém. Co zrobiwſzy, będzie $a - 2x = 0$; ſkąd wyciąga ſię $x = \frac{1}{2}a$, wartość która znać daie, że podzieliwſzy liczbę zadaną na iakiekolwiek bądź dwie części, mnogość z takowych dwóch części wynikaiąca, w tén czas będzie naywiękſza iak tylko bydź może, kiedy każda z nich równać ſię będzie połowie zadanéy liczby.

39. Jeżeli ilość będzie wyrażona Algebraicznie, iak w terazniéyſzym przykładzie, to można obèyśdź ſię bez równania iéy z nową odmièną y; nietrzeba tylko ią proſto zróżniczkówać, i zrównać z zerèm licznika lub mianownika, ieżeli takowa różniczka ieſt ułamkiém. I tak w tymże przykładzie, zróżniczkówałbym proſto $ax - xx$, a zrówna-

wnawſzy z zerèm różniczkę $adx - 2xdx$, miálbym $adx - 2xdx = 0$, ſkąd wyciąga ſię $x = \frac{1}{2}a$.

40. Obierzmy ſobie ieſzcze inſze powſzechnieyſze Zagadnienie. Niechay trzeba będzie *np.* podzielić liczbę wiadomą a, na dwie części takie, ażeby mnogość wynikaiąca z iedney wynieſioney do pewnego ſtopnia, przez drugą część wynieſioną do podobnegoż albo też do innego ſtopnia, była naywiękſzą mnogością iak tylko można. Oznaczmy ſobie przez x pierwſzą część, a przez m ſtopień do którego ma bydź wynieſiona; naténczas druga część będzie wyrażona przez $a - x$, która daymy że ma bydź wynieſiona do ſtopnia n; w takim razie, żądaną mnogością będzie ilość $x^m(a-x)^n$; takową zróżniczkówawſzy i wypadłą różniczkę zrównawſzy z zerém, będzie $mx^{m-1}dx.(a-x)^n - nx^m.(a-x)^{n-1}dx = 0$; a rozdzieliwſzy wſzyſtko przez $x^{m-1}dx(a-x)^{n-1}$, będzie $m(a-x) - nx = 0$, albo $ma - mx - nx = 0$; ſkąd wyciąga ſię $x = \frac{ma}{m+n}$. Daymy tedy że liczba zadana a, miała bydź podzielona na dwie części takie, ażeby kwadrat iedney części rozmnożony przez ſześcian drugiey części, dał naywiękſzą mnogość iak tylko można. W takim razie będzie $m = 2$, a $n = 3$; a zatém wypadnie $x = \frac{2a}{2+3} = \frac{2}{5}a$; to ieſt, że iedna część powinna wynoſić $\frac{2}{5}$ liczby albo ilości zadaney, a druga $\frac{3}{5}$.

To

To co powiedziało ſię wyżey z okazyi figury 6, daie znać, że ilość może ſtać ſię naywiękſzą ſpomiędzy wſzyſtkich innych ſobie podobnych, a to dwóma ſpoſobami; iako to kiedy ilość taka iak PM naprzód rośnie, maiąca potèm umnieyſzać ſię, albo kiedy ilość taka iak $P''M''$ zrazu rośnie, maiąca potèm nagle zaſtanowić ſię, obróciwſzy ſię w $Q'R'$; ale w tym oſtatnim przypadku, pomiéniona ilość ieſt razèm i naywiękſza ſpomiędzy wſzyſtkich rzędnych, przytykaiących do części wypukłey, i naymnieyſza ſpomiędzy tych co przytykaią do części wklękłey. Podobnież, ilość może ſtać ſię naymnieyſzą, ſpomiędzy wſzyſtkich innych ſobie podobnych, także dwóma różnémi ſpoſobami, iakoto: kiedy PM naprzód zmnieyſza ſię ażeby potèm roſła, albo tèż kièdy ilość taka iak $P''M''$ naprzód zmnieyſza ſię ażeby potèm nagle zaſtanowiła ſię, która w tym oſtatnim przypadku ieſt razèm *naymnieyſzością*, i *naywiękſzością*; *naymnieyſzością*, względèm ramienia $M'TM'$, a naywiękſzością względèm ramienia MTM''. fig. 6.

41.

41. A zatèm wiedząc że ilość iaka, ieſt ſpoſobna do przyięcia naywiękſzości lub naymniéyſzości, albo téż oboyga, żeby rozeznać w iakim znayduie ſię z tych trzech przypadków, trzeba (rozumieiąc że a oznacza wártość głoſki x przyzwoitą *naywiękſzości* lub *naymniéyſzości*) trzeba mówię, w zadanéy ilości położyć koléyno zamiaſt x ilości $a+q$, a, i $a-q$. Jeżeli dwa wypadki ſkrayne będą rzetelne i mniéyſze nad wypadek śrzodkowy, to ilość będzie *naywiękſzością*; przeciwnie ieżeli dwa wypadki ſkrayne będą większe nad wypadek śrzodkowy, to ilość będzie *naymniéyſzością*; naoſtatek ieżeli z dwóch wypadków ſkraynych, iedén będzie zmyślony a drugi rzetelny, to ilość będzie razèm i *naywiękſzością* i *naymniéyſzością*.

42. Kiedy w ſzukaniu *naywiękſzości* lub *naymniéyſzości*, wynaleziona wártość ilości odmiénnèy, na wártość *naywiękſzości* lub *naymniéyſzości* daie ilość przéczącą, to należy ſtąd wnieść, że takowa wynaleziona *naywiękſzość* albo *naymniéy-*

mniéyſzość, nienależy do niniéyſzego zagadniénia, ale raczèy do takiego zagadniénia, w którèm niektóre warunki zachodziłyby przeciwne.

Np. gdyby zadano było przedzielić liniią AB (fig. 7) w punkcie C, tak ażeby kwadrat odległości AC od punktu A, będąc rozdzielony przez odległość od punktu B, dał naymniéyſzy wieloráz iaki tylko bydź może. Tym kóncém oznaczywſzy przez a liniią zadaną AB, a przez x część AC; część pozoſtała CB będzie wyrażona przez $a-x$; a zatém wielorazém byłoby $\frac{x^2}{a-x}$; zróżniczkówawſzy tedy tę ilość, albo $x^2(a-x)^{-1}$, mieć będziém $2xdx.(a-x)^{-1} + x^2dx(a-x)^{-2} = 0$, albo $\frac{2xdx}{a-x} + \frac{x^2dx}{(a-x)^2} = 0$, albo $2axdx - x^2dx = 0$, albo $(2a-x)x = 0$; ſkąd wyciąga ſię $x=0$, albo $2a-x = 0$; piérwſza wártość, wyraża naymniéyſzość, ale która oczywiście pod żadén rachunek niepodpada. Co ſię zaś dotyczé drugiéy, z któréy wyciąga ſię $x=2a$, ieżeli zamiaſt x położy ſię ta wártość w ilości $\frac{x^2}{a-x}$, to takowa przemiéni ſię na $\frac{4a^2}{-a}$, albo na $-4a$. Wynaleziona tedy naymniéyſzość, niémoże należyć do niniéyſzego zagadniénia. Ale dawſzy baczenie na wypadłą wártość $x=2a$, da ſię widzieć, że punkt C niémoże znaydówać ſię między A i B; ale że zagadniénie mogłoby bydź rozwiązane, gdyby rzecz ſzła o wynaleziénie tegóż punktu C na przedłużeniu linii AB za punkt B, wzglę- fig. 7.

względém A. Lecz w takim razie, ieżeli oznaczymy AC przez x; odległość BC iuż niebędzie wyrażona przez $a - x$, ale przez $x - a$, a zatém ilość $\frac{x^2}{a - x}$ przemiéni się na $\frac{x^2}{x - a}$, którą zróżniczkówawszy zrównawszy z zerém, będzie $\frac{2xdx}{x - a} - \frac{2x^2dx}{(x - a)^2} = 0$, albo po uczynionych zebraniach: $x^2dx - 2axdx = 0$; skąd wyciąga się $x = 2a$, iak piérwéy; lecz ta wartość położona w ilości $\frac{x}{x - a}$, przemiénia ią na $4a$, więc naymniéyszość ma miéysce w tym przypadku.

Jeżeli mianownik $x - a$ różniczki, zrówna się z zerém, to będzie $x = a$, co daie znać o *naywiększości*. Jakóż kiedy $x = a$, to ilość staie się niezmiérną, ale przeto niemniéy ma prawdziwe znamię *naywiększości*; albowiém x czyto rozumié się mniéysze czy większe nad a, to zawsze ilość mniéysza nieznayduie się inaczéy, tylko przypuściwszy bydź $x = a$.

43. Kiedy w zrównaniu iakiéy ilości maiącéy bydź *naywiększością* albo *naymniéyszością*, znayduie się iaki mnożnik albo dziélnik stateczny, to przed zróżniczkowaniém można odrzucić tak tego iak owego. Jakóż, daymy że $\frac{ay}{b}$ wyraża w powszechności ilość, która ma bydź *naywiększością* albo *naymniéyszością*; gdzie głoski a i b rozumieią się stateczne; musi tedy bydź $\frac{ady}{b} = 0$, ale że ani a ani b nieiest zerèm, więc musi bydź $dy = 0$; skąd wypada tènże sam wniosek, iak gdyby tylko samo y miało bydź *naywiększością* albo *namniéyszością*, to iest tènże sam, co wypada po odrzuceniu czynników i dziélników statècznych. Ta uwaga służy do skrócenia Rachunków w wielu przypadkach.

44. Obierzmy sobie teraz to zagadnienie: *Ażeby znaléśdź, spomiędzy wszystkich linii które tylko mogą bydź poprowadzone przez tènże punkt D, dany w znaiomym kącie ABC (fig. 8), która iest taka, co z bokami tego kąta, czyniłaby naymniéyszy tróykąt, iak tylko bydź może.* fig. 8.

Poprowadźmy przez punkt D liniią DG równoległą bokowi AB, a zmyśliwszy sobie iakąkolwiek liniią prostą EF, przeprowadzoną przez tènże punkt D, spuśćmy prostopadłą DK na liniią BC, a drugą EL z punktu E, w którym liniia EF spotyka się z liniią AB. Liniia BG, rozumié się bydź wiadoma, iako też i prostopadła DK; niechay tedy będzie $BG = a$, $DK = b$, a podstawa BF tróykąta BEF niech będzie $= x$. Jawna iest, że począwszy od pewnego punktu, im bardziéy będzie rosnąć liniia BF, tém też bardziéy tróykąt pomnażać się będzie. Przeciwnie znowu da się poy-

poymówać, że taż liniia BF im bardziéy zmniéyſzać ſię będzie, tèm téż bardziéy zmniéyſzać ſię będzie tróykąt, ale to tylko aż do pewnego punktu. Bo ieżeliby liniia BF prawie zrównała ſię linii BG, to liniia EDF ſtałaby ſię prawie równoległą linii AB, obracaiąc ſię w takim razie prawie w liniią GD, przez co tróykąt ſtawałby ſię niezmiérnie wielki. Muſi tedy bydź iakaś pewna wártość linii BF, daiąca naymniéyſzy tróykąt iak tylko bydź może; którą żeby wynaléśdź, ſzukaymy powſzechnego wyrażenia tróykąta BEF. Tróykąty ſobie podobne, BEF, GDF, daią $GF : BF :: DF : EF$; tróykąty zaś DKF i ELF także ſobie podobne daią $DF : EF :: DK : EL$; więc $GF : BF :: DK : EL$; to ieſt, $x - a : x :: b : EL = \frac{bx}{x-a}$; więc powiérſzchnia tróykąta BEF, która ieſt $\frac{EL \times BF}{2}$, będzie wyrażona przez $\frac{bx}{x-a} \times \frac{x}{2}$, albo przez $\frac{\frac{1}{2}bxx}{x-a}$. Trzeba tedy, zróżniczkówawſzy tę ilość, ażeby albo licznik albo mianownik ſtał ſię zerém, albo téż (z przyczyny że można wyrzucić ſtatecznego czynnika $\frac{1}{2}b$ (43), doſyć będzie zróżniczkówać ilość $\frac{xx}{x-a}$; lecz niepowtarzaiąc rachunku iuż wyżéy odbytego (42), wnieść ſobie i tu podobnież można, że $x = 2a$. Więc zrobiwſzy liniią $BF = 2a = 2BG$, liniia FDE, poprowadzona przez punkt D, da tróykąt FBE, naymniéyſzy iak tylko bydź może.

45. *Szukaymy teráz, ſpomiędzy wſzyſtkich równoległościanów téyże powiérſzchni i téyże wyſokości, który ieſt taki, coby miał naywiękſzą obiętość.*

Oznaczmy ſobie przez h wyſokość, przez cc powiérſzchnią równoległościanu; x i y niechay będą dwa boki proſtokąta ſłużącego za podſtawę. Cała powiérſzchnia ſkłada ſię z ſześciu proſtókątów, z których dwa maią h za bok czyli za wyſokość, a x za podſtawę; inne dwa maią h za wyſokość, a y za podſtawę; a na reſzcie dwa oſtatnie maią x za podſtawę, a y za wyſokość; a zatém całéy powiérſzchni będzie to wyrażenie, $2hx + 2hy + 2xy = cc$. Co zaś dotycze ſię obiętości czyli bryłówatości, takowa wyraża ſię przez hxy; która ponieważ ma bydź naywiękſza ſpomiędzy wſzyſtkich innych téyże powiérſzchni, przeto potrzeba ażeby iéy różniczka $hxdy + hydx$ była $= 0$, albo (co na iedno wychodzi) ażeby $xdy + ydx$ było $= 0$. Lecz zrównanie $2hx + 2hy + 2yx = cc$, które wyraża że powiérſzchnia tych wſzyſtkich równoległościanów ieſt ſtateczna, to ieſt zawſze iednakowa, daie $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$; więc w tém zrównaniu położywſzy wártość ilości dx, wyciągniętą z piérwſzego zrównania, po uczynionych zebraniach, będzie $y = x$; co znać daie, że podſtawa takiego równoległościanu powinna bydź kwadratém. Zeby zaś oráz dóyśdź boku iego czyli wyſokości, trzeba zamiaſt y położyć wártość iego x, wzrównaniu $2hx + 2hy + 2xy = cc$, które tym ſpoſobém przeméni ſię na $4hx + 2x^2 = cc$, a będąc rozwiązane, da $x = -h \pm \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$; gdzie z dwóch wártościów iedna, to ieſt $x = -h - \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$ będąc przéczącą, niémoże ſłużyć niniéyſzemu zagadniéniu, a zatém na przyzwoitą wártość w tym razie, niezoſtaie tylko ta druga, $x = -h + \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$.

46. Teráz gdyby było zadano: *iaka powinnaby bydź wyſokość* h, *ażeby równoległościan ſpomiędzy wſzyſtkich innych téyże powiérſzchni, miáł naywiękſzą bryłówatość*; trzeba naprzód uważyć, że ponieważ wyſokością będąc h, podſtawa ma bydź kwadratém, więc takowa bryłowatość muſi bydź wyrażona przez hxx; trzeba tedy ażeby różniczka ilości hxx, poczytaiąc h i x za odmiénne, była $= 0$; a zatém będzie $2hxdx + xxdh = 0$, albo $2hdx + xdh = 0$, rozdzieliwſzy przez x. Lecz zrównanie $4hx + 2x^2 = cc$, wyrażaiące że w takim razie powiérſzchnia ieſt ſtateczna, daie zróżniczkówawſzy, $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$; więc położywſzy w tèm zrównaniu, zamiaſt dh wártość iego wyciągniętą z zrównania $2hdx + xdh = 0$, będzie po uczynionych zebraniach $h = x$; więc wielościan ſzukany muſi bydź ſześcianém, kiedy bok czyli wyſokość iego h, ma równać ſię bokowi x kwadratu ſłużącego za podſtawę. Teráz żeby wynaléśdź bok tego ſześcianu, trzeba położyć zamiaſt h wártość iego x w zrównaniu $4hx + 2x^2 = cc$, które przez to odmiéni ſię na $4x^2 + 2x^2 = cc$, albo $6x^2 = cc$, ſkąd wyciąga ſię $x = \sqrt{(\frac{cc}{6})}$. Więc ſpomiędzy wſzyſtkich równoległościanów tèyże powiérſzchni, naywiękſza bryłówatość ieſt ſześcianu, maiącego za bok liniią równaiącą ſię pierwiaſtkowi kwadratowemu, wyciągniętemu z ſzoſtéy części téyże powiérſzchni.

47. Podobnież poſtąpić ſobie będzie należało, żeby rozwiązać to inne zagadnienie: *Spomiędzy wſzyſtkich wálków proſtych téyże powiérſzchni, ktory ieſt, co ma naywiękſzą obiętość czyli bryłówatość.*

Oznaczywſzy przez x śrzednicę podſtawy, przez y wyſokość, przez $1 : c$ ſtóſunek śrzednicy do okręgu, wypadnie na powiérſzchnią wypukłą cxy, na całą zaś powiérſzchnią, $cxy + \frac{cx^2}{2}$, a $\frac{cx^2y}{4}$, na bryłówatość. Którato oſtatnia ponieważ ma bydź *naywiękſzością*, więc różniczka iéy muſi bydź zerém; a zatém będzie $\frac{cxydx}{2} + \frac{cx^2dy}{4} = 0$, albo $2ydx + xdy = 0$; niemniéy z przyczyny że powiérſzchnia ieſt ſtateczna, iéy różniczka muſi także bydź zerém, a zatém podobnież będzie $cxdy + cydx + cxdx = 0$, albo $xdy + ydx + xdx = 0$.

Zrównanie $2ydx + xdy = 0$, daie $dy = -\frac{2ydx}{x}$. Położywſzy tę wártość w oſtatniém zrównaniu, będzie $-2ydx + ydx + xdx = 0$, ſkąd wyciąga ſię $y = x$. Co znać daie, że ſpomiędzy wſzyſtkich wálków proſtych iednéyże powiérſzchni, tén ma naywiękſzą obiętość czyli bryłówatość, którego wyſokość równa ſię śrzednicy podſtawy. I odwrotnie, ſpomiędzy wſzyſtkich wálków proſtych iednéyże bryłówatości, tén ma naymniéyſzą powiérſzchnią, którego wyſokość równa ſię śrzednicy podſtawy.

Więc w możdziérzach z kómorami wálkowémi, proch naymniéy mocy wywiéra przeciwko ścianóm takiéy kómory, któréy głębokość równa ſię śrzednicy onéyże.

48. Szukaymy znowu teráz: *Spomiędzy wſzyſtkich tròykątòw tegóż obwodu i*

téyże podstawy, który iest taki, coby miał naywiększą powiérzchnią.

Oznaczmy sobie przez a podstawę AB, a przez c obwód tróykąta ABC fig. 9. (fig. 9). Spuśćmy prostopadłą CP, i nazwiymy $AP = x$, $CP = y$; mieć będziém $PB = a - x$, $AC = \sqrt{(xx + yy)}$, a $CB = \sqrt{[(a-x)^2 + yy]}$. Więc obwód będzie wyrażony przez $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[(a-x)^2 + y^2]} + a$, a powiérzchnia przez $\frac{ay}{2}$. Będzie tedy $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[(a-x)^2 + y^2]} + a = c$; trzeba zaś ażeby różniczka wyrażenia $\frac{ay}{2}$ była $= 0$, to iest żeby było $\frac{ady}{2} = 0$, a zatém $dy = 0$. Daléy, zrównanie które wskazuie że obwód iest stateczny, będąc zróżniczkowane da nam, $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy)}} + \frac{(a-x) \cdot - dx + ydy}{\sqrt{[(a-x)^2 + yy]}} = 0$, które, z przyczyny że $dy = 0$, wychodzi na $\frac{xdx}{\sqrt{(xx + yy)}} - \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{[(a-x)^2 + yy]}} = 0$, albo rozdzieliwszy przez dx, i zniósłszy ułamki, na $x\sqrt{[(a-x)^2 + yy]} = (a-x) \cdot \sqrt{(xx + yy)}$. A skwadrówawszy, będzie $xx \cdot (a-x)^2 + xxyy = (a-x)^2 \cdot xx + (a-x)^2 \cdot yy$; potém wyrzuciwszy z obu części wyrazy iednakowe, i każdą część zrównania rozdzieliwszy przez yy, będzie $xx = (a-x)^2$, albo $xx = aa - 2ax + xx$, skąd wyciąga się $x = \frac{1}{2}a$, wartość daiąca znać, że tróykąt powinién bydź równoramiénny. A zatém trzeba z śródka linii AB wystawić

wić prostopadłą, i z punktu B iako ze śrzodka promiéniém równaiącym się połowie zbytku obwodu c nad podstawę a, narysować łuk, który takową prostopadłą przetnie w punkcie C, naténczas, ieżeli poprowadzą się linie CB i CA, to niémi zamknie się tróykąt, maiący naywiększą powiérzchnią spomiędzy wszystkich innych tegóż obwodu i téyże podstawy.

49. Teraz zaś chcąc wiedziéć w powszechności: *Spomiędzy wszystkich tróykątów iednegóż obwodu, który iest taki, coby miał naywiększą powiérzchnią*, trzeba uważyć, iako z poprzedzaiącego rozwiązania pokazuie się, że choćby podstawa była iaka chce, to zawsze x powinno równać się iéy połowie; to iest że niechay będzie iaka chce, wartość głoski a, to zawsze musi bydź $x = \frac{1}{2}a$. To założywszy na przód, zrównanie wyrażaiące obwód, wynidzie na $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + a = c$, albo $2\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} = c - a$; a skwadrówawszy, będzie $aa + 4yy = cc - 2ac + aa$, skąd wyciąga się $y = \sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$. Powiérzchnia tedy tróykąta, w powszechności wyrażona przez $\frac{ay}{2}$, przemiéni się na $\frac{a}{2}\sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$. A że takowa powiérzchnia ma bydź naywiększa spomiędzy wszystkich innych tegóż obwodu, podstawa a niechby była iaka chce, więc trzeba zrównać z zerém różniczkę ilości $\frac{a}{2}\sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$ albo ilości $a\sqrt{(cc - 2ac)}$, uważaiąc w niéy a iako odmiénną. Będziémy zatém mieć $d[a\sqrt{(cc - 2ac)}]$, albo $d[a(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}}]$ to iest, $da(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}} - a \cdot cda\,(cc - 2ac)$

$2ac)^{-\frac{1}{2}} = 0$, albo $da\sqrt{(cc - 2ac)} - \frac{cada}{\sqrt{(cc - 2ac)}} = 0$, albo $da(cc - 2ac) - cada = 0$, albo $ccda - 3cada = 0$, ſkąd wyciąga ſię $a = \frac{c}{3}$. Więc podſtawa a powinna bydź trzecią częścią obwodu: a ponieważ widzieliśmy indziey, że tróykąt ma bydź równoramiénny, więc ſtąd ieſzcze daléy wynika, że muſi bydź i równoboczny. Więc ſpomiędzy wſzyſtkich tróykątów iednegóż obwodu, tróykąt równoboczny ma naywiękſzą powierſzchnią.

50. W tych dwóch rozwiązaniach, nierównaliśmy mianownika z zerém; bo w piérwſzém, na x wypadłaby nam była wártość zmyślona; a w drugiém bylibyśmy znalezli $a = \frac{1}{2}c$, wártość która nierozwięzowałaby zagadniénia; bo gdyby podſtawa wynoſiła połowę obwodu, to pozoſtałe dwa boki, obróciłyby ſię w tęż podſtawę, a w takim razie tróykąt równa ſię zerowi. Na potém, kiedy licznik albo mianownik zrównany z zerém, niémiałby nas przywiéśdź do przyzwoitego rozwiązania, to iuż o nim wzmianki nieuczynimy, żebyśmy ſię daremnémi rachunkami nierozwodzili.

51. W zagadnéniu przedoſtatniém, nieprzyſzliśmy do wynaleziénia, który ieſt ſpomiędzy wſzyſtkich równoległościanów téyże powiérſzchni, co ma naywiękſzą obiętość, aż po rozważeniu równoległościanów iednéyże wyſokości. Podobnież w oſtatniém zagadnéniu znalezliśmy tróykąt maiący naywiękſzą powiérſzchnią, ſpomiędzy wſzyſtkich innych tegóż obwodu, ale wprzód poczęliśmy od rozwiązania zagadnénia, tyczącego ſię tróykąta iednéyże podſtawy.

Poſpolicie zręczniéy bywa tak ſobie poſtępować; to ieſt rozwięzuiąc zagadnénie, nietrzeba razém poczytać za odmiénne tylko iak naymniéyſzą liczbę ilościów, a dopiéro potém z koléi każdą ilość poczytaną wprzód za ſtateczną, uważać w rachunku iako odmiénną.

Np. gdyby było zadano, rozdzielić liczbę pewną na trzy części, takie, ażeby mnogość wynikaiąca z tych trzech części, była naywiękſzą mnogością iak tylko bydź może. Oznaczywſzy ſobie dwie z takowych części przez x i y, a przez a liczbę zadaną, trzecia część będzie wyrażona przez $a - x - y$, a zaś mnogość wynikaiąca z tych trzech części byłaby $xy(a - x - y)$, któ-

którèy różniczka ma bydź zrównana z zerém. Lecz w tém różniczkówaniu, zamiast uważania razém oboich ilościów x i y za odmiènne, niebiorę tylko ſamo x za taką odmiénną ilość, i mam $aydx - 2xydx - y^2dx = o$, ſkąd wyciąga ſię $x = \frac{1}{2}(a-y)$; przez co mnogość $xy(a-x-y)$ odmiénia ſię na $\frac{1}{4}y(a-y)^2$. Teráz znowu różniczkuię poczytaiąc y za odmiénną, i mam $\frac{1}{4}dy(a-y)^2 - \frac{2}{4}ydy(a-y)$, na różniczkę, którą podobnież zrównawſzy z zerém, będzie $dy(a-y)^2 - 2ydy(a-y) = o$, ſkąd wyciąga ſię $y = \frac{1}{3}a$; więc x, i trzecia część to ieſt $a-x-y$, każda muſi bydź wárta $\frac{1}{3}a$.

52. Można téż, ieżeli ſię ſpodoba, poczytać wſzyſtkie ilości razém za odmiénne, a potém zgromadziwſzy wſzyſtkie wyrazy rozmnożone przez różniczkę tèyże ilości odmiénnéy, ich ſummę zrównać z zerém, i toż ſamo wykonać względém różniczki każdèy innèy odmiénnéy.

I tak w oſtatnim przykładzie, mielibyśmy $aydx + axdy - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx = o$; gdzie zoſobna zrównawſzy z zerém ſummę wyrazów zawièraiących w ſobie dx, i ſummę wyrazów zawiéraiących w ſobie dy, mielibyśmy $aydx - 2xydx - y^2dx = o$, tudzież $axdy - x^2dy - 2xydy = o$; albo rozdzieliwſzy piérwſzą różniczkę przez ydx a drugą przez xdy, będzie $a - 2x - y = o$, i $a - x - 2y = o$; zrównania z których łatwo wyciąga ſię $x = \frac{1}{3}a$ i $y = \frac{1}{3}a$, iak było wyżéy.

Przyczyna tego poſtępku łatwo poiąć ſię daie, zważywſzy, iż tu niezachodzi tylko

ko tén warunek, ażeby cała różniczka była zerém. Lecz tén warunek w powſzechności niémoże bydź dopełniony tylko dwoiakim ſpoſobém; to ieſt, albo rozumiéiąc że każda z dwóch różniczek dx i dy równa ſię zerowi, co czyniłoby wprawdzie zadość warunkowi, aleby nam nic niewſkazało; albo téż rozumieiąc że ſumma wyrazów mnożących dx iako też ſumma wyrazów mnożących dy, każda z nich równa ſię zerowi, a to właśnie wychodzi na to cośmy przepiſali.

53. Kiedy warunki zagadniénia ſą wyrażone w wielu zrównaniach, to przed przyſtóſówaniém tèy reguły do zrównania różniczkowego, maiącego wſkazać *naywiękſzość* albo *naymnièyſzość*, trzeba wprzód wyciągnąć z innych zrównań zróżniczkówanych, wártości różniczek tylu odmiénnych, ile będzie zrównań oprócz tego zrównania, i takowe wártości wprowadzaią ſię w to zrównanie; co uczyniwſzy, poſtępuie ſię zwyczaynie podług reguły, iak gdyby niebyło innego, tylko to zrównanie.

I tak w przykładzie wzwyż położonym przyſtóſówanym do naywiękſzego równoległościanu, mieliśmy to zrównanie $2hx + 2hy + 2xy = cc$, i tén warunek że hxy powinno bydź *naywiękſzością*. Jeżeli tedy h, x i y wſzyſtkie trzy razém poczytać zechcémy za odmiénne, to zrównanie $2hx$ + t. d.

po

po zróżniczkówaniu da nam, $2hdx + 2xdh + 2hdy + 2ydh + 2xdy + 2ydx = 0$; z warunku zaś *naywiękſzości* wypadnie $hxdy + hydx + xydh = 0$. Z piérwſzego zrównania wyciągnąwſzy $dh = \frac{-ydx - xdy - hdy - hdx}{x + y}$ i położywſzy tę wártość w drugiém zrównaniu, po uczynionych zebraniach, będzie $hx^2dy + hy^2dx - xy^2dx - x^2ydy = 0$. Teráz ſummę wyrazów mnożących dx, i ſummę wyrazów mnożących dy, każdą zoſobna zrównawſzy z zerém, miéć będziém $hy^2 - xy^2 = 0$, albo $h = x$, i $hx^2 - x^2y = 0$; ſkąd, po rozdieléniu wſzyſtkiego przez ſpólnego czynnika x^2, wyciąga ſię $h - y = 0$, albo $h = y$; a że było $h = x$, więc muſi bydź także $y = x$; więc wſzyſtkie trzy wymiary h, x, y, wypadaią ſobie równe, co właśnie zgadza ſię z piérwſzém rozwiązaniém; nakoniec położywſzy te trzy wártości w zrównaniu $2hx + 2hy + 2xy = cc$, będzie $6h^2 = cc$, ſkąd wyciąga ſię $h = \sqrt{\left(\frac{cc}{6}\right)}$, iak w témże pierwſzém dopiéro wzmiankówaném rozwiązaniu.

54. Nietylko można wſzyſtkie razém, albo poiedyńczo z kolei brać ilości za odmiénne, ale téż można poczytać za ſtateczne, takie części tychże ilościów iakie ſię ſpodobaią, byleby liczba tych nowych warunków obranych podług upodobania, złączona z liczbą warunków należących do zagadniénia, nieprzewyżſzała liczby odmiénnych x, y, z wchodzących w zagadniénie. Ta uwaga

ga może bydź arcy użyteczna w wielu zagadniéniach, oſobliwie gdzie wchodzą ilości piérwiaſtkowe.

O Promiéniach Krzywościów albo o Rozwiyce (*Dévoloppée*).

55. Zmyśliwſzy ſobie, że z każdego punktu M, m, m' i. t. d. linii krzywéy iakiéykolwiek, (fig. 10), ſą powyſtawiane proſtopadłe MN, mn, $m'n'$ i. t. d.; to z przecięciów koléynych n, n' i. t. d., powſtaie inna liniia krzywa, nazwana *Rozwiyką*; z przyczyny, że uważaiąc ią iakby była obwinięta nicią ABN, przytkniętą do początkowego pun- B, w takim razie, rozwiiaiąc tę liniią krzywą, koniec A nici, nakryśliłby liniią krzywą AM. Jakóż *np.* w rozwinięciu części Nn, uważaiąc Nn iako liniikę proſtą bardzo małą, nić MNn, kryśli około punktu n iako środka, łuk Mm, którému nić MNn muſi bydź koniecznie proſtopadła; bo promiéń koła ieſt proſtopadły ſwemu okręgowi. fig. 10.

56. Maiąc zadaną liniią krzywą AM, a chcąc wynaléśdź wártość li-

linii *Mn* poprowadzonéy z iakiégo-kolwiek punktu *M*, a nazywaiącéy ſię *Promiéniém Rozwiyki*, trzeba uważyć, że liniia *Mn* powſtaie z ſpólnego przecięcia ſię dwóch proſtopadłych niezmiérnie bliſkich iedna drugiéy, iakie ſą *MN* i *mn*. Dla
fig. 11. czego (fig. 11), należy ſobie zmyślić dwa łuki przyległe iedén drugiému *Mm*, *mm'* niezmiérnie małe i niezmiérnie mało od ſiebie różne, uważaiąc ie iakoby dwie liniie proſte, tudzież liniią *MN* proſtopadłą w punkcie *M* na liniią *Mm*, iako też liniią *mN*, proſtopadłą w punkcie *m*, na liniią *mm'*. Naténczas w tróykącie *NMm* proſtokątnym w *M*, będzie $1 :$ wſt. $MNm :: mN$ albo $MN : Mm$, albo też (z przyczyny że kąt *MNm* ieſt niezmiérnie mały), będzie $1 : MNm :: mN$ albo $MN : Mm$; więc $MN = \frac{Mm}{MNm}$. Lecz przedłużywſzy liniią *Mm*, będzie kąt $umm' = MNm$, bo z tych obu kątów każdy ieſt dopełniéniém iednegoż kąta *MmN*, z przyczyny kątów proſtych *NMm* i *Nmm'*; więc $MN = \frac{Mm}{umm'}$.

Je-

Jeżeli poprowadzą ſię liniie *Mr* i *mr'* równoległe linii *AP*, to łatwo daie ſię widziéć, z przyczyny kąta *umr'* równego kątowi *mMr*, że kąt *umm'* ieſt ilością o którą kąt *mMr* zmniéyſza ſię, albo że ieſt różniczką kąta *mMr*, która powinna bydź wzięta w ſpoſób przéczący kiedy liniia ieſt wklękła, iak tu, a przeciwnie powinna bydź wzięta w ſpoſób twiérdzący, kiedyby liniia była wypukła; będzie tedy $MN = \frac{Mm}{\mp d(rMm)}$. Szukaymy teráz wyrażenia ilości $d(rMm)$; i uważmy tym kóńcém, że ſtyczną kąta *rMm* ieſt $\frac{dy}{dx}$, a doſtawą iego, [nazwawſzy *ds* łuk *Mm* albo $\surd(dx^2 + dy^2)$], ieſt $\frac{dx}{ds}$; iako to łatwo wnieść ſobie można ſtąd, że tróykąt *rMm* ieſt proſtokątny; widzieliśmy też także (24), że kiedy kąt iakikolwiek ieſt oznaczony przez *z*, to będzie $dz = (\text{doſt.}\, z)^2 .$ $d(\text{ſtycz.}\, z)$; więc $d(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2} . d(\frac{dy}{dx})$; więc naoſtatek $MN =$

ds

$$\frac{ds}{-\frac{dx^2}{ds^2}d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{ds^3}{\mp dx^2 \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$ I taie[...] formuła, służąca do wynalezieni[...] promieniów linii nazwanéy Ro[...] wiyki, kiedy w niéy rzędne są so[...] bie równoległe.

57. Zebyśmy przystósowanie tego za[...] baczyli w iakich przykładach, daymy że li[...] niia krzywa AM, iest kołém do którego na[...] leży zrównanie $yy = 2ax - xx$; mieć bę[...] dziém $y = \sqrt{(2ax - xx}$; więc $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$; a $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ będzie $= \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; tudzież $\frac{dy}{dx}$ będzie $= \frac{a - x}{\sqrt{(ax - xx)}}$; więc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-a^2dx}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$; formuła tedy służąca teraźnieyszému przy[...] padkowi, gdzie liniia krzywa rozumie si[...] wklękła, i rzędne rozumieią się sobie ró[...] wnoległe, będzie $\frac{ds^3}{-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; która prze[...] miénia się w tę, $\frac{\frac{a^3dx^3}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2dx^3}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}} = a$; to iest i[...] tu promień Rozwiyki iest zawsze téyże[...] wielkości, i równy promiéniowi koła, tak[...] że cała Rozwiyka zamyka się w iednym[...] punkcie, który iest śrzodkiem; a to dosko[...] nale zgadza się z tém, co o kole mamy[...] wiadomo.

Obierzmy sobie na drugi przykład Parabolę, do któréy należy to zrównanie $y^2 = ax$, albo $y = \sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; mieć będziém $dy = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$; więc $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{1}{4}ax^{-1}dx^2)} = dx\sqrt{\left(1 + \frac{a}{4x}\right)} = dx \cdot \sqrt{\left(\frac{4x + a}{4x}\right)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\sqrt{(4x + a)}$, a $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$; więc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}dx$; a zatém formuła $\frac{ds}{-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, odmiénia się w tę

$$\frac{\frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}dx^3(4x + a)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 \times \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}dx} = \frac{1}{2}\,\frac{(4x + a)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x + a}{2}\sqrt{\left(\frac{4x + a}{a}\right)}.$$

58. Promiénie Rozwiiek służą do zmiérzenia w każdym punkcie krzywizny linii krzywéy. Ponieważ w rozwinięciu cząstki Nn linii krzywéy BN (fig. 10), nitka kryśli mały łuczek mm', więc tén łuczek mm', ma też samę krzywość co koło maiące za promień liniią mn. A tak maiąc wyrażenie promiénia Rozwiyki, tém samém iest wiadomy, odpowiadaiący każdemu punktowi promień koła, maiącego też samę krzywość, iaką ma linija krzywa w tymże punkcie. A że krzywość koła iest tém większa, im mnieyszy będzie iego promień, to iest że krzywości kół, są w stósunku odwrotnym promiéni swoich; więc zawsze łatwo będzie wziąść stósunek między krzy- fig. 10.

woścą linii krzywéy w iakimkolwiek punkcie, a między krzywością téyże albo inszéy linii, także w iakimkolwiek punkcie. I tak gdybyśmy chcieli wziąść stósunek między krzywością Paraboli iaką ma w wiérszchołku, a między krzywością iéyże, iaką ma w końcu rzędnéy przechodzącéy przez śrzódpał; uważyć mamy, że w wiérszchołku téy linii iest $x=0$, i że odcinek odpowiadaiący śrzódpałowi iest $\frac{1}{4}a$ (Alg. 291). W wyrażeniu tedy promiénia Rozwiyki, zrobiwszy koléyno $x=0$, i $x=\frac{1}{4}a$, wypadną nam te dwie wártości, $\frac{1}{2}a$ i $a\sqrt{2}$; więc promiéniém Rozwiyki, odpowiadaiącym wiérszchołkówi Paraboli, iest $\frac{1}{2}a$, a promiéniém odpowiadaiącym końcowi rzędnéy, przechodzącéy przez śrzódpał téyże Paraboli, iest $a\sqrt{2}$; więc krzywość uważona w piérwszym punkcie, ma się do krzywości uważonéy w drugim punkcie $::a\sqrt{2}:\frac{1}{2}a$ albo $::2\sqrt{2}:1$.

Ponieważ promièń MN rozwiyki, nieiest co innego tylko nitką obwiiaiącą, albo która uważa się, iakoby obwiiała liniią BN, więc idzie zatém, że takowy promièń równa się w długości łukowi BN, pomnożonemu o część AB, to iest o którą nitka przechodziła liniią krzywą, gdy poczynało się rozwiianie, czyli pomnożonemu o promièń rozwiyki uważonemu w początkowym punkcie A. Więc liniia krzywa BN może może bydź sprostówana, to iest że można naznaczyć długość każdego z iéy łuków BN.

FUNDAMENTA RACHUNKU CAŁKOWEGO.

59. Jest tu teráz mowa o powrocie od ilościów różniczkowych

wych do ilościów pomiérnych, z których różniczkówania wyniknęły piérwsze; sposób w który dzieie się taki powrót, nazywa się *Rachunkiém cáłkowym*.

Niemasz żadnéy takiéy ilości odmiénnéy wyrażonéy Algebraicznie, któréyby niémożna było znaléśdź różniczki; ale bywa bardzo wiele takich ilościów różniczkowych, * które niedadzą się *scáłkować*: iedne przeto, że w saméy rzeczy niémogły wyniknąć z żadnego zróżniczkówania; i takie są ilości xdy, $xdy-ydx$, i. t. d.; inne przeto, że na scáłkowanie ich ieszcze dotąd niewynaleziono sposobu; spomiędzy których są takie, że podług podobiéństwa, nawet nadziei miéć niémożna aby kiedy mogły bydź scáłkówane.

Atoli pomimo tego, można przynaymniéy odniéść bardzo wielki pożytek z tych ilościów, które wiémy iak się cáłkuią. Takowe zechcemy tu dać poznać, a potém

 zo-

* *Przez ilość różniczkową rozumiémy tu, nietylko ilość wynikaiącą z zróżniczkówania, ale w powszechności wszelką ilość zawiéraiącą w sobie różniczki* dx, dy, *i. t. d. iednéy, lub większéy liczby odmiénnych.*

zobaczymy iak ſobie trzeba poſtąpić z témi co nieprzyimuią całkowania. Poczniymy naprzód od wytłómaczenia ſię z niektórych ſpoſobów mówiénia, których daléy używać mamy.

Nazwiemy *związkiém* ilości (fonction), wſzelkie wyrażenie rachunkowe, w które ta ilość wchodzi, w iaki chce ſpoſób. I tak x, $a+bx^2$, $\sqrt[n]{(x^n+bx^p)}$, i. t. d. ſą to związki głoſki x.

Przez *ilości Algebraiczne* rozumiéć będziemy te, których może bydź naznaczona doſkonała wártość wykonawſzy pewną liczbę działań Algebraicznych i Arytmetycznych, niezależących od Logarytmów. Przeciwnie przez ilości *Niealgebraiczne* rozumiéć będziémy te, którym niémożna naznaczyć doſkonałych wártościów ale tylko przybliżone, albo w których koniecznie dorozumiéwa ſię przybliżenię; takie ſą Logarytmy i niezmiérna liczba innych ilościów.

Do oznaczenia *cálki* iakiéy różniczki, używać będziemy głoſki $\int$, położonéy przed takową ilością; która-

rato głoſka znaczyć będzie to, coby znaczyły ſłowa: *ſumma ilości N*; bo *cálkówać* albo brać cáłkę iakiéy ilości, nieieſt co innego, tylko zſummować wſzyſtkie podraſtania niezmiérnie małe, którémi pomnażać ſię muſiała, ażby przyſzła do pewnego ſobie zamiérzonego ſtanu.

O Różniczkach z iedną odmiénną, maiących Cálkę Algebraiczną; a naprzód o Różniczkach iednosłownych.

60. Reguła fundamentalna. *Zeby ſcálkówać Różniczkę iednosłowną, trzeba* 1ód *Pomnożyć wykładnika głoski odmiénnéy o iednę iedność.* 2re *Rozdzielić przez tego wykładnika tak pomnożonego, i przez różniczkę głoski odmiénnéy*; to ieſt, rozdzielić przez tego nowego wykładnika, rozmnożónego przez różniczkę głoſki odmiénnéy.

Przyczyny téy reguły nietrzeba indziéy ſzukać, tylko w ſamymże ſpoſobie różniczkówania (10). Ponieważ tu rzecz idzie o znaleziénie ilości zróżniczkówanéy, iawna ieſt, że należy użyć działań przeciwnych tym, które przepiſały ſię do różniczkówania. To założywſzy, przyſtąpmy do przyſtóſówania daney reguły.

$$\int 2xdx \text{ albo } \int 2x^1dx = \frac{2x^{1+1}dx}{(1+1)dx} = x^2;$$

$$\int xdx = \frac{x^2dx}{2dx} = \frac{x^2}{2}.$$ Jakóż, $d(x^2) = 2xdx$; $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2xdx}{2} = xdx$.

Podobnież $\int ax^{\frac{2}{3}}dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1}dx}{(\frac{2}{3}+1)dx} = \frac{ax^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}}$. Podobnież, $\int \frac{adx}{x^3}$, albo $\int ax^{-3}dx = \frac{ax^{-3+1}dx}{(-3+1)dx} = \frac{ax^{-2}}{-2} = \frac{-a}{2x^2}$.

W powſzechności, kiedy ilość ma wykładnika m, czyto twiérdzącego czy przéczącego, całego czy ułamkowego, to zazawſze będzie $\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}dx}{(m+1)dx} = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$.

Niéma wprawdzie przyczyny potrzebówać téy reguły, do wynaleziénia cáłki różniczki dx albo adx; bo iawna ieſt, że pierwſzéy byłaby cáłka x, a drugiéy ax; atoli gdybyśmy i tu chcieli przyſtóſówać regułę daną, to trzebaby uważyć, że w takowych różniczkach wykładnikiém głoſki x ieſt zero, tak iż iedno znaczą, co x^0dx i ax^0dx, którym podług reguły odpowiadały

by te cáłki, $\frac{x^{0+1}dx}{(0+1)dx}$ i $\frac{ax^{0+1}dx}{(0+1)dx}$, albo x, i ax.

Niéma tylko iedén przypadek który wyłącza ſię od reguły fundamentalnéy, to ieſt, kiedyby wártością wykładnika m było -1; bo w takim razie, cáłka wychodziłaby na $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$ albo na $\frac{ax^0}{0}$ albo na $\frac{a}{0}$, to ieſt, na ilość niezmiérną, która niémoże bydź naznaczona. Jakóż, przypuściwſzy za mianownika zamiaſt zera, ilość niezmiérnie małą, iawna ieſt, że takowy mianownik muſi zawiérać ſię niezmiérną liczbę razy w ilości pomiérnéy a, a zatém ułamek wyrażáłby ilość niezmiérną. Pokażemy to na inſzém miéyſcu, dla czego tu z rachunku wypada ilość niezmiérna; tym czaſém zaś tylkouważmy, że różniczka zadana $ax^m dx$, wychodząca w takim razie na $ax^{-1}dx$ albo na $\frac{adx}{x}$, ieſt różniczką Logarytmową; to ieſt różniczką ilości alx, albo lx^a, iako, (zróżniczkówawſzy ią), łatwo o tém przekonać ſię można (27).

Gdyby różniczka iednoſłowna miała znak piérwiaſtkowy, to zamiaſt takowego trzebaby użyć wykładnika ułamkowego. I tak ażeby ſcáłkówać $adx\sqrt[3]{x^2}$, piſzę $adx \,.\, x^{\frac{2}{3}}$, albo $ax^{\frac{2}{3}}dx$, a z reſztą poſtępuię ſobie iak wyżéy.

61. Widzieliśmy wyżéy (8) że kiedy w ilościach które maią bydź różniczkówane, znayduią ſię *Przeſtroga.*

 ia-

iakie wyrazy całe ſtateczne, to takowe wyrazy wyrzucaią ſię z różniczek. Więc powracaiąc nazád do całki, trzeba pamiętać przydać do niéy na oſtatku ilość ſtateczną, która może mieć taką wártość iak ſię ſpodoba, póki nieidzie więcéy o nic, tylko o wynaleziénie całki, to ieſt o wynaleziénie takiéy ilości, z któréy zróżniczkowanéy wypadłaby różniczka zadana. Jakóż ilości $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ i $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + C$, (oznaczywſzy przez C tę ſtateczną iakąkolwiek), za różniczkę, obie ilości zarówno mieć będą $ax^m dx$, C niechby miało wártość iaką chce. Ale kiedy całkówanie odbywa ſię dla rozwiązania iakiego zagadniénia danego, to natenczas, takowa ſtateczna ma pewną wártość, wynikaiącą z warunków zagadniénia: zobaczymy to w dalſzym przeciągu, ale iuż odtąd zawſze ią będziémy przydawać każdemu ſcałkówaniu, ażeby ſię zaś na niéy niemyślić, nigdy iéy nieoznaczymy inaczéy, tylko przez C.

O

O Różniczkach wielosłownych, których całkówanie przypada do Reguły Fundamentalnéy.

62. $1^{ód}$ Można także ſcałkówać poług reguły poprzédzaiącéy wſzelką ilość, w którąby niewchodził iaki ſtopién ilości wieloſłownéy, albo dziélnik wieloſłowny, albo chociażby wchodził dziélnik wieloſłowny, ale był ilością ſtateczną.

I tak maiąc ſcałkówać $ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c} + edx$, ſcałkówałbym zoſobna każdy wyráz, i miałbym $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + ex + C$. Podobnież całka ilości $ax^3dx + \frac{bdx}{x^4}$ albo ilości $ax^3dx + bx^{-4}dx$, byłaby $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^{-3}}{-3} + C$, albo $\frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + C$.

63 2^{re} A gdyby nawet wchodziły i ſtopnie iakie ilościów wieloſłownych, to ieſzcze możnaby całkówać przez regułę fundamentalną, byleby takowe pomiénione ilości nieznaydówały ſię w mianowniku, a oráz ażeby ich wykładnik był liczbą całą twiérdzącą.

Np.

Np. $(a + bx^2)^3 \times dx$, może bydź fcałkówane przez regułę poprzédzaiącą, podniófszy $a + bx^2$ do trzeciego ftopnia; fkąd podług (Alg. 126) wypadłoby $a^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x^4 + b^3x^6$, a zatém $(a + bx^2)^3 dx = a^3dx + 3a^2bx^2dx + 3ab^2x^4dx + b^3x^6dx$; któréyto ilości całka biorąc każdy wyráz zofobna, byłaby $a^3x + \frac{3a^2bx^3}{3} + \frac{3ab^2x^5}{5} + \frac{b^3x^7}{7} + C$.

64. Ponieważ niéma żadnéy ilości wielofłownéy podniefionéy do iakiego ftopnia, a maiącéy za wykładnika liczbę całą przéczącą, któréyby niémożna było podług reguły podanéy w Algebrze (126) rozłożyć w rzęd pewny ilościów iednofłownych, przeto zawfze będzie można fcałkować wfzelką ilość wielofłowną, która niezawiérałaby w fobie innych części wielofłownych, iak tylko ftopnie oznaczone wykładnikami, złożonémi z liczb całych i twiérdzących.

I tak, gdybym miał do fcałkówania ilość $gx^3dx(a + bx^2)^2 + a^2x^7dx\,(c + ex^2 + fx^3)^4$, rozłożyłbym fobie w rzęd (podług reguły wzyż wziankowanéy) wártość ilości $(a + bx^2)^2$, a potém każdy wypadły wyráz, rozmnożyłbym przez gx^3dx; podobnież, rozłożyłbym wártość ilości $(c + ex^2 + fx^3)^4$, a każdy wypadły wyráz, rozmnożyłbym przez a^2x^7dx; co zrobiwfzy, niezoftanie mi, tyl-

tylko fcałkować zwyczaynie rzęd ilościów iednofłownych, podług reguły fundamentalnéy.

65. Trzeba tu wyłączyć tylko iedén przypadek, to ieft, kiedyby który z wykładników wypádł przéczący; w takim razie, po rozłożeniu ilości w rzęd i po rozmnożeniu, na wykładnik głofki odmiénnéy mogłoby wypaśdź w iakim wyrazie -1; ale naténczas takowy wyráz, całkuie fię przez Logarytmy.

Np. maiąc ilość $\frac{adx}{x^3}(a + bx)^2$ albo $ax^{-3}dx(a + bx^2)^2$; odmiénilbym ią na $ax^{-3}dx\,(a^2 + 2abx^2 + b^2x^4)$, co wychodzi na $a^3x^{-3}dx + 2a^2bx^{-1}dx + ab^2xdx$; z których dwa wyrazy $a^3x^{-3}dx + ab^2dx$, maią na fwoie całki $\frac{-a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2}$; lecz wyráz $2a^2bx^{-1}dx$ albo $2a^2b\frac{dx}{x}$, ieft podług (27) różniczką Logarytmową ilości $2a^2blx$; więc całka razém wzięta, uczyni $-\frac{a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2} + 2a^2blx + C$.

66. 3^{cie} Chociażby różniczka zadana zawiérała w fobie ilość wielofłowną, wyniefioną do ftopnia iakiegokolwiek, (oznaczonego wykładnikiém czyto całym czy ułamkowym, twiérdzącym albo przéczącym), to ieszcze będzie można fcał-

kó-

kówać ilość zadaną, byleby ſumma ilościów mnożących tę ilość wieloſłowną, była różniczką téyże ilości wieloſłownèy, uważonéy bez ſwego wykładnika całkówitego, albo byleby była pomiénioną różniczką, rozmnożoną albo rozdzieloną przez liczbę ſtateczną.

Np. $gdx(a+bx)^p$ należy do tego przypadku; bo gdx ieſt różniczką ilości $a+bx$, rozmnożoną przez $\frac{g}{b}$, to ieſt, przez ilość ſtateczną; a tak maiąc ſcałkówać pomiénioną ilość, piſzę $\int gdx(a+bx)^p = \frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{(p+1)d(a+bx)} + C = \frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{(p+1)bdx} + C = \frac{g(a+bx)^{p+1}}{(p+1)b} + C$. Jakóż, zróżniczkówawſzy na odwrót tę nową ilość, mielibyśmy iak pierwéy $gdx(a+bx)^p$.

Podobnież, maiąc różniczkę $\frac{a^2dx+2axdx}{\sqrt{(ax+xx)}}$ albo $(a^2dx+2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, wnoſzę ſobie, że może bydź ſcałkowana, bo $a^2dx+2axdx$ ieſt różniczką ilości $ax+xx$, rozmnożoną przez ilość ſtateczną a. Używſzy tedy reguły poprzédzaiącéy, będzie $\int(a^2dx+2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(a^2dx+2axdx)(ax+xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}adx+2xdx} + C = 2a(ax+xx)^{\frac{1}{2}} + C$. Jedynie tylko ſtąd wyłączyć trze-

trzeba przypadek, kiedyby wykładnikiém ilości wieloſłownéy było -1, natenczas całkuie ſię przez Logarytmy, iak zobaczymy niżéy.

O Różniczkach dwusłowenych mogących całkówać się Algebraicznie.

67. Przez różniczkę dwuſłowną, rozumiémy takie wyrażenie, w którém ilość naybardziéy poſkładana, ieſt iakimkolwiek bądź ſtopniém ilości dwuſłownéy.

I tak $gx^5dx(a+bx^2)^{\frac{3}{5}}$, ieſt różniczka dwuſłówna. Podobnież $gx^m dx(a+bx^n)^p$; co może wyrażać w powſzechności wſzelką różniczkę dwuſłowną, bo przez g, a, b, m, n, p, mogą rozumiéć ſię wſzelkie iakie tylko mogą bydź liczby, bądźto twiérdzące bądź przéczące.

Niémamy ſpoſobu całkówania powſzechnie wſzelkiéy ilości dwuſłownéy. Ale ſtąd co poprzédziło iawna ieſt, że różniczka dwuſłowna $gx^m dx(a+bx^n)^p$, może bydź ſcałkówana w dwóch przypadkach naſtępuiących. 1ód Kiedy p ieſt liczbą całą twiérdzącą iakąkolwiek, wykładniki m i n niechby były iakie chcą (63), wyiąwſzy przypadek wymiéniony pod *I.* (65). 2re Kiedy wykładnik m głoſki x, położonéy zewnątrſz ilości

ści dwuſłownéy, ieſt mniéyſzy o iednę iedność iak wykładnik n téyże głoſki x zamkniętéy w ilości dwuſłownéy; to ieſt, że w powſzechności można ſcáłkówać wſzelką ilość taką, iak $gx^{n-1}dx\ (a + bx^n)^p$, wykładniki n i p niechay będą iakie chcą, wyiąwſzy tylko przypadek kiedyby było $p = -1$. Jakóż $gx^{n-1}dx$, ieſt różniczką ilości $a + bx^n$, rozmnożoną przez $\frac{g}{nb}$, to ieſt przez ilość ſtateczną; a zatém przypadek należy do owego, o którym było wyżéy (66); więc tę i téy podobną ilość, można ſcáłkówać podług reguły fundamentalnéy, poczytawſzy $a + bx^n$ iakoby za iednę ilość.

Oprócz tego, ſą ieſzcze dwa inne przypadki, które mogą bydź zawarte w iednym, ściągaiące ſię także do przypadku poprzèdzaiącego. Zobaczmy na czèm zależą.

68. 1ód Można ſcáłkować wſzelką różniczkę dwuſłowną, w któréy wykładnik głoſki położonèy zewnątrſz ilości dwuſłownèy, będąc pomnożony o iednę iedność, może bydź doſkonale rozdzielony przez wy-

wykładnika ilości x zawartéy w ilości dwuſłownèy, i na wieloráz daie liczbę całą twiérdzącą. Spoſób, iak ſobie w takim razie poſtąpić trzeba, bądźto w całkówaniu bądźto w okazaniu powſzechności téy prawdy, na tém zależy, ażeby ilość dwuſłowną wziętą bez iéy wykładnika, zrównać tylko z iedną odmiénną, i różniczkę żądaną wyrazić tylko w tèy iednèy odmiénnèy i w ilościach ſtatecznych; co zawſze łatwo uczynić można, działaiąc iak w przykładach naſtępuiących.

Obierzmy ſobie naprzód do ſcáłkówania ilość $gx^3dx(a + bx^2)^{\frac{4}{5}}$. Uważam że ta różniczka może bydź ſcáłkowana; bo wykładnik głoſki x położonéy zewnątrſz ilości dwuſłownéy, to ieſt 3, pomnożony o iednę iedność czyni 4, które rozdzielone przez wykładnika 2 głoſki x, zawartéy w ilości dwuſłownéy, daie mi na wieloráz 2, liczbę całą twiérdzącą. Robię tedy $a + bx^2 = z$, i wyciągam z tego zrównania $x^2 = \frac{z-a}{b}$. Potém uważam, że wyráz x^3dx poprzédzaiący ilość dwuſłowną, pochodzi (wyiąwſzy mnożnika ſtatecznego), z zróżniczkówania ilości x^4, która ieſt kwadratém ilości x^2; podnoſzę tedy do kwadratu zrównanie $x^2 = \frac{z-a}{b}$, i mam $x^4 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2$, więc zróżniczkówawſzy, mieć będę $4x^3dx = 2.(\frac{z-a}{b}).\frac{dz}{b}$, a zatém $x^3dx =$ $(\frac{z-a}{b})\frac{dz}{2b} = \frac{(z-a)dz}{2b^2}$. Położywszy za- miast x^3dx i zamiast $(a+bx^2)$ onych wa- tości wyrażone w z, w ilości $gx^3dx\,(a+$ $bx^2)^{\frac{4}{5}}$, mieć będę $\frac{g.(z-a)dz}{2b^2} + z^{\frac{4}{5}}$, albo $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}$. Więc $\int gx^3dx\,(a+$ $bx^2)^{\frac{4}{5}} = \int\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \int\frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2} = \ldots$ $\frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2b^2} + C$, albo (z przy- czyny że $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}$ iest spólnym mnożnikiem) będzie $= \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}[\frac{z}{\frac{4}{5}+2} - \frac{a}{\frac{4}{5}+1}] + C =$ $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}.(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a) + C$; w którém to wyrażeniu, położywszy nazad zamiast z wa- tość onego $a+bx^2$, wypadnie nakoniec n całkę daney ilości, $\frac{g}{2b^2}.(a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1}[\frac{5}{14}$ $(a+bx^2) - \frac{5}{9}a] + C$.

69. Podobnymże sposobém postąpić so- bie będzie potrzeba w wszelkim innym przy- padku, podpadaiącym pod też same warun- ki. Weźmy np. ilość, $gx^8dx\,(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, która powinna dać się scałkować, bo wy- kładnik 8 pomnożony o iednę iedność, bę-

dąc rózdzielony przez wykładnika 3 głoski x położoney w ilości dwusłowney, daie na wieloráz liczbę całą twiérdzącą. Robię tedy $a+bx^3 = z$, i mam $x^3 = \frac{z-a}{b}$; a że wyraz x^8dx poprzédzaiący ilość dwusłowną (wyiąwszy mnożnika statecznego), pochodzi z odbytego zróżniczkówania ilości x^9; więc żeby mieć x^9, podnoszę do sześcianu zrównanie $x^3 = \frac{z-a}{b}$, co mi da $x^9 = (\frac{z-a}{b})^3$; a zróżniczkówawszy, będzie $9x^8dx = 3(\frac{z-a}{b})^2\frac{dz}{b}$; a zatém $x^8dx = (\frac{z-a}{b})^2\frac{dz}{3b}$. Różniczka tedy $gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, odmienia się na $g.(\frac{z-a}{b})^2.\frac{dz}{3b}.z^{-\frac{2}{3}}$, albo (odbywszy wskazane działania, to iest podniósłszy $\frac{z-a}{b}$ do kwadratu, i rozmnożywszy przez $z^{-\frac{2}{3}}$), będzie $\frac{gz^{2-\frac{2}{3}}dz}{3b^3} - \frac{2gaz^{1-\frac{2}{3}}dz}{3b^3} + \frac{ga^2z^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}$; ilość różniczkówa, któréy całką iest $\frac{gz^{3-\frac{2}{3}}}{3b^3(3-\frac{2}{3})} - \frac{2gaz^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3(2-\frac{2}{3})} + \frac{ga^2z^{1-\frac{2}{3}}}{3b^3(1-\frac{2}{3})}$ $+ C$, co z przyczyny spólnego mnożnika $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}$, wychodzi na $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}(\frac{z^2}{3-\frac{2}{3}} - \frac{2az}{2-\frac{2}{3}} + \frac{a^2}{1-\frac{2}{3}}) + C$, albo $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}(\frac{3z^2}{7} - \frac{6az}{4} + 3a) + C$, albo naostatek, położywſzy nazád zamiaſt x wártość onego $a + bx^3$, cáłką danéy ilości będzie, $\frac{g}{3b^3}(a + bx^3)^{1-\frac{2}{3}}$ $[\frac{3}{7}(a + bx^3)^2 - \frac{6a}{4}(a + bx^3) + 3a^2] + C.$

I tèn ieſt ſpoſób cáłkówania, którego używać trzeba, ile razy wykładnik głoſki x położonéy zewnątrſz ilości dwuſłownéy, będąc pomnożony o iednę iedność i rozdzielony przez wykładnika głoſki x zawartéy w ilości dwuſłownéy, daie nam na wieloráz liczbę całą twiérdzącą.

70. 2^{re} A chociażby ilość róźniczkowa dwuſłowna, nieznaydówała ſię w tym przypadku o którym dopiéro mówiło ſię, atoli zdarza, ſię bardzo częſto że ią można do tego naprowadzić, przy pomocy przekſztáłcenia bardzo proſtego, zależącego na tém, ażeby wykładnika głoſki x zawartéy w ilości dwuſłownéy, uczynić przèczącym kiedy ieſt twiérdzący, albo twiérdzącym kiedy będzie przèczący. Co żeby wykonać, trzeba rozdzielić dwa wyrazy tèy ilości dwuſłownéy przez ſtopiéń głoſki x położonèy wewnątrſz nawiaſów, a zewnatrſz, trzeba rozmnożyć przez ténże ſtopiéń, wynieſiony do ſtopnia oznaczonego przez wykładnika całéy ilości dwuſłownèy.

Np.

Np. Zeby uczyuić przéczącym wykładnika 2, głoſki x położonéy w iiości dwuſłownéy $gx^4dx\,(a + bx^2)^5$; dzielę $a + bx^2$ przez x^2, co mi daie $gx^4dx\,(\frac{a}{x^2} + b)^5$, albo $gx^4dx\,(ax^{-2} + b)^5$; ale że ilość x^2 przez którą rozdzieliliśmy, rozumié ſię bydź podnieſiona do piątego ſtopnia, będąc nakryta wykładnikiém należącym do całéy ilości dwuſłownéy, więc żeby ſię nadgrodziło iedno drugiém, tızeba rozmnożyć zewnątrſz przez $(x^2)^5$, to ieſt podług (Alg. 96) przez x^{10}; tak że zadana ilość przemiéni ſię na $gx^{14}dx\,(ax^{-2} + b)^5$. Używſzy takowego przekſztáłcenia, da ſię widziéć, że wiele różniczek dwuſłownych nieznayduiących ſię iawnie w przypadku poprzédzaiącym, dadzą ſię do niego naprowadzić.

Np. Gdyby mi zadana była do ſcáłkówania ilość $\frac{aadx}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}}$ albo $aadx\,(aa + xx)^{-\frac{3}{2}}$; widzę że wykładnik głoſki x położonéy zewnątrſz, który ieſt 0, będąc pomnożony o 1, niémoże bydź ſpełna rozdzielony przez wykładnika 2, głoſki x położonéy wewnątrſz; ale nienależy mi ſtąd wnoſić, że ilość dana niémoże bydź ſcáłkówana: albowiém zrobiwſzy ſtopiéń x przéczącym w ilości dwuſłownéy, i napiſawſzy $aa\,(x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$ $(aa^{-2} + 1)^{-\frac{3}{2}}$, co wychodzi na $aax^{-3}dx$ $(aax^{-2} + 1)^{-\frac{3}{2}}$, widzę, że naténczas -3 pomnożone o 1, to ieſt $-3 + 1$ albo -2, będąc rozdzielone przez wykładnika -2, głoſki x zawartéy między nawiaſami, daie mi na wieloráz liczbę całą twiérdzącą. A zatém, zrobiwſzy $aa^{-2}+1=z$, wyciągam z tego zrównania $x^2=\frac{z-1}{aa}$; a że $x^{-3}dx$ (wyiąwſzy mnożnika ſtatecznego) ieſt różniczką ilości x^{-2}, więc różniczkuię i mam, $-2x^{-3}dx=\frac{dz}{aa}$; ſkąd wyciągam $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$. Różniczka tedy wzwyż położona $aax^{-3}dx(aax^{-2}-1)^{-\frac{3}{2}}$, odmiénia ſię na $\frac{-aadz}{2aa}.z^{-\frac{3}{2}}$, albo na $\frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}$, któréy cáłką będzie $\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2.(1-\frac{3}{2})}+C$, albo $z^{-\frac{1}{2}}+C$, albo (położywſzy zamiaſt z wártość onego) $(aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C$, albo naſtatek $\frac{1}{\sqrt{(aax^{-2}+1)}}+C$, co wychodzi na $\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}+C$. A zatém ſpoſób cáłkówania w tym razie, ieſt ténże ſam co poprzédzaiący.

71. W tém co poprzèdziło, rozumieliśmy x tylko w iednym wyrazie ilości dwuſłownéy podnieſione do iakiegokolwiek ſtopnia, co gdyby ſię zdarzyło w obu wyrazach, możnaby ilość naprowadzić do piérwſzego ſtanu, rozdzieliwſzy tę ilość dwuſłowną przez ſtopień iednego z dwóch wyrazów, a zewnątrſz

wnątrſz

wnątrſz rozmnożywſzy ią przez ténże ſtopień, wynieſiony do ſtopnia oznaczonego przez wykładnika całéy ilości dwuſłownéy; a to z téyże ſaméy przyczyny, która położyła ſię wyżéy (70), mówiąc o przemianie wykładnika twiérdzącego na przéczący.

I tak gdyby było zadano ſcáłkówać ilość $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$, albo $aax^{-1}dx(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, przemiéniłbym ią na tę, $aax^{-1}(x)^{-\frac{1}{2}}dx\times(a+x)^{-\frac{1}{2}}$, rozdzieliwſzy ilość dwuſłowną przez x, a zewnątrſz rozmnożywſzy przez toż x wynieſione do ſtopnia $-\frac{1}{2}$, to ieſt do ſtopnia okrywaiącego całą ilość dwuſłowną; co wychodzi na $aax^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$. Stóſuiąc do téy ilości regułę ſłużącą piérwſzemu przypadkowi (68), zdawałaby ſię ta ilość bydź nieprzyimuiąca cáłkówania; lecz zrobiwſzy przéczącym wykładnika głoſki x, zawartéy między nawiaſami, będzie $aax^{-\frac{3}{2}}.(x)^{-\frac{1}{2}}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{3}{2}}$, albo $aax^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, co podług (68) może bydź ſcáłkówane. Zrobiwſzy tedy $ax^{-1}+1=z$, będzie $x^{-1}=\frac{z-1}{a}$; po zróżniczkówaniu zaś będzie, $-x^{-2}dx=\frac{dz}{a}$, albo $x^{-2}dx=\frac{-dz}{a}$; więc $aax^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, odmiénia ſię na $-adz,z^{-\frac{1}{2}}$, albo na $-az^{-\frac{1}{2}}dz$; któréy cáł-

ką

ką ieſt $\frac{-az^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$, albo $-2az^{\frac{1}{2}} + C$, albo (położywſzy zamiaſt z onego wártość) $-2a(ax^{-1}+1)^{\frac{1}{2}} + C$, albo naoſtatek, $-2a\sqrt{(\frac{a}{x}+1)} + C$.

Uważywſzy tedy zadaną różniczkę dwuſłowną, ſtóſównie do dwóch przypadków dopiéro opiſanych, ieżeli pokaże ſię, że do żadnego z nich nieprzypada, to naténczas daremnie byłoby ſpodziéwać ſię całki Algebraicznéy. Co ſię zaś dotyczé różniczek tróyſłownych, czwórſłownych i. t. d. to ieſt w których ilość wieloſłowna zawiéra w ſobie trzy, cztéry i. t. d. wyrazów, takowe mogą także bydź ſcáłkówane w przypadkach wyżéy wymiénionych (62 i daléy). Zdarzaią ſię także ieſzcze oprócz tego inne przypadki podpadaiące ſcáłkowaniu Algebraicznemu, ale te ſą rzadkie i w małéy liczbie, dla tego w tém miéyſcu bawić ſię nad niémi niebędziémy; ale niżéy podamy ſpoſób iakby rozeznać te co mogą bydź ſcáłkówane, i te których całka może bydź naprowadzona do iakiéy zadanéy znaioméy całki.

Przy-

Przyſtóſówanie Regul poprzédzaiących do kwadratury figur krzywych.

72. Żeby znaléśdź płaſzczyznę, czyli (co na iedno wychodzi) kwadraturę figur krzywych, wyſtawiać ſobie zwykliśmy te figury iakoby wielokąty, złożone z niezmiérnéy liczby boków; w których z końców M i m każdego boku (fig. 12) uważaią proſtopadłe MP, mp *fig. 12.* ſpuſzczone na oś odcinków, przez co rozkłada ſię płaſzczyzna, na niezmiérną liczbę nierównoległoboków niezmiérnie małych. Naténczas, każdy nierównoległobok taki iak $PpmM$, można poczytać za różniczkę rozległości pomiérnéy (APM); bo w rzeczy ſaméy $PpmM = Apm - APM = (ARN)$. Nieidzie tedy, tylko o wyrażenie Algebraiczne małego nierównoległoboku $PpmM$, żeby potém ſcáłkówać to wyrażenie przy pomocy reguł poprzédzaiących.

Lecz poczytaiąc $PpmM$ za różniczkę płaſzczyzny; trzeba uważyć że takowa, niemniéy ieſt różniczką płaſzczyzny wziętéy od

 po-

początku A odcinków, iako iest różniczką każdéy innéy rozległości $KPML$ wziętéy od punktu stałego i pewnégo K; albowiém zarówno wypada $PpmM = KpmL - KPML = d(KPML)$. Więc w całkówaniu, ilość bezśrzednie z rachunku wypadaiącą, niéma przyczyny raczéy przypisówać rozległości APM, iak wszelkiéy innéy rozległości $KPML$, różniącéy się od piérwszéy pewną iaką stateczną rozległością KAL. A zatém do cáłki wynalezionéy przez rachunek, trzeba dodać stateczną, którąby wyrażała to, o co rozległość szukana różni się od rozległości z rachunku bezśrzednie wypadaiącéy. W przykładach następuiących, zobaczymy iak wynayduie się takowa stateczna; teráz zaś poszukaymy naprzód wyrażenia rozległości $PpmM$.

Oznaczmy sobie AP przez x; PM przez y; a tak miéć będziém $Pp = dx$; $pm = y + dy$. Płaszczyzną nierównoległoboku $PpmM$ podług (Jeom. 142) iest $\frac{PM + pm}{2} \times Pp = \frac{2y + dy}{2} \times dx = ydx + \frac{dydx}{2}$. Lecz chcąc wyrazić że Mm iest niezmiérnie małe, trzeba odrzucić wyráz $\frac{dydx}{2}$ iako niezmiènie mały względém ydx; więc na powszechne wyrażenie różniczki czyli *skłádki* (element) płaszczyzny wszelkiéy figury krzywéy, miéć będziém ydx.

Zeby przystósówać tę formułę do iakiéy płaszczyzny zadanéy, ktoraby była wyrażona w zrównaniu, trzeba z tego zrównania wyciągnąć wártość głoski y i położyć ią w formule ydx; skąd wypadnie cała ilość wyrażona w x i dx; która kiedy będzie mogła bydź scáłkówana przez reguły poprzédzaiące, da wyrażenie płaszczyżny takowéy figury krzywéy, uważonéy od któregokolwiek punktu iaki się spodoba, byleby nieprzepomniéć do wynalezionéy cáłki przydać stateczną; któréy wártość znaydzie się, wyraziwszy od którego punktu uważa się płaszczyzna; zobaczymy zaráz, iak się to robi.

Obiérzmy sobie za przykłád parabolę pospolitą, do któréy należy zrównanie $yy = px$. Miéć będziém $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, więc ydx przemiéni się na $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$; ilość, któréy cáłką będzie (60) $\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{3}{2}dx}$, albo $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; takie tedy będzie wyrażenie płaszczyzny parabolicznéy; tak iż maiąc wiadomy odcinek x i palirzędną p, można miéć wártość rozległości APM, lub téż $KPML$ poczynaiącéy

céy ſię od pewnego punktu K, gdyby tylko ſtateczna C była wiadoma, to ieſt gdyby całka wyrażała od którego punktu rachuie ſię płaſzcyyzna w ninieyſzym przypadku.

Daymy więc, że rozległości maią ſię rachówać od punktu A; to podług tego przypuſzczenia, będzie $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; gdzie chcąc wiedzieć co ma bydź wárto C żeby zrównanie miało mieyſce, trzeba uważyć, że kiedy x ſtaie ſię zerém, to rozległość APM przemiénia ſię także w zero, a w takim razie zrównanie wychodzi na $0 = 0 + C$; więc $C = 0$; więc kiedy całka ma wyrażać rozległości poczynaiące ſię od punktu A, to ſtateczna C powinna bydź zerém; to ieſt że w takim razie iuż nietrzeba dodawać ſtateczney, ale rozległość APM proſto wyrażona będzie przez $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Lecz maiąc uważać rozległości od punktu K, takiego ażeby było $AK = b$ (gdzie b rozumié ſię bydź ilością wiadomą); to naténczas będzie $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; a że rozległości $KPML$ wychodzą na zéro w tén czas, kiedy AP albo x ſtaie ſię $= b$; więc w takim razie będzie $0 = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$; więc $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$; a zatém będzie $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$. Skąd iawna ieſt, do czego ſłuży ſtateczna przydawaiąca ſię całkówaniu, i iako wártość iey zależy od ſamey treści zagadnienia.

Uważmy tu, że $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x$; lecz $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; więc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ albo $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3}xy$; a że $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ wyraża, rozległość APM,

więc

więc taż rozległość może bydź także wyrażona przez $\frac{2}{3}xy$, to ieſt przez $\frac{2}{3}AP \times PM$, albo przez $\frac{2}{3}$ proſtokątu $APMO$; liniia AP niech będzie iaka chce.

Podobnież $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b$; lecz kiedy $x = AK = b$, to zrównanie $yy = px$, przemienia ſię na $yy = pb$; a zatém $y = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; to ieſt że $KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; więc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ albo $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3} KL \times AK$; a że rozległość $KPML$, wyraża ſię przez $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, więc może bydź także wyrażona przez $\frac{2}{3}AP \times PM - \frac{2}{3}AK \times KL$, to ieſt przez $\frac{2}{3}APMO = \frac{2}{3}AKLI$.

Spomiędzy cztérech Przecinków Stożkowych, tylko ſama Parabola może bydź ſkwadrówana.

Obierzmy ſobie na drugi przykład Parabole w powſzechności wſzelakiego rodzaiu, do których (30) należy to zrównanie, $y^{m+n} = a^m x^n$. Mieć będziém $y = \sqrt[m+n]{(a^m x^n)} = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$; więc będzie $y\,dx = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx$; ilość, którey całką ieſt $\dfrac{a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C$, co wychodzi na $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1} + C$, albo na $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} \times x + C$, albo naoſtatek (z przyczyny że $y =$

m

$a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$), wychodzi na $\frac{m+n}{m+2n} xy$ $+ C$. A zatém kiedy rozległości APM rachuią ſię od początku A odcinków x (fig. 13), to trzeba ażeby cálka była zerém kiedy APM ieſt zerém, a naſtępnie kiedy x ieſt zerém, i naténczas ſtateczna ieſt także zerém, tak że pomiéniona ilość wychodzi proſto na $\frac{m+n}{m+2n} xy$; to ieſt że rozległość APM ieſt zawſze pewną częścią mnogości xy, czyli proſtokątu $APMO$; ieſt mówię częścią wyrażoną przez ułamek $\frac{m+n}{m+2n}$, którego wártość zawiſła od wártościów głoſek m i n, to ieſt od ſtopnia paraboli. A zatém wſzelkiego rodzaiu Parabole mogą bydź ſkwadrówane. fig. 13.

Znalezlibyśmy podobnież że w powſzechności wſzelkie Hiperbole uważone względém ſwoich kóńcotycznych, (wyiąwſzy Hiperbolę poſpolitą), mogą bydź ſkwadrówane. Ale w tym rachunku, na wártość ſtatecznéy wypada częſtokroć ilość niezmiérna, przeto niezawadzi tu zaſtanowić ſię nad tém co ona znaczy. Niechay będzie $y^m = a^{m+n} x^{-n}$ zrówanie należące do figur krzywych. Miéć będziém $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}}$; więc będzie $ydx = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}} dx$, ilość, któréy całką ieſt $\frac{a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{1-n}{m}}}{1-\frac{n}{m}} + C$, albo $\frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{1-n}{m}}$

+

$+ C$, ſkąd bez wſzelkiéy trudności wynayduie ſię ſtateczna, ieżeli m więcéy wárto iak n. Ale przeciwnie ieżeli m ieſt mniéyſze iak n, to na wártość ſtatecznéy wypada ilość niezmiérna, kiedy rozległości maią rachówać ſię od początku odcinków x; kiedy zaś maią rachówać ſię od wſzelkiego innego punktu, to pomiéniona ilość wypadać będzie pomiérna. Daymy np. że $m = 1$, a $n = 2$; w takim razie zrównanie wychodzi na $y = a^3 x^{-2}$; z którego wnoſi ſię na płaſzczyznę, $- a^3 x^{-2}$ $+ C$, albo $C - \frac{a^3}{x^2}$. Więc maiąc rachówać rozległości od początku A odcinków x, trzeba ażeby $C - \frac{a^3}{x^2}$ było zerém, kiedy ieſt $x = 0$; to ieſt, że ma bydź $C - \frac{a^3}{0} = 0$, a zatém $C = \frac{a^3}{0}$, co oznacza ilość niezmiérną. Przeciwnie maiąc rachówáć rozległości od punktu K, takiego ażeby było $AK = b$, będzie $C - \frac{a^3}{b^2} = 0$, ſkąd wyciąga ſię $C = \frac{a^3}{b^2}$. Owóż mamy co znaczy taki przypadek.

Liniia krzywa do któréy należy zrównanie $y = a^3 x^{-2}$ albo $y = \frac{a^3}{x^2}$, rościąga ſię niezmiérnie wzdłuż kóńcotycznych AZ, AY (fig. 14), ale w tém przybliża ſię bardziéy do kóńcotycznéy AZ, aniżeli do drugiéy AY, iako o tém zrównanie znać daie; tak iż rachuiąc rozległości od kóńcotycznéy AY, takowe wypadaią niezmiérne; bo rozległość zawarta między tą kóńcotyczną i ramiéniém niezmiernem BS, ieſt niezmierna. fig. 14.

A

A zatém niepodobna ieſt naznaczyć rozległościów $APMS$ rachuiących ſię od kóńcotycznéy AT. Przeciwnie rozległości zawarte między ramiéniém BM i kóńcotyczną AZ aż do niezmiérności, maią wártość pomiérną; bo pominąwſzy odległość doſyć niewielką, ramię przybliża ſię znágła do ſwoiéy kóńcotycznéy, tak iż rozległość niezmiérnie długa $KLMOZ$, wyraża ſię przez $\frac{a^3}{b^2}$, a $PMOZ = \frac{a^3}{x^2}$; a zatém $KLPM = \frac{a^3}{b^2} - \frac{a^3}{x^2}$. Skąd pokazuie ſię, że lubo niémożna miéć rozległościów rachówanych od kóńcotycznych AT, ale można miéć rozległości $KLMP$ rachówane od punktu K, wziętego tak bliſko linii AT iak ſię ſpodoba.

Obierzmy ſobie na trzeci przykłád figurę krzywą, do ktoréy należałoby to zrównanie, $y = \frac{aa - x^3}{aa}$, i któréy poſtać wypadłaby taka iak pokazuie (fig. 15), daiąc koléyno
fig. 15.
głoſce x wártości do upodobania obrane, a głoſce a naznaczywſzy pewną iakową wártość.

Miéć tedy będziém $ydx = \frac{aaxdx - x^3dx}{aa}$, ilość, któréy cáłką ieſt (60) $\int ydx$ albo $APM = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa} + C$. Gdzie chcąc rachówać rozległości APM od punktu A początku odcinków x, trzeba ażeby ta cáłka ſtała ſię zerém, kiedy będzie $x = 0$, co daie znać, że ſtateczna C ieſt zerèm; tak iż rozległość nieokréślona APM wyraża ſię proſto przez $\frac{2aax^2 - x^4}{4aa}$. W powſzechności, kiedy wártość głoſki y, nieſkłada ſię tylko z ſamych ilościów iednoſłownych, iak w teraźniéyſzym przypadku, to zawſze łatwo znaléśdź można płaſzczyznę (60).

Obierzmy ſobie ieſzcze iedén przykłád, i daymy że ma bydź wynaleziona płaſzczyzna, figury krzywéy, do któréy należałoby to zrównanie, $a^5yy = x^4(a^3 - x^3)$; ſkąd wyciąga ſię $y = \pm\sqrt{\frac{x^4(a^3 - x^3)}{a^5}} = \pm \frac{x^2}{a^2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{(a^3 - x^3)}$; więc (niebiorąc tylko iednę z wártościów głoſki y), będzie $ydx = \frac{x^2dx}{a^2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{(a^3 - x^3)} = \frac{x^2dx}{a^2\sqrt{a}}(a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}$; lecz ta ilość może bydź ſcáłkowana (66), bo x^2dx ieſt różniczką ilości x^3 rozdzieloną przez liczbę ſtateczną 3, więc podług (66) będzie $\int ydx = \frac{x^2dx.(a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}a^2\sqrt{(a)}. - 3x^2dx} + C = -\frac{2(a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{9a^2\sqrt{a}} + C$. Co ſię tyczé ſtatecznéy C, téy wártość łatwo wynaydzie ſię, byleby był wiadomy punkt, od którego rachuie ſię płaſzczyzna.

Można téż ieſzcze wynaléśdź płaſzczyznę linii krzywych, rozłożywſzy ią na tróykąty zamiaſt nierównoległoboków. *Np.* możnaby znaléśdź powiérſzchnią odcinka ANQ (fig. 12), uważaiąc go złożonym, ia- fig. 12.
koby z niezmiérnéy libzby tróykątów niezmiérnie małych, tnkich iak AQq. Takowy tróykąt byłby wyrażony przez $\frac{Aq \times Qt}{2}$, ſpuściwſzy proſtopadłą Qt, albo (co na iedno

dno wychodzi) nakryśliwſzy z śrzodka A promiéniém AQ łuk niezmiérnie mały Qt. A naténczas oznaczywſzw AQ przez t, a łuk Qt przez dx, będzie $Aq = t + dt$, a zatém będzie tróykąt $AQq = \frac{t + dt}{2} dx = \frac{tdx}{2} + \frac{dtdx}{2}$, to ieſt $= \frac{tdx}{2}$, odrzuciwſzy wyraz $\frac{dtdx}{2}$, dla wyrażenia że dx i dt ſą ilościami niezmiérnie małémi. Po czém niepotrzebaby więcéy, tylko miéć zrównanie między ilościami x i t, żeby można zamiaſt t położyć wártość onego wyrażoną w x, a pótém ſcałkować.

Puzyſtóſówanie do ſproſtówania linii krzywych.

73. Sproſtówać liniią krzywą, ieſt to wynaléśdź iéy długość, albo liniią proſtą któraby iéy ſię równała, albo równała ſię łukowi zadanemu téyże linii krzywéy. Zobaczmy iaką drogą przychodzi ſię do tego, kiedy to bydź może.

Uważaiąc zawſze liniią krzy-
fig. 12. wą AM (fig. 12) iako wielokąt złożony z niezmiérnéy liczby boków, mały boczek Mm można poczytać za różniczkę łuku AM; bo $Mm = Am - AM = d(AM)$. Lecz poprowadziwſzy liniią Mr równoległą linii AP, będzie $Mm = \sqrt{(Mr^2}$

$+ rm^2) = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; więc nieidzie tylko o ſcałkówanie ilości $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Tym końcém trzeba zróżniczkówać zrównanie należące do linii krzywéy, a wyciągnąwſzy z niego wártość ilości dy wyrażoną w x i dx, albo też wártość ilości dx, wyrażoną w y i dy, takową wártość położyć w ilości $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, tak żeby ſkładała ſię tylko z ſamych x i dx^2, albo z ſamych y i dy^2; a naoſtatek wyciągnąwſzy ſpód znaku piérwiaſtkowego dx^2 albo dy^2 podług (Alg. 107), niezoſtanie do czyniénia tylko ſcałkówać takową ilość.

Na przykład obierzmy ſobie ſpomiędzy Parabol powſzechnie wyrażonych przez $y^{m+n} = a^m x^n$, tę do któréyby w ſzczególności należało to zrównanie, $y^3 = ax^2$; wyciągnąwſzy z niego x^2, będzie $x^2 = \frac{y^3}{a}$, a zatém $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$; więc będzie $dx = \frac{\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}$, a $dx^2 = \frac{9}{4} \frac{ydy^2}{a}$; więc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{9ydy^2}{4a})} = dy \sqrt{(1 + \frac{9y}{4a})}$ (Alg 107). Lecz ta ilość łatwo daie ſię ſcałkówać (66); bo wykładnik głoſki y położonéy zewnątrſz ilości dwuſłownéy, ieſt mniéyſzy o 1, od wykładnika téyże głoſki położonéy między nawiaſami. Więc będzie $\int dy\,\sqrt{(1+\frac{9y}{4a})}$ albo

$$\int dy\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{dy\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9dy}{4a}}+C=\frac{8a}{27}\cdot$$

$\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}+C$. Co należy do ſtatecznéy C, ta znayduie ſię w tén ſpoſób. Jeżeli łuki AM chcémy rachówać od punktu to ieſt od początku rzędnych y, to trzeba ażeby cáłka czyli wártość łuku AM, ſtała ſię zerèm w tén czas kiedy $y=0$, Lecz kiedy ieſt $y=0$, cáłka wychodzi na $\frac{8a}{27}(1)^{\frac{3}{2}}+C$, albo proſto na $\frac{8a}{27}+C$, więc będzie $\frac{8a}{27}+C=0$, a zatém $C=-\frac{8a}{27}$. Więc długość łuku iakiegokolwiek AM poczynaiącego ſię od wiérſzchołka A, będzie wyrażona przez $\frac{8a}{27}\times\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8a}{27}$.

Chcąc wiedzieć ktore ſą inne parabole co mogą bydż ſproſtówane, można tego dóyśdź w ſpoſób naſtępuiący. Zrównanie $y^{m+n}=a^mx^n$ należące do takowych linii, daie $y=a^{\frac{m}{m+n}}x^{\frac{n}{m+n}}$. Dla proſtſzego wyrażenia zróbmy $\frac{m}{m+n}=k$, a $\frac{n}{m+n}=l$, miéć bę-

dziém $y=a^kx^l$; więc będzie $dy=la^kx^{l-m}dx$, a $dy^2=l^2a^{2k}x^{2l-2}dx^2$; więc $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(dx^2+l^2a^{2k}x^{2l-2}dx^2)}$ $=dx\sqrt{(1+l^2a^{2k}x^{2l-2})}$, ilość, która niémoże bydź ſcáłkówana tylko w tén czas, kiedy $2l-2=1$. Atoli odmiéniwſzy znak należący do głoſki x okrytéy znakiém piérwiaſtkowym, odmiéni ſię poprzédzaiąca ilość na $x^{l-2}dx\sqrt{(x^{-2l+2}+l^2a^{2k})}$, która może bydź ſcáłkówana, ieżeli $l-1$ pomnożone o iednę iedność i rozdzielone przez $-2l+2$ da na wieloráz liczbę cáłą twiérdzącą, to ieſt ieżeli będzie $\frac{l}{-2l+2}=t$, przez t rozumieiąc liczbę cáłą twiérdzącą. Skąd wyciąga ſię $l=\frac{2t}{2t+1}$; albo $l=\frac{n}{m+n}$; więc $\frac{n}{m+n}=\frac{2t}{2t+1}$, a zatém $m=\frac{n}{2t}$. Skąd pokazuie ſię, że Parabole poddaiące ſię ſproſtówaniu, ſą te, do którychby należało takie zrównanie $y^{\frac{n.(2t+1)}{2t}}=a^{\frac{n}{2t}}x^n$, albo (wyciągnąwſzy piérwiaſtek ſtopnia n) $y^{\frac{2t+1}{2t}}=a^{\frac{1}{2t}}x$.

Przyſtóſówanie do Powiérſzchniów krzywych.

74. Przeſtaniémy tu tylko na Powiérſzchniach brył *kołowrotnych*

tnych (de revolution). Nazywaią się zaś tak, bryły króre uważaią się iakby powstawały z ruchu linii krzywéy AM (fig. 16) obracaiącéy się wokoło linii prostéy AP. *fig.* 16.

Trzeba tu sobie w myśli wystawić, że kiedy liniia krzywa AM obraca się około linii AP, mały boczek Mm rysuie pasek albo część stożka uciętego, który będzie składką powiérzchni, i który podług (Jeom. 222) równa się mnogości, wynikaiącéy z łuczku Mm, rozmnożonego przez okrąg, maiący za promiéń prostopadłą spuszczoną z środka łuczku Mm na liniią AP, albo (co na iedno wychodzi, z przyczyny że Mm iest niezmiérnie małe), przez okrąg maiący za promiéń liniią PM. Lecz łuczek $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; a oznaczywszy przez $r : c$ stósunek promiénia do okręgu koła, będzie $r : c :: y$ do okręgu, maiącego za promiéń PM, któryto zatém okrąg będzie wyrażony przez $\frac{cy}{r}$. A zatém na składkę powiérzchni brył kołowrotnych, wypadnie nam to wyrażenie, $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

75. Zebyśmy to przystósówali do przykładów, daymy iż ma ma bydź wynaleziona powiérzchnia kuli. Do koła AMB (fig. 17), należy zrównanie $yy = ax - xx$, oznaczywszy AP przez x, a PM przez y. Więc będzie $y = \sqrt{(ax - xx)}$, a $dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$; więc $dy^2 = \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}$; więc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{\frac{1}{4}aadx^2 + axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx})} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$. Położywszy tedy w formule $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ zamiast y i dy^2 onych wártości, będzie $\frac{c\sqrt{(ax - xx)}}{r} \cdot \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$, co wychodzi na $\frac{\frac{1}{2}acdx}{r}$; ilość, któréy cáłką iest $\frac{\frac{1}{2}acx}{r} + C$, albo tylko prosto $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$, ieżeli powiérzchnia rachuie się od punktu A. Lecz $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$ albo $\frac{\frac{1}{2}ac}{r} \cdot x$, wyraża powiérzchnią wáłka, maiącego za podstawę naywiększe koło kuli a za wysokość x, więc ten wypadek doskonale zgadza się z owym, który nam wypadł indziéy (Jeom. 223). *fig.* 17.

76. Gdybyśmy chcieli miéć powiérzchnią Paraboloidy czyli bryły Paraboliczné y, (nazywa się zaś tak bryła powstaiąca z kołowrotu Paraboli AM (fig. 16) około osi swoiéy); uważmy że należące do niéy zrównanie iest $yy = px$; więc $x = \frac{yy}{p}$, $dx = \frac{2ydy}{p}$, a $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{pp}$; więc będzie $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ *fig.* 16.

$\surd(dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{pp}) = dy\,\surd(1 + \frac{4y^2}{pp})$; ilość daiąca ſię ſcałkówać podług (66) i maiąca za całkę $\frac{\frac{cydy}{r}(1 + \frac{4y^2}{pp})^{\frac{3}{2}}}{\frac{\frac{3}{2} \cdot 8ydy}{pp}} + C$, co wychodzi na $\frac{ppc}{12r}(1 + \frac{4y^2}{pp})^{\frac{3}{2}} + C$. Lecz żeby ta ilość wyrażała powiérſzchnią poczynaiącą ſię od wiérſzchołka A, trzeba ażeby była zerém w tén czas, kiedy $y = 0$, a w takim razie przemiénia ſię na $\frac{ppc}{12r}(1)^{\frac{3}{2}} + C$, albo na $\frac{ppc}{12r} + C$; więc będzie $\frac{ppc}{12r} + C = 0$, to ieſt $C = -\frac{ppc}{12r}$; więc powiérſzchnia paraboloidy nieokréślonéy $AMLA$, wyraża ſię przez $\frac{ppc}{12r}(1 + \frac{4y^2}{pp})^{\frac{3}{2}} - \frac{ppc}{12r}$.

Przyſtóſówanie do pomiaru bryłowatościów.

77. W pomiarze bryłówatości ciał, można ſobie takowe ciała uważać iakoby ſkładaiące ſię z zrazików niezmiérnie ciénkich i wzaiemnie ſobie równoległych, albo téż iakoby ſkładaiące ſię z niezmiérnéy liczby piramid, którychby wiérſzchołki zbiégały ſię w iedén punkt. Uważaiąc ie tedy iakoby ſkładaiące ſię z zrazików niezmiérnie ciénkich i wzaiemnie ſobie równoległych; różnica między dwiéma płaſzczyznami naprzeciw ſobie położonémi, którémi zamyka ſię każdy zrazik, ieſt niezmiérnie mała, zatém w rachunku powinna bydź opuſzczona, chcąc to wyrazić że zrazik ieſt niezmiérnie ciénki. A ſtąd wynika, że na wyrażenie bryłówatości tego zrazika, trzeba wziąść mnogość wynikaiącą, z rozmnożenia iednéy z dwóch przeciwnych ſobie podſtáw, przez wyſokość niezmiérnie małą. *Np.* ieżeli uważam piramidę $SABC$ (fig. 18), iakoby ſkładaiącą ſię z zrazików niezmiérnie ciénkich, takich iak $abcdef$; mogę wziąść za pomiar tego zrazika, mnogość z płaſzczyzny abc albo def, przez grubość tegóż zrazika. *fig.* 18.

Podobnież, ieżeli uważam bryłę kołowrotną, powſtaiącą z kołowrotu linii krzywéy AM około linii proſtéy AP (fig. 16), ieżeli ią mówię uważam, iakoby złożoną z zrazików wzaiemnie ſobie równoległych i niezmiérnie ciénkich, to powinienem wziąść za pomiar każdego zrazika, mnogość z płaſzczyzny koła, maiącego za promień PM, rozmnożonéy przez grubość Pp. To zało- *fig.* 16.

żywſzy na przód, zobaczmy iak wynayduią ſię bryłówatości wſzelkich ciał. Każdy zrazik trzeba ſobie poczytać za różniczkę bryły zadanéy; bo w rzeczy ſaméy zrazik $MmlL$ ieſt $= AmlA - AMLA = d(AMLA)$; a zatém maiąc wyrażenie Algebraiczne tego zrazika, niezoſtanie więcéy do czyniénia, tylko go ſcáłkować.

Np. gdyby rzecz ſzła o Piramidę $SABC$; rozumieiąc że płaſzczyzna ABC iéy podſtawy, równa ſię ilości wiadoméy bb, a wyſokość $ST = h$; oznaczywſzy przez x odległość zraziku któregokolwiek od wiérſzchołka, grubość tego zrazika będzie wyrażona przez dx. Co ſię tyczé powiérſzchni abc, takowa znayduie ſię podług (Jeom. 202) przez tę proporcyą, $ST^2 : St^2 :: ABC : abc$, to ieſt $hh : xx :: bb : abc = \frac{bbxx}{hh}$; a zatém bryłówatością tego zrazika będzie, $\frac{bbxxdx}{hh}$, ilość, któréy cáłką ieſt $\frac{bbx^3}{3hh} + C$, albo tylko proſto $\frac{bbx^3}{3hh}$, ieżeli bryłówatość rachuie ſię od wiérſzchołka S. Takowa ilość wyrażaiąca iakąkolwiek część piramidy $Sabc$, ieſt taż ſama co $\frac{bbxx}{hh} \times \frac{x}{3}$, a ta znowu wychodzi na $abc \times \frac{St}{3}$; co właśnie zgadza ſię z tém, iak było okazano indziéy (Jeom, 242).

78. Co ſię zaś dotyczé brył kołowrotnych, w takowych można mieć

mieć bryłówatość zrazika ſkładkowego wyrażoną w ſpoſób powſzechny. Jakóż oznaczywſzy przez $r : c$ ſtóſunek promiénia do okręgu, wynaydzie ſię okrąg maiący za promiéń PM (fig. 16) albo y, ułożywſzy tę proporcyą, $r : c :: y : \frac{cy}{r}$; rozmnożywſzy wártość $\frac{cy}{r}$ okręgu maiącego za promiéń PM, przez $\frac{1}{2}y$, to ieſt przez połowę promiénia, wypadnie na płaſzczyznę, $\frac{cy^2}{2r}$, a tę znowu rozmnożywſzy przez grubość Pp albo dx, wypadnie na bryłówatość zrazu ſkładkowego wſzelkiéy bryły kołowrotnéy $\frac{cy^2dx}{2r}$. Chcąc użyć téy formuły w wſzelkim przypadku ſzczególnym, nietrzeba więcéy, tylko położyć w téy ilości, zamiaſt y wártość iego wyrażoną w x, a wyciągnioną z zrównania należącego do figury krzywèy AM, z któréy kołowrotu powſtaie bryła, a potèm tak przemiénioną ilość ſcáłkówać. fig. 16.

79. Obierzmy ſobie za przykład Ellipſoidę, czyli bryłę Elliptyczną, powſtaiącą z kołowrotu Ellipſy wokoło ſwoiéy większéy oſi (fig. 19). Zrównanie należące do fig. 19.
Elli-

Ellipſy ieſt $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, oznaczywſzy AP przez x, PM przez y, a oſi AB i Dd przez a i b. Formuła tedy poprzédzaiąca $\frac{cy^2dx}{2r}$ odmiénia ſię na $\frac{cbb}{2raa}dx(ax - xx)$, al. bo na $\frac{cbb}{2raa}.(axdx - x^2dx)$; ilość, któréy całką ieſt $\frac{cbb}{2raa} \times (\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}) + C$, albo proſto tylko $\frac{cbb}{2raa} \times (\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3})$, ieżeli rachuie ſię bryłówatość od punktu A.

Żeby mieć całą Ellipſoidę, trzeba rozumiéć $x = a$, ſkąd wyniknie $\frac{cbb}{2raa} \times (\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3})$, co wychodzi na $\frac{cabb}{12r}$, ilość taż ſama co $\frac{cbb}{4r} \times \frac{1}{3}a$ albo $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$; lecz $\frac{cbb}{8r}$, wyraża płaſzczyznę koła, maiącego b albo Dd za promién, a naſtępnie $\frac{cbb}{8r} \times a$ wyrażałoby bryłówatość wałka, opiſanego na Ellipſoidzie, więc każda bryłówatość Ellipſoidy ieſt $= \frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$; trzeba ſtąd wnieść, że bryłówatość Ellipſoidy, wynoſi $\frac{2}{3}$ bryłówatości wałka na niéy opiſanego. A że kula nieieſt co innego, tylko Ellipſoida maiąca równe obie oſi, więc kula wynoſi także $\frac{2}{3}$ wałka na niéy opiſanego; co ſłowo w ſłowo zgadza ſię z tém, iak ſię iuż okazało indziéy (Jeom. 245).

80.

80. Gdybyśmy zaś chcieli mieć bryłówatość rachówną od pewnego punktu K, takiego, ażeby było $AK = e$, to naténczas należy użyć całki powſzechnéy $\frac{cbb}{2raa}(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}) + C$; a że bryłówatość ma ſię poczynać od punktu K, więc trzeba żeby ta całka wypadała zerém w tymże punkcie, to ieſt w téń czas kiedy $x = e$; lecz w takim razie całka wychodzi na $\frac{cbb}{2raa}(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}) + C$, więc będzie $\frac{cbb}{2raa}(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}) + C = 0$, a zatém $C = -\frac{cbb}{2raa}(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3})$; więc na bryłówatość poczynaiącą ſię od punktu K, wypada ilość $\frac{cbb}{2raa}(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}) - \frac{cbb}{2raa}.(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3})$. Takie tedy ieſt wyrażenie kawałka bryły Elliptycznéy, zawartego między dwiéma płaſzczyznami ſobie równoległémi, którym oś ieſt proſtopadła, i którego grubość czyli wyſokość byłaby $= x - e$.

81. Obierzmy ſobie na drugi przykład *Paraboloidę* (fig. 16). Zrównanie należące *fig. 16.* do Paraboli ieſt $yy = px$; a zatém formuła $\frac{cy^2dx}{2r}$, przemiénia ſię na $\frac{cpxdx}{2r}$, ilość, któréy całką ieſt $\frac{cpx^2}{4r} + C$, albo $\frac{cpx}{2r} \times \frac{x}{2} + C$, albo (położywſzy zamiaſt px wártość onego yy), $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2} + C$. Jeżeli bryłówatość ma poczynać ſię od punktu A, to w takim razie

zie

zie, z przyczyny że bryła ſtaie ſię zerém kiedy $x = 0$, ſtateczna C powinna bydź tak, że zerém, a zatém bryłówatość wyraża ſię tylko proſto przez $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2}$; lecz $\frac{cyy}{2r}$ wyraża płaſzczyznę koła, maiącego za promień PM, czyli podſtawę paraboloidy $AMLA$; więc paraboloida ieſt połową mnogości, wynikaiącéy z rozmnożenia ſwoiéy podſtawy przez wyſokość x; więc ieſt połową wałka téyże podſtawy i téyże wyſokości.

Kiedy zaś bryłówatość ma ſię rachować od iakiegokolwiek danego punktu K, takiego, ażeby było $K = e$; to naténczas, z przyczyny że bryłówatość powinna bydź zerém w punkcie K, to ieſt gdy $x = e$, całka powſzechna w takim razie powinna bydź także zerém, to ieſt że ma bydź $\frac{cpx^2}{4r} + C$, przemiéniące ſię na $\frac{cpe^2}{4r} + C = 0$; więc $C = -\frac{cpe^2}{4r}$; a zatém na bryłówatość kawałka paraboloidy, zawartego między dwiéma płaſzczyznami równoległémi, odległémi od wiérſzchołka na x i e, wypada to wyrażenie, $\frac{cpx^2}{4r} - \frac{cpe^2}{4r}$, które może ſłużyć do obrachówania léyków powſtaiących z wypalenia komóry w Podkopach.

Jeſt mniémanie wielu Artyleryſtów * zaſadzaiące ſię na doświadczeniach, że w gruncie iednorodnym, któregoby powiérſz-
fig. 20. chnia MN (fig. 20) była poziemna, ściany léyka czyli dołu powſtaiącego z wypalenia pod-

* Zobacz Naukę Artyl. Tom. II. ſ. 394. po 3cie na kar. 177.

podſady prochowéy w Podkopach, maią krzywość paraboloidy MAN, maiącéy za śrzódpał śrzodek K komory, i w któréy odległość KP (nazwana *naykrótſzą odporową linią*) od śrzodpału do powiérſzchnéy płaſzczyzny MN, to ieſt do podſtawy tegóż léyka, ieſt połową śrzednicy MN téyże podſtawy. To założywſzy, zobaczmy iakby wyrachówać bryłę $NOLM$, którą dziélność prochu ma wyrwać.

Oznaczywſzy przez a liniią $KP = PM$, z własności paraboli będzie $\frac{aa}{a+e} = 4e$, gdzie rozumié ſię $e = AK$; ſkąd wyciąga ſię $e = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; więc $x = a + e = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{2})$, a zatém $xx - ee = a^2\sqrt{2}$; Ze zaś mamy $p = 4e$, przeto będzie $p(xx - ee) = 2a^3\sqrt{2}(-1 + \sqrt{2}) = 2a^3(2 - \sqrt{2})$; a zatém na bryłówatość ſzukaną, wyrażoną powſzechnie przez $\frac{cp}{4r}(x^2 - e^2)$, wypadnie $\frac{c}{2r}a^3(2 - \sqrt{2}) = \frac{355}{113} \times a^3(2 - 1{,}4142135) = 1{,}8403012a^3$, to ieſt z małém uchybiéniem, $\frac{46}{25}$ ſześcianu, zrobionego z naykrótſzéy odporowéy linii. W tèn rachunek niewchodzi część LAO, któréy wklęknienie, po wielkiéy części ſprawuie naciſkaiąca dziélność prochu na dno léyka.

82. Możnaby także ieſzcze wziąść ſobie za przykład *Hiperboloidę*; czyli bryłę powſtaiącą z kołowrotu Hiperboli, około iednèy z iéy

iéy ofiow; albo tèż *Ellipſoidę* powſtaiącą z kołowrotu Ellipſy około mniéyſzéy oſi, która zowie ſię *Ellipſoidą ſpłaſzczoną*, iako przeciwnie tamta co powſtaie z kołowrotu około więkſzéy oſi, nazywa ſię *Ellipſoidą pociągłą*. A tak znalezlibyśmy że *Ellipſoida ſpłaſzczona* wynoſi $\frac{2}{3}$ wałka na niéy opiſanego; to ieſt że oznaczywſzy przez a i b więkſzą i mniéyſzą oś Ellipſy, na bryłówatość Ellipſoidy pociągłéy, mielibyśmy $\frac{cabb}{12r}$ a na bryłówatość Ellipſoidy ſpłaſzczonéy, $\frac{caab}{12r}$; a zatèm Ellipſoida pociągła ma ſię do Ellipſoidy ſpłaſzczonéy $: : \frac{cabb}{12r} : \frac{caab}{12r} : : b : a$, albo iak ſię ma mniéyſza oś do więkſzéy oſi. I natém może nam iuż bydź doſyć co do brył kołowrotnych. Lecz żebyśmy przyuczyli poczynaiących, do poradzenia ſobie w ſzczególném ſtóſówaniu tych ſpoſobów, obrachuymy ieſzcze iedén przykład.

83. Niechay będzie zadano, żeby wynaléśdź bryłówatość *klina wàłkowego*, powſtaiącego z przecięcia wałka, przez płaſzczyznę nachyloną ku iego podſtawie, które-

rąto

rąto płaſzczyznę (dla prościéyſzéy rachuby) rozumiéymy przechodzącą przez śrzodek podſtawy; bryłę takową $ADBE$ wyraża (fig. 21). Zmyśliwſzy ią ſobie poprzerzy- *fig.* 21.
naną przez płaſzczyzny równoległe niezmiérnie bliſkie iedna drugiéy, i proſtopadłe na podſtawę AEB (fig. 22), takowe *fig.* 22.
przerzynki będą tróykątami ſobie podobnémi, których zatém powiérſzchnie czyli płaſzczyzny, miéć ſię będą między ſobą, iak kwadraty boków ſobie odpowiadaiących. A tak oznaczywſzy przez r promień CE podſtawy, przez h wyſokość DE, przez y podſtawę PM tróykąta PMN, będzie $CED : PMN : : rr : yy$; lecz $CED = \frac{rh}{2}$; więc $PMN = \frac{rhyy}{2rr} = \frac{hyy}{2r}$; a zatém oznaczywſzy znowu AP przez x, co da dx na grubość Pp przerzynka czyli zrazu, zawartego między dwiéma płaſzczyznami przyległémi, będzie, $\frac{hyydx}{2r}$ na wyrażenie tego przerzynka. Lecz y ieſt rzędną koła ſłużącego za podſtawę, przeto będzie $yy = 2rx - xx$, a zatém wyrażenie zrazika czyli przecinka ſkładkowego, przemiénia ſię w to $\frac{hdx(2rx - xx)}{2r}$, albo $\frac{h}{2r}.(2rxdx - xxdx)$; ilość, któréy całką będzie $\frac{h}{2r}.\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$, iezeli bryłówatość rachuie ſię od punktu A. Więc żeby miéć całą bryłę, nietrzeba tylko rozumiéć $x = 2r$, tak że poprzédzaiące wyrażenie, odmiéni ſię na $\frac{h}{2r} \times \left(4r^3 - \frac{8r^3}{3}\right)$ albo na $\frac{2}{3}hr^2$, albo na

hr

$\frac{hr}{2} \times \frac{4}{3} r$ albo na $CED \times \frac{4}{3} AC$, albo naoſtatek na $CED \times \frac{2}{3} AB$; to ieſt, że *bryłówatość klina wálkowego, rówua ſię dwóm tróykątnym* w'elościanu, maiącego za podſtawę tróykąt CED, a śrzednicę AB za wyſokość. Ten przykład ſłużyć może w ſążniówaniu różnych częśći fortyfikacyi.

O całkówaniu ilośćiów, zawiéraiących w ſobie Wſtawy i Doſtawy.

84. Cálkowanie ilośćiów zawiéraiących w ſobie wſtawy i doſtawy, zaſadza ſię zupełnie na fundamencie wyżéy podanym (22) do różniczkowania takowych ilośćiów. Widzieliśmy tam, iako $d(\text{wſt.}\,z) = dz\ \text{doſt.}\,z$, i iako $d(\text{doſt.}\,z) = -dz\ \text{wſt.}\,z$; więc odwrotnie, cáłką ilośći $dz\ \text{doſt.}\,z$, muſi bydź $\text{wſt.}\,z$, albo w powſzechniéyſzém wyrażeniu, $\text{wſt.}\,z + C$; ilość maiąca też ſamę różniczkę co poprzédzaiąca. Podobnież cáłką ilośći $-dz\ \text{wſt.}\,z$, będzie $\text{doſt.}\,z + C$. I w tychto przypadkach, można zamknąć cáłkówanie wſzelkich innych ilośćiów ſkładaiących ſię z *wſtaw* i *doſtaw*, byleby przy tém zachować reguły powſzechne, dotąd podane względem cáłkówania ilośćiów. Zobaczymy to w przykładach.

Gdyby było zadano $dz\ \text{doſt.}\,3z$; napiſałbym tę ilość tak, $\frac{3dz\ \text{doſt.}\,3z}{3}$, a naténczas cáłką iéy będzie, $\frac{\text{wſt.}\,3z}{3} + C$. Podobnież ilość $dz\ \text{wſt.}\,3z$, napiſawſzy tak $\frac{-3dz\ \text{wſt.}\,3z}{-3}$, znalazłbym na cáłkę iéy, $\frac{\text{doſt.}\,3z}{-3} + C$. W powſzechnośći, $\int dz\ \text{wſt.}\,mz$ (gdzie m wyraża liczbę ſtateczną), przemieniá ſię na $\frac{\int -mdz\ \text{wſt.}\,mz}{-m}$, i wychodzi na $\frac{-\text{doſt.}\,mz}{m} + C$.

Gdyby zadano było $(\text{wſt.}\,z)^n dz\ \text{doſt.}\,z$, trzebaby uważyć, że ta ilość wychodzi na $(\text{wſt.}\,z)^n d\,(\text{wſt.}\,z)$; lecz poczytawſzy $\text{wſt.}\,z$ za proſtą odmiénną, można pomiénioną ilość ſcáłkować podług reguły fundamentalnéy; więc takową cáłką będzie, $\frac{(\text{wſt.}\,z)^{n+1}}{n+1} + C$.

Gdyby różniczka była taka, $(\text{wſt.}\,mz)^n$, $dz \times \text{doſt.}\,mz$, trzebaby ią napiſać tak $\frac{(\text{wſt.}\,mz)^n mdz\ \text{doſt.}\,mz}{m}$, co wychodzi na $\frac{(\text{wſt.}\,mz)^n d\,(\text{wſt.}\,mz)}{m}$, któréy cáłką ieſt $\frac{(\text{wſt.}\,mz)^{n+1}}{m(n+1)}$. Podobnież żeby mieć cáłkę ilośći $(\text{doſt.}\,mz)^n dz\ \text{wſt.}\,mz$, trzebaby ią tak

tak napiſać, $\dfrac{(\text{doſt.}\ mz)^n \cdot - mdz\ \text{wſt.}\ mz}{-m}$, a natenczas całką iéy będzie, $\dfrac{(\text{doſt.}\ mz)^{n+1}}{-m(n+1)}$ $+ C$.

Gdyby znowu do ſcałkowania było zadano, dz wſt. pz doſt. qz; to w takim razie należy ſobie przypomnieć z (Jeom. 286), że kiedy a i b ſą dwa kąty iakiekolwiek, to będzie wſt. $(a+b) =$ wſt. a doſt. $b +$ wſt. $b \times$ doſt. a; wſt. $(a-b) =$ wſt. a doſt. $b -$ wſt. $b \times$ doſt. a; ſkąd wnoſi ſię, wſt. a doſt. $b = \frac{1}{2}$ wſt. $(a+b) + \frac{1}{2}$ wſt. $(a-b)$. Podobnież, ponieważ podług (Jeom. 287), doſt. $(a+b) =$ doſt. a doſt. $b -$ wſt. a wſt. b, a zaś doſt. $(a-b) =$ doſt. a doſt. $b +$ wſt. a wſt. b; więc będzie, doſt. a doſt. $b = \frac{1}{2}$ doſt. $b(a+b) + \frac{1}{2}$ doſt. $(a-b)$; a zaś, wſt. a wſt. $b = \frac{1}{2}$ doſt. $(a-b)$ $- \frac{1}{2}$ doſt. $(a+b)$. Na tym fundamencie, wſt. pz doſt. qz, przemiénia ſię, na $\frac{1}{2}$ wſt. $(pz+qz)$ $+ \frac{1}{2}$ wſt. $(pz-qz)$, albo na, $\frac{1}{2}$ wſt. $(p+q)z +$ $\frac{1}{2}$ wſt. $(p-q)z$; a zatém ilością zadaną do ſcałkówania, będzie $\frac{1}{2} dz$ wſt. $(p+q)z + \frac{1}{2} dz$ wſt. $(p-q)z$, którą napiſawſzy w tén ſpoſób, $\frac{1}{2}\ \dfrac{(p+q)dz\ \text{wſt.}\ (p+q)z}{p+q} + \frac{1}{2} \cdot \cdot \dfrac{(p-q)dz\ \text{wſt.}\ (p-q)z}{p+q}$, na całkę wypadnie oczywiście, $\dfrac{-\frac{1}{2}\ \text{doſt.}\ (p+q)z}{p+q} - \cdot \cdot \cdot \dfrac{\frac{1}{2}\ \text{doſt.}\ (p-q)z}{p-q} + C$. Podobnymże ſpoſobém ſcałkówałaby ſię ilość, dz wſt. pz doſt. qz wſt. rz, i. t. d.; przemiéniwſzy te mnogości na wſtawy i doſtawy, odpowiadaiące ſummie i ró-

żnicy łuków pz, qz, rz, i. t. d., a to podług tychże ſamych fundamentów.

Gdyby także ieſzcze było zadano, $dz(\text{wſt.}\ z)^3$ przemiéniłbym tę ilość na, dz wſt. $z(\text{wſt.}\ z)^2$; lecz $(\text{wſt.}\ z)^2$ albo wſt. $z \times$ wſt. z podług fundamentu wzwyż założonego, ieſt $= \frac{1}{2}$ doſt. $(z-z) - \frac{1}{2}$ doſt. $(z+z) = \frac{1}{2}$ doſt. $0 -$ $\frac{1}{2}$ doſt. $2z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ doſt. $2z$, z przyczyny że doſt. $0 = 1$; więc będzie, wſt. $z(\text{wſt.}\ z)^2 =$ $\frac{1}{2}$ wſt. $z - \frac{1}{2}$ wſt. $z \times$ doſt. $2z$. Więc $dz(\text{wſt.}\ z.)^3$ $= \frac{1}{2} dz$ wſt. $z - dz$ wſt. z doſt. $2z$. A zatém przemiéniwſzy takowe wyrażenie wſt. z doſt. $2z$, tak iak uczyniło ſię z wyrażeniém wſt. pz doſt. qz, żądane ſcałkówanie da ſię łatwo wykonać. A ſtąd pokazuie ſię, iakby ſobie trzeba poſtąpić, w ſcałkówaniu ilości $dz(\text{wſt.}\ z)^n$, gdzie n rozumié ſię bydź liczbą całą twiérdzącą. Podobnież obéyśdźby ſię należało z ilością, $dz(\text{doſt.}\ z)^n$. A zatém na tychże ſamych fundamentach dopiéro wyłożonych, można całkówać ilości takiéy poſtaci, iak $dz(\text{wſt.}\ pz)^m\ (\text{doſt.}\ qz)^n$ $(\text{wſt.}\ rz)^s$ i. t. d., wykładniki m, n, s, rozumieiąc bydź liczbami całémi twiérdzącémi. Słowém, przy pomocy tych fundamentów, i tego co iuż poprzédziło wyżéy o całkówaniu ilościów, można zawſze ſcałkówać wſzelkie ilości zawiéraiące w ſobie wſtawy i doſtawy, kiedy tylko mogą miéć całkę Algebraiczną; ieżeliby zaś w zadane różniczki wchodziły i Styczne, to takowe trzeba naprowadzić do wyrażenia różniczek wſtawnych i doſtawnych, uważaiąc że Stycz. z $= \dfrac{\text{wſt.}\ z}{\text{doſt.}\ z}$.

O Obyczaiu całkówania w ſpoſób przybliżony, i niektóre użycia tego ſpoſobu.

85. To co ma naſtąpić, niémoże należyć do różniczek iednoſłownych, bo takowe zawſze łatwo całkuią ſię, iak widzieliśmy wyżéy; ale ſłużyć ma do różniczek wieloſłownych, nieumieſzczonych między przypadkami dotąd wyliczonémi. Sztuka całkówania ilościów w ſpoſób przybliżony, zależy na tém, ażeby ilość zadaną rozłożyć w rzęd ilościów iednoſłownych, coráz w mniéyſzéy wártości po ſobie naſtępuiących; a naténczas każdy wyráz całkuie ſię bardzo łatwo, z których doſyć bywa wziąść pewną liczbę wyrazów, żeby żądanéy całki miéć wártość doſtateczną. Reguła przepiſana w Algebrze (128) do wynieſiénia ilości iakiéykolwiék do ſtopnia zadanego, ſłużąca niemniéy i do ilościów wieloſłownych, poſłuży nam za ſpoſób, takowego całkowania w ſpoſób przybliżony. Przyſtąpmy do przykładów.

fig. 17. 86. *Niechay będzie zadano, żeby wynaléśdź długość łuku kołowego AM (fig. 17), przy*

przy pomocy iego wſtawy odwrotnéy. Uważaiąc łuk Mm iako niezmiérnie mały, ieżeli poprowadzi ſię liniia Mr równoległa linii AP, i promién CM; tróykąty podobne ſobie CPM, Mrm, dadzą $PM : CM :: Mr : Mm$. Lecz oznaczywſzy AP przez x; śrzednicę AB przez a, albo (dla proſtſzego wyrażenia) przez 1; będzie $Mr = dx$; $CM = \frac{1}{2}$, a $PM = \sqrt{(x - xx)}$. Więc $\sqrt{(x - xx)} : \frac{1}{2} :: dx : Mm$; więc $Mm = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$; a zatèm $AM = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$. Ta ilość niémoże bydź ſcałkówana przez reguły poprzédzaiące; dla czego przemiéniam ią na $\int \frac{\frac{1}{2} dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 - x)}}$, a potém na $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$. Wyráz $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ roſkładam w rzęd podług (Alg. 128); i znayduię po uczynionèm zebraniu, $(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 +$ t.d.; więc $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \times (1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 +$ t. d.$) = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{16} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{5}{32} x^{\frac{5}{2}} dx +$ t.d.$) = \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32} x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} +$ t. d. $= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112} x^{\frac{7}{2}} +$ t. d.; ilość, do któréy niéma potrzeby przydawać ſtatecznéy; bo kiedy $x = 0$, to i ſama ilość wychodzi na zero, tak iak bydź powinno; gdyż w takim razie łuk AM wyrażony przez tę ilość, ieſt zerèm.

Z przyczyny ſpólnego mnożnika $x^{\frac{1}{2}}$, temu rzędowi wyrażaiacému łuk AM, można

żna ieſzcze dać tę oſtatnią poſtać, $x^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{112}x^3 +$ t. d.). Teraz uważmy, że wſtawa odwrotna x, będąc zawſze mnieyſza od śrzednicy 1, (wyiąwſzy kiedy rzecz idzie o pół koła), uważmy mówię, że x muſi bydź ułamkiem, a zatém że wartości wyrazów w rzędzie po ſobie naſtępuiących, coraz zmnieyſzać ſię będą, a to tém bardziey, im będzie mnieyſza wſtawa odwrotna łuku zadanego. A przeto chcąc *np.* mieć długość łuku, którego wſtawa odwrotna byłaby ſetną częścią śrzednicy, mielibyśmy $x = \frac{1}{100} = 0{,}01$, a zatém $x^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$; na wartość tedy takowego łuku byłoby, $0{,}1 \left[1 + \frac{0{,}01}{6} + \frac{3(0{,}01)^2}{40} + \frac{5}{112}.(0{,}01)^3\right]$; a że naſtępuiący daléy wyraz tego rzędu, wypadałby przynaymniey ſto razy mnieyſzy od oſtatniego wyrazu, do którégo ténże poprzédzaiący rzęd ieſt pociągniony, bo każdy z tych wyrazów ieſt więcéy iak ſto razy mnieyſzy od ſwego poprzédzaiącego; więc zaſtanowiwſzy ſię nad wartością wyrazu $\frac{5}{112}(0{,}01)^3$, i wziąwſzy ſetną część téy wartości, można oſądzić o ſtopniu dokładności, z iaką mielibyśmy wyrażony tén łuk, przeſtaiąc na takowych cztérech pierwſzych wyrazach. Lecz wyraz $\frac{5}{112}(0{,}01)^3$, wychodzi na $\frac{5}{112}.(0{,}000001 = \frac{0.000005}{112}$ - - $= 0{,}0000000446$, któreyto liczby ſetną częścią ieſt $0{,}000000000446$; więc każdy wyraz naſzego rzędu, możemy beſpiecznie pociągnąć aż do dzieſięciu dzieſiątnych, nieobawiaiąc ſię ażeby wartość łuku ſtąd wynikaiąca, miała chybiać o iednę iedność w dziewiątéy dzieſiątnéy. A tak mieć będziém, $\frac{5}{112} \times$ (0,

$(0{,}01)^3 = 0{,}0000000446$; $\frac{3}{40}(0{,}01)^2$ - - $= 0{,}0000075000$; $\frac{0{,}01}{6} = 0{,}0016666666$; więc cały rzęd wynieſie $0{,}1(1{,}0016742112)$, albo naoſtatek $0{,}100167421$, przeſtaiąc tylko na dziewięciu dzieſiątnych; lubo ieſzcze możnaby beſpiecznie przypiſać i dzieſiątą

Taka tedy ieſt wartość łuku, któregoby wſtawa była ſetną częścią promienia. Więc gdyby było wiadomo, wiele razy liczba ſtopniów tego łuku, zawiéra ſię w 360°; rozmnożywſzy tę długość przez takową liczbę razy, możnaby mieć w przybliżony ſpoſób długość całego okręgu; lecz niémamy wiadomego tego ſtóſunku. Wiémy iednakże z (Jeom. 275), że wſtawa od 30° ieſt połową promienia, i że maiąc znaiomą wſtawę iakiego łuku, można łatwo dóyśdź także iego wſtawy odwrotnéy (Jeom. 283); a zatèm możnaby wyrachówać wſtawę odwrotną od 30° i położyć ią zamiaſt x w rzędzie wzwyż wynalezionym; a naténczas, rozmnożywſzy wypadek przez 12, to ieſt przez liczbę razy, iaką mieſzczą ſię 30° w 360°; wypadłaby długość okręgu przybliżona. Ale że takowy rzęd byłby niebardzo znacznie *ubywaiący* (convergente), tak iż trzebaby obrachówać wielką liczbę wyrazów, żeby mièć wartość okręgu iakóżkolwiek przybliżoną, przeto podamy tu do tego inny ſpóſób, który oraz ſłużyć będzie za drugi przykład całkówania przybliżonego.

Poprowadźmy Styczną *AN* (fig. 23). *fig.* 23.
ſieczną *CMN* i ſieczną niezmiérnie bliſką *Cmn*; z śrzodka *C* promiéniém *CN*, naryſuymy łuk niezmiérnie mały *Nr*, który można poczytać za proſtopadłą na linii *Cn*. Mały tróykącik proſtokątny *Nrn*, bę-

dzie podobny tróykątowi proſtokątnemu *CAn*, bo oba oprócz kąta proſtego, maią nadto ſpólny kąt *n*; będzie tedy podobny i tróykątowi *CAN*, iako niezmiernie mało różniącemu ſię od *CAn*; a zatém takowe tróykąty dadzą, $CN : CA :: Nn : Nr$, ſkąd wnoſi ſię $Nr = \frac{CA \times Nn}{CN}$; lecz znowu wycinki *CNr*, *CMm* podobne ſobie, daią $CN : CM$ albo $CA :: Nr$ albo $\frac{CA \times Nn}{CN} : Mm$; więc $Mm = \frac{CA^2 \times Nn}{CN^2}$. Oznaczywſzy *AN* przez *x*; promień *CA* przez *a*; mieć będziem $Nn = dx$; a $CN = \surd(aa - xx)$; więc wartość łuku *Mm* przemieni ſię na $\frac{aadx}{aa + xx}$; to ieſt, że $Mm = \frac{aadx}{aa + xx}$; więc $\int Mm$ albo $AM = \int \frac{aadx}{aa + xx}$. Ta ilość niemoże bydź doſkonale ſcałkowana; ażeby zaś dała ſię ſcałkować w ſpoſób przybliżony, trzeba ią napiſać w takiey poſtaci: $\int aadx\,(aa + xx)^{-1}$; a naténczas, znalazłſzy podług (Alg. 128), że $(aa + xx)^{-1} = a^{-2}(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \text{t.d.})$ będzie $\int aadx\,(aa + xx)^{-1} =$ $\int dx\,(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \text{t. d.}) =$ $\int (dx - \frac{x^2dx}{a^2} + \frac{x^4dx}{a^4} - \frac{x^6dx}{a^6} + \frac{x^8dx}{a^8} - \text{t. d.}) = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \text{t. d.}$

$$= x\,(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8} - \text{t. d.}).$$

Niezoſtaie nam tedy tylko wiedzieć, czy niémamy którego z łuków takiego, któryby mieścił ſię w okręgu znaiomą liczbę razy, i miał ſtyczną znaiomą. Lecz łuk od 45°, ieſt taki; bo mieści ſię 8 razy w okręgu, a ſtyczna iego równa ſię promiéniowi (Jeom. 276). Więc zrobiwſzy $x = a$, mieć będziém na długość łuku od 45°, wartość naſtępuiącego rzędu, $a\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{t. d.})$. Atoli ponieważ wyrazy tego rzędu, zmniéyſzaią ſię ieſzcze bardzo powoli, przeto zobaczmy, czy niémoglibyśmy rozłożyć łuku od 45° na dwa inne łuki, którychby ſtyczne były wiadome. Mało nam na tém zależy, ażeby liczba ſtopniów odpowiadaiąca tym łukóm była wiadoma; byleby wynoſiły 45° po wyrachówaniu ich długościów, przy pomocy ſtycznych; dodawſzy wraz te długości, mielibyśmy długość łuku od 45°. A że takowe łuki oczywiście będą mniéyſze od 45°, przeto też i ſtyczne ich będą mniéyſze od promiénia, a zatém rzęd wyrażaiący ich wartość, wypadać muſi znaczniéy ubywaiący, i łatwiéyſzy do obrachówania.

To co powiedziało ſię w (Jeom. 282), podaie nam ſpoſób wynaleziénia takowych dwóch łuków. Jakóż widzieliśmy tam, iż kiedy *a* i *b* ſą dwóma łukami iakiémikolwiek, to wypada, $\text{Stycz.}\,(a + b) = \frac{\text{Wſt.}\,(a + b)}{\text{Doſt.}\,(a + b)} =$

Wſt.

$$\frac{\text{Wſt.}\,a\ \text{doſt.}\,b + \text{wſt.}\,b\ \text{doſt.}\,a}{\text{Doſt.}\,a\ \text{doſt.}\,b - \text{wſt.}\,b\ \text{wſt.}\,a}$$ (Jeom. 286 i 287); więc rozdzieliwſzy górą i dołém przez doſt. a doſt. b, będzie ſtycz. $(a+b)$

$$= \frac{\frac{\text{wſt.}\,a}{\text{doſt.}\,a} + \frac{\text{wſt.}\,b}{\text{doſt.}\,b}}{1 - \frac{\text{wſt.}\,a\ \text{wſt.}\,b}{\text{doſt.}\,a\ \text{doſt.}\,b}},$$ to ieſt, Stycz. $(a+b)$

$$= \frac{\text{Stycz.}\,a + \text{ſtycz.}\,b}{1 - \text{Stycz.}\,a\ \text{ſtycz.}\,b}.$$ Więc, przypuściwſzy, że $a+b = 45^{\circ}$; w którymto razie, ſtycz. $(a+b) = 1$, mieć będziém $\frac{\text{ſtycz.}\,a + \text{ſtycz.}\,b}{1 - \text{ſtycz.}\,a\ \text{ſtycz.}\,b} = 1$; zrównanie, z którego podług zwyczaynych reguł, wyciąga ſię ſtycz. $b = \frac{1 - \text{ſtycz.}\,a}{1 + \text{ſtycz.}\,a}$. Daymy tedy że ſtycz. $a = \frac{1}{2}$; a natenczas mieć będziem, ſtycz. b . . $= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Niezoſtaie nam tedy, tylko wyrachówać przy pomocy rzędu poprzédzaiącego, długość łuku, któregoby ſtyczna x była wyrażona przez $\frac{a}{2}$, to ieſt, która równałaby ſię połowie promiénia, i długość łuku, którego ſtyczna x była wyrażona przez $\frac{a}{3}$; te dwa łuki wraz dodane, uczynią łuk od 45°. Położywſzy tedy w poprzédzaiącym rzędzie, zamiaſt x, naprzód $\frac{a}{2}$, a potém $\frac{a}{3}$, będzie $\frac{a}{2}(1 - \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^4} - \frac{1}{7.2^6} + \frac{1}{9.2^8} - \frac{1}{11.2^{10}} + \frac{1}{13.2^{12}}$ i. t. d.), i $\frac{a}{3}(1 - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} - \frac{1}{7.3^6} + \frac{1}{9.3^8} - \frac{1}{11.3^{10}} + \frac{1}{13.3^{12}}$ i. t. d.)

Zeby miéć wártośc każdego z tych dwóch łuków, wyrażone bez naymnieyſzego uchybienia aż do dziewiątéy dzieſiątnéy, trzeba wyrachówać pietnaście piérwſzych wyrazów piérwſzego rzędu, a z drugiégo rzędu tylko dzieſięć piérwſzych wyrazów. Takowy zaś rachunek może bydź bardzo łatwo odprawiony, uważaiąc, że w piérwſzym rzędzie naſtępuiące po ſobie wyrazy, ſą takie, że każdy równa ſię ſwemu poprzédzaiącemu, rozmnożonemu przez $\frac{1}{2^2}$, to ieſt każdy wynoſi $\frac{1}{4}$ poprzédzaiącego; potém takowy rząd mnoży ſię wyráz w wyráz, przez tén rząd, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ i. t. d., naoſtatek dodawſzy z ſobą z iedney ſtrony wſzyſtkie wyrazy liczby parzyſtéy, a z drugiéy ſtrony wſzyſtkie wyrazy liczby nieparzyſtéy, i ſummę tych oſtatnich odiąwſzy od ſummy piérwſzych, reſzta rozmnoży ſię przez $\frac{a}{2}$. Drugiego także rzędu rachunek niemniéy łatwo odprawi ſię, uważaiąc że w nim każdy wyráz powſtaie, z wyrazu poprzédzaiącego rozmnożonego przez $\frac{1}{3^2}$, czyli przez $\frac{1}{9}$, to ieſt że każdy wyráz ieſt dziewiątą częścią ſwego poprzédaiącego; potém takowy rząd mnoży ſię wyráz w wyráz, przez tén inny rząd $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ i. t. d., i inne działania odbywaią ſię iak z piérwſzym rzędem, oprócz że naoſtatek wypadek zamiaſt $\frac{a}{2}$, ma bydź rozmnożony

żony przez $\frac{a}{3}$. Odprawiwſzy te wſzyſtkie przepiſane działania, z przybliżeniém aż do dzieſięciu dzieſiątnych, znalezlibyśmy na wártość piérwſzego rzędu, $\frac{a}{2}$ (0,9272952180) albo a(0,4636476090), a na wártość drugiego rzędu, $\frac{a}{3}$ (0,9652516632) albo $a \times$ - . (0,3217505544); więc na łuk od 45°, który ieſt ſummą tych dwóch łuków, będzie a(0,7853981634; a zatém powtórzywſzy tę wártość cztéry razy, żeby mieć pół okręgu, wypadnie a(3,1415926536); więc promień ma ſię do pół okręgu, (albo śrzednica ma ſię do całego okręgu) : : a : a(3,1415926536) : : 1 : 3,1415926536, ſtóſunek, nieróżniący ſię tylko o połowę iedności dzieſiątnéy dzieſiątego miéyſca, od owego, który naznaczyliśmy indziéy (Jeom. 146), a który nawet moglibyśmy bardzo łatwo wyrachówać, z przybliżeniém daleko doſkonalſzém.

Na trzeci przykład przybliżenia, obierzmy ſobie wynaleziénie logarytmu, odpowiadącego liczbie iakiéykolwiek. Lecz naſamprzód należy ſobie przypomnieć, to co iuż powiedziało ſię indziéy (27), to ieſt, że logarytmy o których tu mowimy, nieſą owe co poſpolicie podaią ſię w Tablicach. Ale wyrachówawſzy te, łatwo ſobie z nich będzie można wnieść tamte, iak zobaczymy niżéy.

Zmy-

Zmyślam ſobie liczbę zadaną rozłożoną na dwie części takie iak $a + x$, gdzie a rozumié ſię bydź większą częścią. Podług tego co ſię rzekło (27), będzie d log. $(a + x) = \frac{dx}{a + x}$, ilość niedaiąca ſię ſcáłkowáć Algebraicznie; trzeba ią tedy rozłożyć wrzęd; dawſzy iéy piérwéy tę poſtać, $dx(a + x)^{-1}$. Lecz podług (Alg. 128), $(a + x)^{-1} = a^{-1} \times (1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3}$ i. t. d.$) = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x}{a^4}$ i. t. d; więc $dl(a + x) = dx(a + x)^{-1} = \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} - \frac{x^3dx}{a^4}$ i. t. d.; więc ſcáłkówawſzy, będzie $l(a + x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ + t. d. + C. Zeby naznaczyć wártość ſtatecznéy C; uważam że to zrównanie powinno zawſze mieć miéyſce, niech będzie x iakie chce, a zatém i w tén czas kiedyby było $x = 0$; lecz w tym oſtatnim przypadku, zrównanie przemiénia ſię na $la = C$; więc $C = la$; więc ieſt $l(a + x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ i. t. d. A zatém byleby mieć logarytm iednéy iakiéykolwiek liczby, to przy pomocy tego rzędu, zawſze można ſobie wyrachówać logarytm wſzelkiéy innéy liczby. *Np.* przypuściwſzy że $a = 10$, a $a + x = 11$, to będzie $x = 1$, a zatém $\frac{x}{a} = \frac{1}{10}$; ſkąd wnoſi ſię $l. 11. = l. 10 + 0,1$

$-\frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3}$ i. t. d.; zrównanie, pokazuiące co ma bydź przydano do logarytmu 10ciu, żeby mieć logarytm 11stu.

Atoli ponieważ rzęd powszechny dopiéro wynaleziony, częstokroć niebywa dość znacznie ubywaiący, przeto podaiemy tu ieszcze inny sposob w iaki sobie postąpić można. Niechay będzie zadano, żeby wynaléśdź logarytm ułamka, któregoby licznik był większy od mianownika; zobaczymy zaś wkrótce, że można na tę drogę naprowadzić szukanie wszelkiego logarytmu.

Oznaczmy sobie przez a, summę licznika i mianownika tego ułamka, a przez x onych różnicę; naténczas, podług (Jeom. 305), licznik będzie wyrażony przez $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$; a mianownik przez $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$; tak że cały ułamek wynidzie, na $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$, albo (wyrugówawszy spólnego czynnika $\frac{1}{2}$), na $\frac{a+x}{a-x}$; a zatém logarytmém téy liczby, będzie ilość $l.\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$, albo $l.(a+x) - l.(a-x)$; którą zróżniczkówawszy, uważaiąc a iako stateczną, a samo x iako odmiénną, * mieć bę-

* *Lubo ten ułamek, powinién wyrażać w powszechności wszelki ułamek, to iednak bynaymniéy nieprzeszkadza, do poczytania sum-*

dziém podług (27), $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$, co wychodzi, na $\frac{2adx}{aa-xx}$, albo na $2adx(aa-xx)^{-1}$. Rozłożywszy tedy w rzęd, wyraz $(aa-xx)^{-1}$, podług (Alg. 128), będzie $(aa-xx)^{-1} = a^{-2}(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} +$ t. d.), więc $2adx(aa-xx)^{-1} = 2a^{-1}dx(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} +$ t. d.$) = 2(\frac{dx}{a} + \frac{x^2dx}{a^3} + \frac{x^4dx}{a^5} + \frac{x^6dx}{a^7} + \frac{x^8dx}{a^9} +$ t. d.); więc będzie $\int \frac{2adx}{aa-xx}$, albo $l.\frac{a+x}{a-x} = 2(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} +$ t. d.$) + C$. Co się dotyczé statecznéy C; téy wartość znayduie się iak wyżéy, uważywszy na co wychodzi poprzédzaiące zrównanie, kiedy iest $x = 0$. Lecz w takim razie, mielibyśmy $l\frac{a}{a} = C$; więc $C = l\frac{a}{a} = l1 = 0$; więc będzie prosto $l\frac{a+x}{a-x} = 2(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} +$ t. d.); gdzie iawna iest, iako każdy wyraz powstaie z poprzédzaiącego, rozmnożonego przez kwadrat ilości $\frac{x}{a}$,

my a wynikaiącéy z licznika i mianownika za stateczną; albowiém niéma żadnego takiego ułamka, któregoby niémożna przygotówać so-

to ieſt, przez kwadrat piérwſzego wyrazu; potém bierze ſię piérwſzy wyráz, $\frac{1}{3}$ drugiego, $\frac{1}{5}$ trzeciego, i. t. d. a naoſtatek ſumma wſzyſtkich wyrazów powtarza ſię dwa razy. Zobaczmy to w przykładach.

Szukaymy *np.* logarytmu odpowiadaiącego liczbie 2. Tym umyſłém przemieniwſzy 2, w ułamek $\frac{2}{1}$, mieć będziém $a=3$, a $x=1$; więc $\frac{x}{a}=\frac{1}{3}$, a $\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{9}$. A zatém łatwo będzie wyrachówać ſobie wſzyſtkie wyrazy, bo nietrzeba tylko na złożenie każdego, wziąść $\frac{1}{9}$ wyrazu poprzédzaiącego, a tym ſpoſobém złoży ſię wártość rzędu $\frac{x}{a}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^5}{a^5}$, i. t. d, tak iż mieć będziém iak naſtępuie.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= 0{,}333333333\\
\frac{x^3}{a^3} &= 0{,}037037037\\
\frac{x^5}{a^5} &= 0{,}004115226\\
\frac{x^7}{a^7} &= 0{,}000457247\\
\frac{x^9}{a^9} &= 0{,}000050805\\
\frac{x^{11}}{a^{11}} &= 0{,}000005645\\
\frac{x^{13}}{a^{13}} &= 0{,}000000627\\
\frac{x^{15}}{a^{15}} &= 0{,}000000069
\end{aligned}\right\}\text{więc}\left\{\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= 0{,}333333333\\
\frac{x^3}{3a^3} &= 0{,}012345679\\
\frac{x^5}{5a^5} &= 0{,}000823045\\
\frac{x^7}{7a^7} &= 0{,}000065321\\
\frac{x^9}{9a^9} &= 0{,}000005645\\
\frac{x^{11}}{11a^{11}} &= 0{,}000000513\\
\frac{x^{13}}{13a^{13}} &= 0{,}000000048\\
\frac{x^{15}}{15a^{15}} &= 0{,}000000004
\end{aligned}\right.$$

bie w tén ſpoſób, żeby ſumma licznika i mianownika iego, równała ſię wſzelkiéy iakiéy-

więc ſumma wzyſtkiego, uczyni=0,346573588; a podwóyność iéy, która ma bydź logarytmém liczby 2, będzie $=$ 0,693147176, albo 0,69314718, przeſtaiąc tylko na ósmiu dzieſiątnych; bo żeby można było przypuścić i dziewiątą dzieſiątną, to trzebaby było przybliżenie daléy pociągnąć.

Ponieważ 4, ſą kwadratém *2óch*, a 8 ſą ſześcianém onychże, więc podwóyność tego logarytmu, będzie logarytmém *4ech*, a potróyność tegóż piérwſzego logarytmu, będzie logarytmém *8iu*. Zeby mieć logarytm *3ech*, można podobnież wyrachówać logarytm ułamka $\frac{4}{3}$, który odiąwſzy od logarytmu *4ech*, reſzta dałaby logarytm *3ech*; bo 3 nieieſt co innego, tylko 4 rozdzielone przez $\frac{4}{3}$; więc $l.\,3=l.\,4-l.\,\frac{4}{3}$. Ale takowy logarytm ieſzcze łatwiéy mieć można, wyrachówawſzy logarytm ułamka $\frac{8}{9}$, i odiąwſzy go od logarytmu *8iu*, iuż teraz wiadomego; reſzta będzie logarytmém *9ciu*, a tego znowu połowa będzie logarytmém *3ech*. Dodawſzy logarytm *3ech* do logarytmu *2óch*, ſumma da logarytm *6ciu*. Zeby mieć logarytm *5ciu*, trzeba naprzód wyrachówać logarytm *10ciu*; rachuiąc logarytm ułamka $\frac{10}{8}$,

kolwiek liczbie która ſię ſpodoba. Np. *chcąc ułamek* $\frac{3}{5}$ *przyprowadzić do tego ſtanu, żeby ſumma iego licznika i mianownika była* $=12$, *dosyć ieſt, rozmnożywſzy oba wyrazy przez iednęż liczbę* n, *co da* $\frac{3n}{5n}$, *dosyć ieſt mówię, zrobić* $3n+5n$ *albo* $8n=12$, *ſkąd wyciąga ſię* $n=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$, *więc będzie* $\frac{3}{5}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, *ułamek, w którym ſumma licznika i mianownika czyni w rzeczy ſaméy* 12.

który wyrachówany i dodany do logarytmu 8*iu*, da logarytm 10*ciu*. Od tego zaś logarytmu 10*ciu* odiąwſzy logarytm 2óch, reſzta będzie logarytmém 5*ciu*.

A ſtąd pokazuie ſię iakby ſobie trzeba poſtąpić w wyrachówaniu inſzych logarytmów. Uważyć tylko należy, że daley im większych liczb logarytmu ſzuka ſię, tém krótſzy rachunek wypada, tak iż maiąc wyrachówane piérwſze logarytmy aż do 10*ciu*, dalſze aż do 100*u* można rachówać, nieużywaiąc tylko trzech piérwſzych wyrazów rzędu, kiedy ma ſię przeſtać na ośmiu dzieſiątnych; pominąwſzy zaś tę liczbę, aż do tyſiąca doſyć będzie na dwóch piérwſzych wyrazach, a daléy po 1000*cu*, doſyć ieſt na ſamym piérwſzym wyrazie.

88. Teráz żeby wiedziéć, iak z tych logarytmów wnoſzą ſię logarytmy te, co znayduią ſię w poſpolitych Tablicach, do tego trzeba naprzód miéć logarytm 10*ciu*. Wyrachówawſzy tedy przez formułę poprzédzaiącą logarytm ułamka $\frac{10}{8}$, miéć będziém log. $\frac{8}{10} = 0{,}22314355$; do którégo przydawſzy logarytm 8*iu*, powſtaiący z potróyności logarytmu 2óch wyżéy wynalezionego, będzie $l.10 = 2{,}30258509$.

To założywſzy, przypomniymy ſobie, że zrównanie $dx = \frac{dy}{y}$, na któ-

rém

rém (27) zaſadza ſię niniéyſzy rachunek logarytmów, nienależy tylko temu układowi, gdzie pomiár rozumié ſię bydź $=1$; zrównanie zaś należące w powſzechności wſzelkim układóm logarytmów iakie tylko bydź mogą, ieſt to: $dx = \frac{mady}{y}$; a zrównanie należące także wſzelkim układóm logarytmów, ale w którychby piérwſzym wyrazém *a* progreſſyi Jeometryczney fundamentalnéy, była iedność, ieſt $dx = \frac{mdy}{y}$. Z tych zrównań piérwſze, to ieſt $dx = \frac{dy}{y}$, po ſcałkowaniu, daie $x = ly$; a trzecie, to ieſt $dx = \frac{mdy}{y}$, daie $x = ml.y$; ſkąd pokazuie ſię, że ponieważ *x* wyraża logarytm, przeto żeby logarytmy bezśrzednie z rachunku wypadaiące, naprowadzić do takiego układu logarytmów, w którymby było pomiarém *m*, trzeba logarytmy bezśrzednie z rachunku wypadaiące rozmnożyć przez pomiár *m*. Lecz logarytmém 10*ciu*, w Tablicach poſpolitych ieſt 1; a widzieliśmy dopiéro, że logarytmém 10*ciu*, bezśrzednie

 z

z rachunku wypadaiącym, ieſt $2{,}30258509$; więc będzie $m \times 2{,}30258509 = 1$; więc na pomiár w Tablicach poſpolitych wypada, $\frac{1}{2{,}30258509}$, co po rozdzieleniu wychodzi na 0,43429448.

Więc, *żeby logarytmy beśrzednie z rachunku wynalezione, naprowadzić do logarytmów iakie znayduią ſię w poſpolitych Tablicach, trzeba rozmnożyć piérwſze przez* 0,43429448. A odwrotnie, *żeby logatytmy, iakie znayduią ſię w poſpolitych Tablicach, naprowadzić do logarytmów bezśrzednie z rachunku wypadaiących, trzeba tamte rozdzielić przez* 0,43429448, *albo* (*co wygodniéyſza a na iedno wychodzi*) *rozmnożyć ie przez* 2,30258509.

I tak, ieżeli rozmnożymy wypadek 0,69314718 wyżéy wynaleziony na logarytm odpowiadaiący liczbie 2, ieżeli go mówię rozmnożymy przez 0,43429448, znaydziemy 0,30103000 na logarytm *2óch*, właśnie taki, iaki znayduie ſię w poſpolitych Tablicach.

89. Chcąc zaś powrocić do ſaméy liczby, trzeba tak ſobie począć.

Widzieliśmy wyżéy, że oznaczywſzy liczbę iakąkolwiek przez $a + x$, wypada

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} \text{ i. t. d.;}$$

więc $l(a+x) - la$ albo $l\frac{a+x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ i. t. d., gdzie a rozumié ſię bydź liczbą iakąkolwiek upodobaną, ale taką, że logarytm iéy mało różni ſię od logarytmu danego, który rozumié ſię należyć do $a + x$. Zróbmy dla prościéyſzego wyrażenia $l.\frac{a+x}{a} = z$, a miéć będziém

$$z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} \text{ i. t. d.,}$$ idzie tedy o to, ażeby miéć wártość ilości $\frac{x}{a}$ wyrażoną w z.

Daymy tedy, że takowa wártość może bydź wyrażona w tém zrównaniu, $\frac{x}{a} = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$ i. t. d., gdzie A, B, C, i. t. d. byłyby ſpółczynnikami ſtatecznémi, których wártość dopiéro ma bydź wynaleziona. Bedzie tedy:

$$\begin{aligned} z = Az &+ Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{t. d.} \\ &- \frac{A^2}{2}z^2 - \frac{2AB}{2}z^3 - \frac{BD}{2}z^4 \\ &\qquad + \frac{A^3}{3}z^3 - \frac{2AC}{2}z^4 \\ &\qquad\qquad + \frac{3A^2B}{3}z^4 \\ &\qquad\qquad - \frac{A^4}{4}z^4 \end{aligned}$$

Lecz kiedy to zrównanie ma mieć mieyſce, z niechay będzie iakie chce; trzeba 1*ód* ażeby było $A = 1$; 2*re* ażeby ſumma wyrazów mnożących każdy ſtopień głoſki z w naſtępuiących kolumnach po Az, była zerém. Będzie tedy $B - \frac{A^2}{2} = 0$, $C - AB + \frac{A^3}{3} = 0$, $D - \frac{BD}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0$; ſkąd wyciąga ſię $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{6} = \frac{1}{1.2.3}$, $D = \frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4}$; gdyby zaś była ieſzcze większa liczba wyrazów, takich iak Ez^4, Fz^6, to podobnymże ſpoſobém znalazłoby ſię bydź $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, $F = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ i. t. d.; wypada tedy $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} +$ t. d. Więc $1 + \frac{x}{a}$ albo $\frac{a+x}{a} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} +$ t. d.

W użyciu tey formuły, odéymuie ſię od logarytmu zadanego, to ieſt od logarytmu ilości $a + x$, logarytm naybliżſzy znaiomy, któremu odpowiadaiąca liczba poczyta ſię za a. Wypadła reſzta, będzie wartością wyrazu $l. \frac{a+z}{a}$ albo z, którą położywſzy w formule poprzédzaiącéy, wypadek pokaże wartość ilości $\frac{a+x}{a}$; ſkąd potém łatwo

two wynaydzie ſię $a + x$; bo a ieſt iuż wiadome.

Chąc wiedzieć iakiéy liczbie odpowiada logarytm 1, w tym układzie logarytmów o którym tu mowa, trzeba rozumieć $l \frac{a+x}{a}$ albo $z = 1$; a tak będzie $\frac{a+x}{a} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} +$ t. d. $=$ 2,7182818, przeſtaiąc tylko na ſiedmiu dzieſiątnych. Liczba któréy logarytmém ieſt 1, zdarza ſię bardzo częſto w rachunkach, iak zobaczymy w dalſzym przeciągu, dla tego téż tu do wyrachówania iéy podał ſię ſpoſób.

Ponieważ tu mówi ſię o logarytmach, w których pomiarém ieſt iedność, przeto gdyby logarytm zadany należał do natury logarytmów znayduiących ſię w poſpolitych Tablicach, trzebaby począć od przemiénienia go, iako téż i tego coby ſię wziął za logarytm ilości a, na logarytmy niniéyſze, albo téż tylko trzebaby przémiénić różnicę takowych dwóch logarytmów, a to ſpoſobém wyżéy podanym (88).

90. Można także mieć inſze wyrażenie liczby, przy pomocy iéy logarytmu; które iż bywa w częſtém używaniu, przeto należy nam dać go tu poznać.

Niechay będzie x takową liczbą, a $lx = z$. Jeżeli druga część tego zrównania rozmnoży ſię przez e, (przez takowe e rozumieiąc liczbę, któréy logarytmém byłoby 1), to będzie $lx = zle$, przez co nieodmiénia ſię

 nic;

nic; bo $le = 1$. Tym ſpoſobém, z natury logarytmów, zrównanie $lx = zle$ przemiéni ſię na $lx = le^z$; ſkąd wyciąga ſię $x = e^z$; bo kiedy logarytmy ſą ſobie równe, to i liczby odpowiadaiące im muſzą także bydź ſobie równe. A zatém podług tego co okazało ſię wyżéy (89), ieżeli ieſt $lx = z$, to będzie $x = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} +$ t. d. A że oráz mamy $x = e^z$, więc będzie także $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} +$ t. d.

Przeſtroga. 91. Spoſób, który tu podál ſię do wnieſiénia ſobie wártości głoſki x z zrównania $z = \frac{x}{a}$ — t. d. nazywa ſię *ſpoſób odwrotny* rzędów; zależy na tém iak widać, ażeby rózumiéć odmiénną (któréy ſzuka ſię wártości), wyrażoną w takim rzędzie, w którymby druga ódmiénna, miała wykładniki roſnące w progreſſyi arytmetycznéy, i w którymby każdy wyráz, miál ſpółczynnika ſtatecznego nieokreślonéy wártości.

Gdyby było wiele wyrazów zawiéraiących w ſobie x i z w iednémże zrównaniu, byleby x i z niebyły między ſobą rozmnożone, to rzęd wykładników znaydzie ſię, zrobiwſzy

wſzy wykładnika piérwſzego wyrazu rzędu ſzukanego, równym naymniéyſzemu wykładnikowi téyże odmiénnéy położonéy w zrównaniu; na różnicę zaś ſpólną między wykładnikami tegóż rzędu, trzebaby wziąść naywiękſzego ſpólnego dziélnika wykładników należących do téyże odmiénnéy w zrównaniu.

Np. gdybym miál $z^{\frac{2}{3}} + 3z = 2x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^3 +$ t. d.; zrobiłbym $x = Az^{\frac{2}{3}} + Bz + Cz^{\frac{4}{3}} + Dz^{\frac{5}{3}} + Fz^2 +$ t. d.; bo naymniéyſzym wykładnikiém głoſki z ieſt ułamek $\frac{2}{3}$. a naywiękſzym ſpólnym dziélnikiém wykładników $\frac{2}{3}$ i 1 należących do z, ieſt $\frac{1}{3}$.

Ale gdyby x i z były między ſobą rozmnożone, to naténczas trzebaby udać ſię do ſpoſobu, którego wyſzczególniénie do zamiaru naſzego nienależy; ale który zobaczyć ſobie można w dziełach *Newtona*, i w *Rozbiorze linii krzywych* przez *Kramera*.

Użycia przybliżéń poprzédzaiących do cáłkówania różnych ilościów.

92. Ponieważ iuż mamy wyrachówane Tablice różnych części koła i logarytmów, przeto kiedy trafi

trafi ſię do cáłkowania iaka różniczka, daiąca naprowadzić ſię do koła albo do logarytmów, to byłoby rzeczą niepotrzebną, takowe różniczki roſkładać w rzędy. Pożyteczniéy tedy w téy materyi zda nam ſię, ſpomiędzy takowych różniczek dać poznać te, co zdarzaią ſię nayczęściéy, i pokazać iak wynayduią ſię łuki koła, albo logarytmy które ſą cáłką onychże. Zobaczmy to w przykładach.

93. Widzieliśmy wyżéy (86), że $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$

fig. 17. wyraża ſkłádkę łuku kołowego AM (fig. 17), w którém a byłoby śrzednicą, a x odcinkiém, tak że cáłką téy ilości, albo $\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, ieſt łuk AM. Daymy tedy, że ma bydź ſzukana wártość téy cáłki, odpowiadaiąca pewnéy wártości określonéy głoſki x; w takim razie, trzeba odiąć od CA albo $\frac{1}{2}a$ znaiomą wártość głoſki x albo AP, żeby mieć CP; to zaś maiąc, w tróykącie proſtokątnym CPM, będzie znaiomy kąt proſty, przeciwproſtkątna $CM = \frac{1}{2}a$, i bok CP, a zatém będzie można wyrachówać kąt ACM; a znalázłſzy takowy kąt ACM, czyli liczbę ſtopniow odpowiadaiącą łukowi AM, i maiąc wiadomy promiéń iego CM, łatwo da ſię wyrachówać długość takowego łuku, podług (Jeom. 149).

94. Gdyby było zádano $\frac{hdx}{\sqrt{(ghx-pxx)}}$, gdzie

gdzie h, g, p, i k, rozumieią ſię bydź ilościami znaiomémi, to takową różniczkę można by zrobić podobną poprzédzaiącéy, rozdzieliwſzy górą i dołém przez $\sqrt{p}$; coby nam

dało $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x-xx)}}$, albo $\frac{h}{\sqrt{p}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x-xx)}}$.

Lecz w tém wyrażeniu, gdybyśmy wzięli na mnożnika wyrazu dx, połowę ilości $\frac{gk}{p}$, która mnoży x pod znakiém pierwiaſtkowym, to naténczas ta różniczka byłaby podobna rozniczcce poprzédzaiącéy (93); uczyńmy tedy tak, rozmnożywſzy, a oráz i rozdzieliwſzy przez $\frac{1}{2}\cdot\frac{gk}{p}$, albo przez $\frac{gk}{2p}$, a

mieć będziém $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}} \times \frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x-xx)}}$, albo $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$. $\frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{(\frac{gk}{p}x-xx)}}$. W téy poſtaci można rozeznąć bez trudności, że cáłką naſzéy różniczki, ieſt łuk koła, ktorégoby śrzednicą było $\frac{gk}{p}$, a odcinkiém x, ieſt mówię tén łuk pomnożony przez $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$; a zatém żądana cáłka łatwo da ſię naznaczyć, podług tego co poprzédziło.

95. Gdyby zamiaſt rachówania odcinków od punktów A, rachówaliśmy ie raczéy od śrzodka C, oznaczywſzy promiéń

CA

CA przez b, a odcinek CP przez x, mielibyśmy na ſkładkę łuku AM to wyrażenie, $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb-xx)}}$; które łatwo wynayduie ſię, przyſtóſówawſzy ieden do drugiego tróykąty podobne ſobie CPM, Mrm, i uważaiąc że $PM=\sqrt{(bb-xx)}$, iako też dawſzy na to baczenie, że różniczka pewinna wypadać przéczącą, z przyczyny że im bardziéy CP albo x pomnaża ſię, tém bardziéy zmnieyſza ſię łuk AM. A tak w teraźnieyſzym przypadku, mielibyśmy na różniczkę, ilość $\frac{kdx}{\sqrt{(gh-pxx)}}$, która odmiénia ſię iak wyżéy na $\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p}-xx)}}$; a że tu przez $\frac{gh}{p}$ wyraża ſię bb; więc ilość $-b$ maiąca znaydówać ſię w liczniku, będzie wyrażona przez $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$; więc rozmnożywſzy a oráz i rozdzieliwſzy przez $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$ mieć będziém, $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \cdot \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p}-xx)}}$.

Więc rozumieiąc bydź $CA=\frac{gh}{p}$, a $CP=x$, wypadnie na całkę, $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM$, albo powſzechniéy, $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM + C$, albo $\frac{-k}{\sqrt{gh}}$

$\times AM + C$. Co ſię dotyczé ſtatecznéy C, takowa wynayduie ſię z warunków ſzczególnego zagadnienia, co dowiodło do różniczki o którey mowa; łuk zaś AM wynayduie ſię, iak nauczyliśmy wyżéy (93); to ieſt przez obrachówanie tróykąta CPM i. t. d.

96. Widzieliśmy indziéy (86), że $\frac{aadx}{aa+xx}$, wyraża łuk kołowy, w którémby a było promiéniém, a x ſtyczną; łuk, ktorégo wielkość odpowiadaiącą iakiéy pewnéy okréślonéy wártości głoſki x, można naznaczyć, wyrachówawſzy kąt ACN w tróykącie proſtokątnym ACN (fig. 23), i długość łuku AM, przy pomocy liczby ſtopniów kąta ACN, i przy pomocy promiénia a. fig. 23.

Maiąc tedy daną ilość $\frac{kdx}{gb^2+hxx}$ rozdzieliłbym ią górą i dołém przez h; coby mi dało $\frac{k}{h} \cdot \frac{dx}{\frac{gb^2}{h}+xx}$; potém rozmnożywſzy górą i dołém przez $\frac{gb^2}{h}$, miáłbym $\frac{\frac{k}{h}}{\frac{gb^2}{h}} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h}+xx}$, albo $\frac{k}{gb^2} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h}+xx}$, ilość, któréy cáłkę znalázłbym, wyrachówawſzy długość łuku, maiącego za ſtyczną x, a za promiéń $\sqrt{(\frac{gb^2}{h})}$, i rozmnożywſzy przez $\frac{k}{gb^2}$.

97. Te tedy trzy różniczki cáłkuią ſię przez łuki kołowe. Zobaczmy ieſzcze te, co mogą bydź ſcáłkówane

ne

ne przy pomocy powiérſzchni kołowéy. Składką połodcinka APM
fig. 17. (fig. 17), ieſt $dx\sqrt{(ax-xx)}$, oznaczywſzy AP przez x; bo $y=\sqrt{(ax-xx)}$, a zatém ydx albo $PpmM = dx\sqrt{(ax-xx)}$; więc wſzelka różniczka, maiąca podobną poſtać, albo która mogłaby bydź wzwyż wſkazanémi przygotowaniami do niéy naprowadzona, może bydź ſcałkówana przy pomocy połodcinka kołowego, w którém odcinkiém liniiwym byłoby x, a śrzednicą a; odcinek zaś kołowy łatwo da ſię obrachówać, iużto przy pomocy tego co poprzédziło, iuż téż w ſpoſob podany na inſzém miéyſcu (Jeom. 149).

fig. 24. 98. *Np.* chcąc miéć powiérſzchnią połodcinka elliptycznego APM (fig. 24); będzie $y=\frac{b}{a}\sqrt{(ax-xx)}$; więc ydx albo $d(APM)=\frac{bdx}{a}\cdot\sqrt{(ax-xx)}$: lecz $dx\sqrt{(ax-xx)}$, wyraża ſkładkę połodcinka kołowego APM', rozumieiąc opiſane koło na AB iako na śrzednicy; więc będzie $d(APM)=\frac{b}{a}d(APM')$; a ſcałkówawſzy, będzie $APM=\frac{b}{a}\times APM'$; ſkąd wnoſi ſię $APM : APM' :: b : a$; to ieſt, *że powiérſzchnia połodcinka elliptycznego, ma ſię do powiérſzchni połodcinka kołowego odpowiadaiącego, iak ſię ma mniéyſza oś do większéy oſi*; a ſtąd znowu wynika, *że cała powiérſzchnia ellipſy, ma ſię do całéy powiérſzchni koła opiſanego na większéy oſi, iak ſię ma mniéyſza oś do większéy oſi.*

99. Gdyby zamiaſt rachówania odcinków od punktu A (fig. 17), rachówaliśmy fig. 17.
ie od śrzodka C; to naténczas oznaczywſzy CA przez b, a CP przez x, na ſkładkę połodcinka APM, mielibyśmy $-dx\sqrt{(bb-xx)}$; bo w takim razie $y=\sqrt{(bb-xx)}$, i odcinek APM umniéyſza ſię, tym czaſém gdy x przybywa, przez co różniczka ilości APM ſtaie ſię przéczącą. Zobaczmy teráz przykład różniczki przypadaiącéy do téy poſtaci.

Niechay będzie zadano, żeby wynaléśdź powiérſzchnią ellipſoidy pociągłéy. Formuła powſzechna wyrażaiąca powiérſzchnie tego rodzaiu, ieſt ta, $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (74); zrównanie zaś należące do Ellipſy daie, $yy=\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa-xx)$; więc $y=\frac{b}{a}\times\sqrt{(\frac{1}{4}aa-xx)}$, a $dy=-\frac{b}{a}\times\frac{xdx}{\sqrt{(\frac{1}{4}aa-xx)}}$; więc $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, przemiénia, ſię na $\frac{cb}{ra}\times\sqrt{(\frac{1}{4}aa-xx)}\times\sqrt{\left(dx^2+\frac{bb}{aa}\times\frac{x^2dx^2}{\frac{1}{4}aa-xx}\right)}$, albo po odbyciu wſkazanego mnożenia, po zebraniu, i po wyciągnièniu ilości dx^2 ſpod znaku piérwiaſtkowego, $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa-xx+\frac{bbxx}{aa}\right)}$, al-

bo

bo $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{(\frac{\frac{1}{4}a^4 - aaxx + bbxx}{aa})}$. Lecz ieżeli oznaczymy przez k, odległość CF od śrzodpału F (fig. 25), mieć będziém $kk = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, albo $4kk = aa - bb$ (Alg. 230); więc poprzedzaiące wyrażenie ſkładki powiérſzchni, odmiénia ſię na $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{(\frac{\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx}{aa})}$, albo na $\frac{cbdx}{raa}\sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx)}$. Teráz rozdzielmy ilość zamkniętą pod znakiém piérwiaſtkowym przez $4kk$, a zewnątrz rozmnóżmy przez piérwiaſtek tego dzielnika, to ieſt przez $2k$, a mieć będziém $\frac{2cbkdx}{raa}\cdot\sqrt{(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx)}$ ilość, któréy trzeba dać znak —, ażeby wyrażała powiérſzchnią poczynaiącą ſię od punktu A; bo kiedy x rośnie, powiérſzchnia umnieyſza ſię; a tak mieć będziém naoſtatek $-\frac{2cbkdx}{raa}\sqrt{(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx)}$. Przyſtóſowawszy tedy tę ilość do ilości $-dx\sqrt{(bb-xx)}$, wyrażaiącéy (iak widzieliśmy) połodcinek kołowy, w którémby promiéniém było b, wnieſiémy ſtąd, że całką ilości $-dx\sqrt{(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk}-xx)}$, ieſt połodcinek kołowy OPM, w którémby promiéniem było $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, a x odcinkiém liniiowym, wziętym ze śrzodka; że mówię ta całka równałaby ſię temu odcinkowi kołowemu, pomnożonemu o pewną ilość ſtateczną. A zatém, ieżeli promiéniém $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$ to ieſt takim, któryby był trzecią proporcyonalną li-ni-

fig. 25.

niiom CF i CA, naryſuie ſię koło ONR, to będzie $\int -dx\sqrt{(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk}-xx)} = OPM' + C$; więc $\int -\frac{2cbkdx}{raa}\sqrt{(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk}-xx)} = \frac{2cbk}{raa}\times OPM' + \frac{2cbk}{raa}\times C$.

Zeby zaś wynaléśdź wártość ſtateczné́y C, trzeba uważyć, że powiérſzchnia ſzukana maiąca poczynać ſię w punkcie A, muſi bydź zerém w tymże punkcie: lecz w punkcie A odcinek OPM wychodzi na OAN; więc będzie $= \frac{2cbk}{raa}\times OAN + \frac{2cbk}{raa} C$; ſkąd wyciąga ſię $C = -OAN$; tak iż na zupełną całkę wypadnie, $\frac{2cbk}{raa}\times OPM' - \frac{2cbk}{raa}\times OAN$ albo $\frac{2cbk}{raa}(OPM' - OAN)$, albo naoſtatek, $\frac{2cbk}{raa}(APM'N)$. Więc powiérſzchnią Półellipſoidy będzie, $\frac{2cbk}{raa}(ACRN)$, albo z przyczyny że $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, a zatém że $\frac{2k}{aa} = \frac{1}{2CO}$, takową powiérſzchnią, będzie $\frac{c}{r}\times\frac{b}{2CO}\times ACRN$, albo $\frac{c}{r}\times\frac{CD}{CO}\times ACRN$; więc powiérſzchnią całéy ellipſoidy, byłaby taż ilość wzięta dwa razy.

Co ſię dotyczé ſpoſobu wynaleziénia promiénia CO, tén ieſt bardzo proſty; trzeba naprzód z punktu C iako ze śrzodka pro-

promiéniém CO, narysówać łuk AL, któryby w punkcie L, przeciął prostopadłą FL, podniesioną na linii CA z punktu F; potém przedłuża się liniia CL aż się spotka w punkcie N z prostopadłą AN, podniesióną z punktu A, co nam da CN na szukaną wártość promiénia CO, albo ilości $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$. Jakóż, tróykąty CFL, i CAN podobne sobie, daią $CF : CA :: CL : CN$, albo $k : \frac{1}{2}a :: \frac{1}{2}a : CN = \frac{\frac{1}{4}aa}{k} = CO$.

100. Co się zaś tyczé ilościów ściągaiących się bezśrzednie do logarytmów, do tych liczby należą te wszystkie ilości, w których zadana różniczka, albo iest albo może bydź uczyniona takim ułamkiém, w którymby licznik był różniczką mianownika, bądźto samą przez się, bądź też różniczką rozmnożoną albo rozdzieloną przez iaką liczbę stateczną.

Kiedy licznik iest dóskonałą różniczką mianownika, to całką ilości, będzie logarytm tegóż mianownika.

I tak: $\int\frac{dx}{x} = lx + C$; $\int\frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C$; $\int\frac{2xdx}{aa+xx} = l.(aa+xx) + C$.

Ale

Ale kiedy licznik, będzie różniczką mianownika, rozmnożoną albo rozdzieloną przez iaką liczbę statecznną; to w takim razie, różniczkę zadaną trzeba rozłożyć na dwa czynniki, z którychby ieden był ułamkiém, maiącym za licznika doskonałą różniczkę mianownika, a z których drugi czynnik byłby liczbą stateczną. Naténczas całką takiéy ilości, będzie logarytm mianownika odmiénnego, rozmnożony przez czynnika statecznego.

Np. żeby scałkówać $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$; ponieważ różniczką ilości $a^3 + x^3$ iest $3x^2dx$, przeto trzeba mi zadaną różniczkę tak sobie przygotówać, ażebym miał w liczniku $3x^2dx$, co wykonam, napisawszy $\frac{a}{3} . \frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$; ilość, któréy całką iest $\frac{a}{3}\, l(a^3 + x^3) + C$.

Podobnież $\int\frac{dx}{a-x} = \int\frac{1}{-1} . \frac{-1dx}{a-x} = -l(a-x) + C = 0 - l(a-x) + C = l1 - l.(a-x) + C = l\frac{1}{a+x} + C$. Takóż, $\int\frac{xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2} . \int\frac{2xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2}\, l(aa+xx) + C = l\sqrt{(aa+xx)} + C$. Naostatek $\int\frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n}$

=

$$=\int \frac{a}{bn} \cdot \frac{nbx^{n-1}dx}{k+bx^n} = \frac{a}{bn} \cdot l(k+bx^n) + C$$

$$= l(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}} + C.$$

Zeby zaś naznaczyć wártość liczebną takowych całék, trzeba postąpić sobie w tén sposób. Daymy że idzie o wártość cáłki $l(a+x)$, gdzie rozumié się $a=5$, a $x=2$. Trzeba mi tedy szukać logarytmu *7miu*; tym umyssém biorę z Tablic pospolitych log. *7miu*, którym iest 0,8450980, i rozmnożywszy go podług (88) przez 2,30258509, albo przez 2,3025851, mam 1,9459100, albo 1,94591, na wártość ilości $l(a+x)$, albo na wártość cáłki, odpowiadaiącéy różniczce $\frac{dx}{a+x}$, kiedy $a=5$, a $x=2$.

101. Trafiaią się czasém różniczki, które chociaż niedadzą się tak przygotówać iak poprzédzaiące, iednakże mogą bydź scáłkówane prosto przez logarytmy; *np.* ilość $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$, iest taka. Udaie się częstokroć dać iéy postać różniczki lologarytmowéy, rozmnożywszy ią przez związek głoski x, taki, ażeby mnogość stała się różniczką tegóż związku, albo samą przez się albo téż rozmnożoną lub rozdzieloną przez iaką liczbę stateczną.

A naténczas rozdzieliwszy różniczkę przez takowy związek, zadana różniczka przemiéni się oczywiście w różniczkę logarytmową.

Stósuiąc to do ilości $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$, mnożę ią przez $x+\sqrt{(xx-1)}$ i mam $\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}+dx$ ilość, która w rzeczy saméy iest różniczką wyrazu $x+\sqrt{(xx-1)}$ tak iż mieć będę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}} = \frac{\int dx + \frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}} = l[x+\sqrt{(xx-1)}]+C.$$

Podobnież możnaby znaléśdź cáłkę ilości $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, rozmnożywszy górą i dołém przez $\sqrt{(-1)}$, coby mi dało $\frac{dx\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(xx-1)}}$; ilość, któréy cáłką (podług tego co się dopiéro rzekło), byłoby $\sqrt{(-1)}$ $l[x+\sqrt{(xx-1)}+C$.

102. Obiecaliśmy indziéy (60) wytłómaczyć, iak się to dzieie, że reguła fundamentalna, podana do cáłkówania ilościów iednossownych, daie ilość niezmiérną na cáłkę wyrazu $\frac{dx}{x}$, kiedy takówą cáłką iest lx albo przynaymniéy $lx+C$.

Cálka wyrazu $\frac{dx}{x}$, może bydź pomiérna albo niezmiérna, podług części téy cálki iaka ſię bierze. Zebyśmy to obiaśnili, uważmy naprzód, że wziąść cálkę ilości $\frac{dx}{x}$, nieieſt co innego, tylko ſkwadrówać hiperbolę poſpolitą, uważoną względém ſwoich kóńcotycznych. Jakóż zrównanie należące do téy linii krzywéy. ieſt $xy = aa$, albo $xy = 1$, rozumieiąc dla proſciéyſzego wyrażenia $a = 1$. Lecz z tego zrównania wyciąga ſię $y = \frac{1}{x}$; więc ſkłádka ydx powiérſzchni, przemiénia ſię na $\frac{dx}{x}$; więc chcąc mieć rozległości rachówane

fig. 26. od kóńcotycznéy AZ (fig. 26), cálka wyrazu $\frac{dx}{x}$ albo $lx + C$ powinna bydź taka, żeby ſię ſtawała zerém, kiedy punkt P przypada na punkt A, to ieſt kiedy $x = 0$; będzie tedy w takim razie $l0 + C = 0$, a zatém $C = - l0$, więc na cálkę wypadnie $lx - l0$, albo $l \frac{x}{0}$; to ieſt, że rozległości $ZAPMV$ rachówane od kóńcotycznéy, ſą niezmiérne, gdzie Z i V rozumieią ſię bydź kóńcami kóńcotycznéy, należącéy do odpowiadaiącego ramiénia hiperboli; w czém niéma wcale nic dziwnego.

Ale kiedy punkt O ieſt wiérſzchółkiém hiperboli, (w którymto przypadku odpowiadaiący odcinek $AN = 1$), żeby mieć w takim razie rozległości rachówane od punktu N, trzeba uważyć że cálka $lx + C$, powin-

winna bydź taka, ażeby ſtała ſię zerém, kiedy punkt P przypadnie na punkt N, albo kiedy $x = 1$; będzie tedy $l1 + C = 0$, a zatém $C = - l1 = 0$; więc rozległości $NOMP$, ſą wyrażone przez lx. A ſtąd pokazuie ſię 1ód Ze logarytmy bezśrzednie z rachunku wypadaiące, wyrażaią rozległości hiperboliczne zawarte między kóńcotyczną i liniią krzywą. poczynaiące ſię od wiérſzchołka O tèyże linii krzywéy. 2re Ze ieżeli cálka ilości $\frac{dx}{x}$ albo $x^{-1}dx$, wzięta podług reguły fundamentalnéy ieſt niezmiérna, to w takim razie wyraża rozległości rachowane od początku kóńcotycznych. Zobaczymy niżéy przykłady cálkówania przez logarytmy.

O ſpoſobie naprowadzenia (kiedyſ to bydź może), cálkòwania zadanéy różniczki dwusłownèy, do cálkowania innèy Różniczki także dwusłownéy znaiomèy.

103. Kidey po zaſtanowiéniu ſię nad różniczką dwuſłowną zadaną, podług (68 i 70), dla rozeznania ieżeli da ſię ſcálkówać albo nie, kiedy mówię pokaże ſię bydź niezgodną do ſcálkowania, to ieſzcze nietrzeba kwapić ſię do przedſięwzięcia z nią ſpoſobów przybliżonych, o których mówiło ſię wyżéy (85 i daléy). Ale raczéy trzeba ſprobować,

czy

czy Różniczka zadana, niémogłaby bydź naprowadzona do wyrażenia innéy różniczki dwuſłownéy proſtſzéy, któréy cáłka przybliżona, byłaby iuż wiadoma. Znaki zaś po których to poznaie ſię, ſą takie.

Niechay będzie $ax^m dx\,(b + cx^n)^p$ różniczka zadana; a $ex^r dx\,(b + cx^n)^p$, różniczka do któréy piérwſza ma bydź naprowadzona; to ieſt, że te dwie różniczki nieróżnią ſię między ſobą, tylko w ſpółczynnikach a, e, i w wykładniku głoſki x położonéy zewnątrſz nawiaſów; r rozumié ſię bydź mniéyſze iak m, ale iednakowego znaku. Naprowadzenie tedy téy piérwſzéy różniczki do drugiéy, będzie podobne w tén czas, kiedy $\frac{m-r}{n}$ będzie liczbą całą twiérdzącą. Zeby to zaś wykonać, trzeba rozumiéć $\int ax^m dx.\,(b + cx^n)^p = (b + cx^n)^{p+1}\,(Ax^{m-n+1} + Bx^{m-2n+1} + Cx^{m-3n+1} + \text{t. d.}) + Q \int ex^r dx\,(b + cx^n)^p$, biorąc tyle wyrazów więcéy iednym, do rzędu $Ax^{m-n+1} + \text{t. d.}$, ile będzie iednościów w wyrazie $\frac{m-r}{n}$. Potém dla wynaleziénia wártości czynników A, B, C i. t. d. różniczkuie ſię zrównanie, a rozdzieliwſzy przez $(b + cx^n)^p$, przenoſzą ſię wſzyſtkie wyrazy do iednéy części; naoſtatek każda ſumma wyrazów mnożących iedénże ſtopién głoſki x, równa ſię ſię z zerém, ſkąd wyniknie tyle zrównań ſłużących

cych do wynaleziénia niewiadomych A, B, C, i. t. d, ile znaydówać ſię będzie tychże niewiadomych.

Np. maiąc zadaną do ſcałkówania ilość $\frac{x^6 dx}{a^5}\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$; widzę podług tego co ſię rzekło (68 i 70), że ta różniczka niepodpada ſcałkówaniu. Ale że poſtać ilości okrytéy znakiém piérwiaſtkówym, ieſt taż ſama co owa, która wyraża łuk koła, przeto uważam czy różniczka zadana, niémogłaby iakim ſpoſobém zależyć od ilości $adx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, wyrażaiacéy łuk koła, maiącego za promién a, a x za odcinek wzięty od śrzodka. Widzę podług reguły dopiéro wyżéy podanéy, że $\frac{m-r}{n}$ albo $\frac{6-0}{2}$, czyni liczbę całą twiérdzącą 3; ſkąd ſobie wnoſzę, że cáłka zadanéy różniczki, w rzeczy ſaméy zależy od wzmiankówanego łuku koła. Zebym tedy doſzedł téy cáłki, rozumiém bydź $\int \frac{x^6 dx}{a^5} \times (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = (aa - xx)^{\frac{1}{2}}\,(Ax^5 + Bx^3 + Cx) + Q \int adx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, co po zróżniczkówaniu da mi

$$\frac{x^6 dx}{a^5}\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = \left\{\begin{array}{l} (Ax^5 + Bx^3 + Cx). \\ {[-xdx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}]} \\ + (aa - xx)^{\frac{1}{2}}\,(5Ax^4 \\ + 3Bx^2 + C)\,dx \\ + Qadx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right.$$

A rozdzieliwſzy przez $dx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, będzie $\frac{x^6}{a^5} = -Ax^6 - Bx^4 - Cx^2 + (aa - xx).\,(5Ax^4 + 3Bx^2 + C) + Qa$; po odprawiéniu zaś wſkazanego mnożenia i po przeſtawiéniu, wypadnie:

x

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{a^5}x^6 + Bx^4 + Cx^2 - Qa \\ + Ax^6 + 3Bx^4 + Cx^2 \\ + 5Ax^6 - 5Aa^2x^4 - 3Ba^2x^2 - Ca^2 \end{array}\right\} = 0.$$

A że to zrównanie zawſze powinno miéć miéyſce, chociażby było x iakie chce, więc trzeba ażeby każda ſumma wyrazów mnożących iedénże ſtopiéń głoſki x, była zerém; a zatém miéć będziém $6A + \frac{1}{a^5} = 0$, $-5Aa^2 + 4B = 0$, $2C - 3Ba^2 = 0$, $-Qa - Ca^2 = 0$. Wyciągnąwſzy z tych zrównań wártości czynników niewiadomych A, B i. t. d., pokaże ſię $A = -\frac{1}{6a^5}$, $B = -\frac{5}{24a^3}$, $C = -\frac{5}{16a}$, $Q = \frac{5}{16}$. A zatém całką ilości $\frac{x^6dx}{a^5}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$, będzie $(aa-xx)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^5}{6a^5} - \frac{5x^3}{24a^3} - \frac{5x}{16a}\right) + \frac{5}{16}\int adx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}} + C$. Lecz $\int adx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$, wyraża łuk koła, maiącégo za promiéń a, a za odcinek x, więc wártość téy ilości znaydzie ſię łatwo.

104. Gdyby różnica $m-r$, między dwóma wykładnikami należącémi do x, położonego zewnątrſz nawiaſów, rozdzielona przez wykładnika n, należącego do x zamkniętego między nawiaſami, niebyła liczbą całą twiérdzącą, nienależałoby ieſzcze ſtąd wnoſić, że naprowa-

dze-

dzenie iednéy różniczki, do poſtaci drugiéy różniczki znaioméy, ieſt niepodobne. Ale w każdéy różniczce, wykładnika zamkniętego między nawiaſami zrobiwſzy przéczącym, ieżeli różnica między dwóma nowémi wykładnikami, położonémi zewnątrſz nawiaſów, rozdzielona przez wykładnika zamkniętego między nawiaſami, daie liczbę całą twiérdzącą, to znak że takowe naprowadzenie iednéy różniczki do drugiéy, będzie podobne.

Np. gdyby zapytano było, czy ilość $x^{-8}dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$, niezależy od ilości $dx.(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$; widzę wprawdzie, że $\frac{m-r}{n}$ albo $= \frac{-8-0}{4}$, niedaie mi na wieloráz liczby całéy twiérdzącéy, atoli niewnoſząc ſobie ieſzcze ſtąd, ażeby te dwie różniczki niezależały iedna od drugiéy, przemiéniam ie na, $x^{-10}dx(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$ i $x^{-2}dx(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$; a w takiéy poſtaci widzę, że $\frac{m-r}{n}$ albo $\frac{-10+2}{4}$, daie mi na wieloráz liczbę całą twiérdzącą; ſkąd dopiéro wnoſzę ſobie, że te dwie różniczki zależą iedna od drugiéy. A zatém żeby ie ſcałkówać, działam z niémi iak wyżéy, nieiuż w téy poſtaci iak były zadane, ale w takiéy w iaką przemiéni-

ły

ły ſię, po zrobiéniu wykładnika przéczącym. A zatém zrobiłbym $\int x^{-10}dx\,(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}} = (a^4x^{-4}-1)^{\frac{1}{2}}\,(Ax^{-5}+Bx^{-1})$ $+\,Q\int x^{-2}dx\,(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$, i dokónczyłbym iak wyżéy, dla znaleziénia wártości ſpółczynników A, B, Q.

105. Może zdarzyć ſię w pewnych przypadkach, że różniczka iaka, podpada w rzeczy ſaméy ſcałkowaniu, lubo przez tę lub przez owę z dwóch reguł przepiſanych, zdawałaby ſię zależyć od różniczki zadanéy. Ale oprócz tego, że rozumié ſię iuż poprzédzone doświadczenie z tą ilością, podług reguły (68 i 70) czy może bydź ſcałkówana lub nie, nadto w takim razie, ſpółczynnik Q dany różniczce, do któréy ma bydź naprowadzona różniczka zadana, zawſze pokaże ſię bydź $=0$.

Np. gdyby było zapytano, ieżeli różniczka $x^{-4}dx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$, zależy od różniczki $dx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$; uważam, że to bydź niémoże w piérwſzym przypadku z dwóch poprzédzaiących; ale w drugim przypadku, to ieſt przemiéniwſzy dane różniczki na $x^{-5}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ i $x^{-1}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, znalázłbym że $\frac{m-r}{n}$ albo $\frac{-5+1}{-2}$, ieſt liczbą całą twiérdzącą, co mi znać daie że piérwſza różniczka może zależyć od dru-

giéy. A przecięż różniczka $x^{-5}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, może bydź ſcałkówana, podług (68). Lecz to ſprzeciwiéńſtwo nieieſt tylko pozorne; bo ieżeli na téy zaſadzie że $\frac{m-r}{n}$ równa ſię liczbie całéy twiérdzącéy, zechcemy w rzeczy ſaméy, różniczkę $x^{-5}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, naprowadzić do różniczki $x^{-1}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ i zrobimy $\int x^{-5}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}} = (aax^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}\,(Ax^{-2}+B) + Q\int x^{-1}dx \times (aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, to ſzukaiąc wártości ſpółczynników A, B, Q, iak wyżéy, znaydziémy bydź $Q=0$; co nam okazuie, że ilość $\int x^{-5}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, równa ſię ilości zgoła Algebraicznéy.

106. Daymy teráz, że dwie ilości dwuſſowne, wchodzące w różniczki o których tu mowa, maią różnych wykładników; tak że róniczką zadaną byłoby $hx^s dx\,(a+bx^n)^r$, a różniczką do któréy piérwſza ma bydź naprowadzona, byłoby $x^m dx \times (a+bx^n)^p$, gdzie p rozumié ſię miéć wártość liczebną mniéyſzą od r. Jeżeli r ieſt ilością twiérdzącą, to trzeba przemiénić różniczkę $hx^s dx \times (a+bx^n)^r$, na tę, $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^{r-p} \times (a+bx^n)^p$. Naténczas, ieżeli $r-p$, będzie liczbą całą twiérdzącą, to można ilość $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^{r-p}$ (a

$(a + bx^n)^p$ rozłożyć w rzęd wyrazów takiéy postaci: $A'x^s + B'x^{s+n}$ $+ C'x^{s+2n} +$ t.d.) $dx(a + bx^n)^p$, z których każdy może bydź naprowadzony do ilości, $x^m dx (a + bx^n)^p$ w sposób poprzédzaiący, ieżeli $m-n$, iest rozdziélne przez n; żeby zaś do niéy naprowadzić całe wyrażenie, trzeba sobie postąpić słowo w słowo tak, iak przepisało się w tym sposobie, rozumieiąc przez tę ilość którą ozaczyliśmy przez s, naywiększego wykładnika głoski x, w rozłożonéy wártości tego wyrażenia, $hx^s dx (a + bx^n)^{r-p}$

Np. gdyby trzeba było, ilość $\int x^2 dx (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ naprowadzić do ilości $\int dx (bb-xx)^{\frac{1}{2}}$; przemiéniłbym $\int x^2 dx (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ na $\int x^2 dx$ $(bb - xx)(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, albo na $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, a naténczas, zamiast s powiniénem tu wziąść 4. Robię tedy stósównie do przepisanego sposobu, $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)$ $(bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb-xx)^{\frac{3}{2}}(Ax + Bx^3) + \int Rdx$ $(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$.

Gdyby przeciwnie wártość głoski r wypadła przécząca, to różniczkę do któréy zadana różniczka ma bydź naprowadzona, trzebaby przygotować sobie w tén sposób, $x^m dx (a + bx^n)^{p-r} \times (a + bx^n)^r$; gdzie ieżeli $p-r$ będzie liczbą całą, (bo twiérdzącą koniecznie bydź musi; gdyż r rozumié się ilością przéczącą, i większą od p, niechayby było p iakie chce), to ilość $x^m dx (a + bx^n)^{p-r}$, $(a + bx^n)^r$ można rozłożyć w rzęd określony wyrazów, takiéy postaci: $(A'x^m + B'x^{m+n} + C'x^{m+2n} +$ t. d.) $(a + bx^n)^r$. A naténczas trzeba sobie postąpić tak, iak gdyby rzecz szła o naprowadzenie téy rozłożonéy ilości, do postaci ilości, $x^s dx (a + bx^n)^r$ to iest, że trzeba postąpić sobie w sposób właśnie podobny tamtemu, co przepisał się do przypadku, w którym r było twiérdzące.

Np. gdyby trzeba było naprowadzić ilość $gx^{-2} dx (aa + xx)^{-2}$ do tego wyrażenia $dx(aa + xx)^{-1}$ albo $\frac{dx}{aa + xx}$, którego całką podług (86), iest łuk koła, maiącego x za styczną a a za promién; przemiéniłbym $dx(aa + xx)^{-1}$, na $(aa + xx)dx(aa + xx)^{-2}$; a że naymniéyszym wykładnikiém głoski x, położonéy zewnątrsz ilości dwusłownéy, są -2, więc rozumiéć będę $\int R(aa + xx)dx$ $(aa + xx)^{-2} = (aa + xx)^{-1}(Ax^{-1} + Bx) +$ $\int gx^{-2} dx (aa + xx)^{-2}$; a wreszcie dokóńczę iak wyżéy, dla wynaleziénia spółczynników A, B, i R; skąd po przestawiéniu, miałbym wártość ilości $\int gx^{-2} dx (aa + xx)^{-2}$, w któréyto wártości naostatek przemiéniłbym $R(aa + xx)dx(aa + xx)^{-2}$ na $Rdx(aa + xx)^{-1}$;

Gdyby $p - r$ niebyło liczbą całą, to naprowadzenie iednéy różniczki do drugiéy, niemogłoby miéć miéyſca.

O ułamkach niepiérwiaſtkowych (*rationelles*).

107. Wſzelka ilość różniczkowa niepiérwiaſtkówa, zawſze może bydź ſcáłkówana, albo Algebraicznie, albo przez łuki kołowe, albo przez logarytmy, albo przez te wſzyſtkie trzy ſpoſoby razém, albo téż tylko przez dwa z nich. Może zawſze bydź ſcáłkówana Algebraicznie, kiedy w ſobie niebędzie miała mianownika odmiénnego, chybaby był iednoſłowny, a w takim razie, trzeba ieſzcze wyłączyć przypadek, kiedyby takowy mianownik znaydówáł ſię bydź wynieſiony do ſtopnia iedności. Niezoſtaie nam tedy tylko pokazać prawdę podania naſzego w innych przypadkach; to ieſt, kiedy zadana różniczka ma mianownika niepiérwiaſtkowego, wieloſłownego.

Trzeba rozumiéć że w liczniku ułamka różniczkówego zadanego, odmiénna znayduie ſię w niżſzym ſtopniu iak w mianowniku. Gdyby zaś

zaś tak niebyło; to możnaby ią do tego ſtanu przyprowadzić, dzieląc licznika przez mianownika póty, ażby zoſtaiący ſtopiéń zrobił ſię mniéyſzym iak w mianowniku.

Np. gdybym miáł ſcáłkówać $\frac{x^3dx}{aa + 3ax + xx}$; rozdzieliłbym naprzód x^3dx przez $xx + 3ax + aa$; i miáłbym na wieloráz xdx, a na reſztę $- 3ax^2dx - aaxdx$; potém tę reſztę rozdzieliłbym znowu przez tegóż mianownika, i miáłbym na wieloráz $- 3adx$; a na reſztę $+ 8a^2xdx + 3a^3dx$; a dopiéro zamiaſt $\frac{x^3dx}{aa + 3ax + xx}$, wziąłbym $xdx - 3adx + \frac{8a^2xdx + 3a^3dx}{aa + 3ax + xx}$.

Zeby dóyśdź ſpoſobu, w iaki moglibyśmy cáłkówać ułamki różniczkowe, niepiérwiaſtkowe, przypomniymy ſobie, że ponieważ różniczką logarytmu odpowiadaiącego iakiéy ilości, ieſt różniczka téyże ilości, rozdzielona przez tęż ſamę ilość, to ieſt ponieważ zawſze ieſt ułamkiém, przeto naturalnie dorozumiéwać ſię można, że cáłkówanie ułamków niepiérwiaſtkowych, może częſtokroć zależyć od Logarytmów. Weźmy na przykłáď, $2a$ log. $(a + x) - 2a$ log. $(2a + x)$; zróżniczkówawſzy miéć będziém, $\frac{2adx}{a + x} - \frac{2adx}{2a + x}$, albo (przywiódłſzy do ſpólnego mianownika) $\frac{2aadx}{2aa + 3ax + xx}$. Lecz iawna ieſt, iż ażeby ſcáłkówać tén ułamek, nietrzeba tylko rozłożyć go na dwa ułamki, z którychby iedén miáł za mianownika

$a + x$, a drugi, $2a + x$, a w których liczniki byłyby liczbami ſtatecznémi rozmnożonémi przez dx; a zatém te dwa ułamki, mogą bydź ſcáłkówane przez logarytmy.

108. Maiąc tedy całkówać ułamki tego rodzaiu, rzecz naturalna że trzeba próbówać, rozłożyć ie na tyle ułamków oſobnych, ile może miéć czynników mianownik, i z których każdy miáłby za mianownika iednego z takowych czynników, i w rzeczy ſaméy zawſze tego ſpoſobu trzymać ſię należy, kiedy wſzyſtkie czynniki, z których mianownik mógł bydź złożony, będą nierówne.

109. Ale ieżeli między czynnikami ſkładaiącémi mianownika, znaydówać ſię będą niektóre równe ſobie, to w takim razie, nietrzeba ſobie obiecówać, żeby ſię udáł tén ſpoſób; bo natènczas cáłkówanie niebędzie zależyć od ſamych logarytmów. Jakóż, gdybyśmy miéli *np.* ułamek $\frac{dx}{(a+x)^2}$, w którym mianownik ſkłada ſię z dwóch równych czynników $a + x$ i $a + x$; znaleźlibyśmy podług (66), że cáłką téy ilości, albo ilości $dx(a+x)^{-2}$ która równa ſię piérwſzéy, byłoby $-(a+x)^{-1} + C$; wyrażenie wcale niezależące od logarytmów. Lecz oráz iawna ieſt, że gdybyśmy zróżniczkówali ilość taką, iak $\frac{aa}{a+x} + 2al(a+x) + 2al(2a+x)$, mielibyśmy $-\frac{aadx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{a+x}$

$+ \frac{2adx}{2a+x}$ albo $\frac{(aa+2ax)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x}$, albo (przywiódłſzy wſzyſtko do ſpólnego mianownika), $\frac{4ax^2dx + 9a^2xdx + 4a^3dx}{(a+x)^2(2a+x)}$; ilość, któréy cáłka, oczywiście muſi zawiérać w ſobie ilość Algebraiczną i ilości logarytmowe. Lecz żeby powrócić nazád do téy cáłki, trzebaby różniczce powrócić poſtać poprzédzaiącą, $\frac{aa+2ax}{(a+x)^2}dx + \frac{2adx}{a+x}$, to ieſt rozłożyć ią na dwa ułamki, z których piérwſzy, miáłby za mianownika wſzyſtkich czynników równych, a w liczniku wſzyſtkie ſtopnie głoſki x, ażeby były niżſze od naywyżſzego ſtopnia téyże głoſki w mianowniku; drugie zaś ułamki, każdy z nich, powinny miéć za mianowników czynniki nierówne, a w licznikach trzeba ażeby x niebyło do żadnego ſtopnia podnieſione. Albowiém naténczas, wyráz $\frac{aa+2ax}{(a+x)^2}dx$, ſcáłkuie ſię łatwo, podług reguł podanych, a wyráz $\frac{2adx}{a+x}$ ſcáłkuie ſię przez logarytmy. Zawſze zaś można w tén ſpoſób rozłożyć każdy ułamek niepiérwiaſtkówy; a zatém téż zawſze tak czynić będziém, przynaymniéy ile razy w mianowniku niebędzie zmyślonych czynników; przypadek w którym wéyźrzymy na inſzém miéyſcu.

I tak daymy, że $\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots kx^{n-1})dx}{M + Nx + Px^2 + \ldots Tx^n}$ wyraża w powſzechności wſzelki ułamek niepiérwiaſtkowy; ieżeli przypuścimy, że

 mia-

mianownik ma liczbę m czynników, rownaiących ſię iłości $x+g$, a liczbę p czynników równaiących ſię iłości $x+h$, i. t. d. i liczbę iakąkolwiek czynników nierównych, oznaczonych przez $x+i$, $x+q$, $x+r$, i. t. d.; w którymto razie ułamek zadany, przemiéniłby ſię na - - - - - -

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m(x+h)^p \times \text{i.t.d.} \times (x+i)(x+q)(x+r) \times \text{i.t.d.}},$$

to żeby ſcáłkówać tén ułamek, trzeba rozumiéć

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m(x+h)^p \times \text{i.t.d.} \times (x+i)(x+q)(x+r) \times \text{i.t.d.}}$$

$$= \frac{Ax^{m-1}dx + Bx^{m-2}dx + \ldots Rdx}{(x+g)^m}$$

$$+ \frac{A'x^{p-1}dx + B'x^{p-2}dx + \ldots\ldots R'dx}{(x+h)^p} \text{ i.t.d.}$$

$$+ \frac{Ldx}{x+i} + \frac{Mdx}{x+q} + \frac{Ndx}{x+r} + \text{t. d.},$$ gdzie A, B, C, i. t. d., rozumieią ſię bydź ſpółczynnikami ſtatecznémi niokréślonémi. Naténczas, byleby iakimkolwiek bądź ſpoſobèm naznaczyć wártość takowych ſpółczynników, to łatwo będzie można miéć cáłkę zadanéy ilości. I to ieſt oczywiſta względém ułamków $\frac{Ldx}{x+i}$, $\frac{Mdx}{x+q}$, $\frac{Ndx}{x+r}$, i. t. d. których cáłkami ſą $Ll(x+i)$, $Ml(x+q)$, $Nl(x+r)$, i.t.d.; co zaś dotyczé ſię ułamków - - -

$$\frac{Ax^{m-1}dx + Bx^{m-2}dx + \ldots Rdx}{(x+g)^m},$$ w tych, dla prościéyſzego wyrażenia, trzeba zrobić $x+g=z$, ſkąd będzie $x=z-g$, a $dx=dz$. Położywſzy te wártości zamiaſt piérwſzych, całe wyrażenie przemiéni ſię w rzęd iłościów iednoſłownych, daiących ſię łatwo ſcáłkować, ſpomiędzy których tylko iedén będzie takiéy poſtaci $\frac{dz}{z}$, to ieſt cáłkuiący ſię przez logarytmy. Podobnież w ułamkach - -

$$\frac{A'x^{p-1} + B'x^{p-2}dx + \ldots Rdx}{(x+h)^p},$$ trzebaby zrobić $x+h=z'$.

A zatém niezoſtaie nam tylko dwie rzeczy do rozebrania; piérwſza, iak wynayduią ſię czynniki ſkładaiące mianownika zadanego ułamka różniczkowego; a druga iak wynayduią ſię ſpółczynniki nieokréślone.

110. Zeby wynaléśdź czynniki ſkładaiące mianownika, trzeba ſobie tak poſtąpić, iak w rozwiązaniu zrównania, którebyśmy mieli, zrównawſzy tegóż mianownika z zerém; bo podług (Alg. 143), rozwięzówać zrównanie, ieſt to ſzukać czynników dwuſłównych, z których rozmnożenia, to zrównanie powſtało.

111. Co zaś do ſpoſobu wynaleziénia ſpółczynników A, B, C, naynaturalniéy zdaie ſię, żeby wſzyſtkie ułamki, w które wchodzą takowe czynniki, przywiéśdź do mianownika ſpólnego; bo naténczas, ponieważ

waż obie części zrównania powſtaiącego z ułamka zadanego i z tych nowych ułamków, miéć będą ſpólnego mianownika, przeto można będzie odrzucić go z obu części; a przeſtawiwſzy wſzyſtko do iednéy części, ażeby zrównanie miało miéyſce, (bez żadnego względu na wártość głoſki x, iakażkolwiek byłaby takowa wártość), trzeba ażeby ſumma wyrazów mnożących iedénże ſtopién głoſki x, była zerém. Tén warunek da tyle zrównań, ile będzie ſpółczynników nieokreślonych, z których wyciągnie ſię wártość tychże czynników. Zobaczmy to w przykładach.

Daymy, że ma bydź ſcałkówana ilość $\frac{dx}{aa-xx}$; ruzumiéć będziém $\frac{dx}{aa-xx}=\frac{Adx}{a+x}+\frac{Bdx}{a-x}$, bo dwóma czynnikami ſkładaiącémi mianownika $aa-xx$, ſą $a+x$ i $a-x$. Naténczas, przywiódłſzy wſzyſtko do ſpólnego mianownika, będzie $\frac{dx}{aa-xx}=\frac{(Aa-Ax+Ba+Bx)dx}{aa-xx}$, a wyrugówawſzy ſpólnego mianownika, rozdzieliwſzy przez dx, i przeſtawiwſzy będzie $\left\{\begin{array}{r} 1+Ax \\ -Aa-Bx \\ -Ba \end{array}\right\}=0$;

więc $1-Aa-Ba=0$, i $A-B=0$; ſkąd łatwo wnoſi ſię $A=\frac{1}{2a}$, i $B=\frac{1}{2a}$; a zatém będzie $\frac{dx}{aa-xx}=\frac{\frac{1}{2}adx}{a+x}+\frac{\frac{1}{2a}dx}{a-x}$; ilość, któréy całką ieſt $\int\frac{dx}{aa-xx}=\frac{1}{2a}l(a+x)-\frac{1}{2a}l(a-x)+C=\frac{1}{2a}l\frac{a+x}{a-x}+C$.

Obierzmy ſobie na drugi przykład, ułamek $\frac{4axx+9a^2x+4a^3}{(a+x)^2(2a+x)}dx$, który nam dało (109) zróżniczkówanie ilości $\frac{aa}{a+x}+2al(a+x)+2al(2a+x)$. Rozumiéć tedy będziém, $\frac{4ax^2+9a^2x+4a^3}{(a+x)^2(2a+x)}dx=\frac{Ax+B}{(a+x)^2}dx+\frac{Cdx}{2a+x}$; przywiódłſzy wſzyſtko do ſpólnego mianownika, a potém po wyrugówaniu takowego ſpólnego mianownika, po rozdziéleniu przez dx, i po poprzeſtawiéniu), będzie

$$\left.\begin{array}{r} 4ax^2+9a^2x+4a^3 \\ -Ax^2-Aax-2Ba \\ -Cx^2-Bx-Caa \\ -2aCx \end{array}\right\}=0;$$

więc $4a-A-C=0$, $9a^2-2Aa-B,-2aC=0$, $4a^3-2Ba-Caa=0$; ſkąd wyciąga ſię $A=2a$, $B=2a^2$; $C=2a$; tak iż zadana różniczka, przemiéni ſię w tę, $\frac{2ax+aa}{(a+x)^2}dx+\frac{2adx}{2a+x}$; gdzie oſtatniego wyrazu całką, oczywiście ieſt $2a$ log. $(2a+x)$. Co zaś dotyczé ſię piérwſzégo wyrazu, robię $a+x=z$, i mam $x=z-a$, a $dx=dz$.

 Któ-

Któreto wártości położywſzy w wyrazie $\frac{2ax + aa}{(a + x)^2} dx$, mieć będziém, $\frac{2az - aa}{zz} dz$, albo $\frac{2adz}{z} - \frac{aadz}{zz}$; ilość, któréy cálką ieſt $2a \log. z + \frac{aa}{z}$, albo $2al(a + x) + \frac{aa}{a + x}$; więc na zupełną cálkę będzie, $\frac{aa}{a + x} + 2a \log.$ $(a + x)$, $2a \log. (2a + x)$, tak iak bydź było powinno,

112. Tén ſpoſób ieſt powſzechny. Ale wynaydówanie ſpółczynników, ieſzcze wielorako ułatwić ſobie można. *Np.* uważaiąc czynniki ułamków proſtych, bez względu iednych na drugie, można mieć takowe czynniki w tén ſpoſób. Niechay będzie $\frac{Ndx}{M}$ dany ułamek; $hx + a$ niechay będzie iednym z czynników ſkładaiących mianownika, a P niechay będzie wielorazém, wynikaiącym z rozdzielenia ilości M przez $hx + a$. Zmyślmy ſobie $\frac{Ndx}{M}$, rozłożone na $\frac{Adx}{hx + a}$ i $\frac{Qdx}{p}$, albo $\frac{N}{M} = \frac{A}{hx + a} + \frac{Q}{P}$; naténczas, przywiódłſzy wſzyſtko do ſpólnego mianownika, i pomniąc na

na owo przypuſzczenie że $P = \frac{M}{hx + a}$, albo $P \times (hx + a) = M$, będzie $N = AP + Q(hx + a)$. Zróżniczkówawſzy zrównanie $(hx + a)P = M$, mieć będziém $hPdx + (hx + a)\, dP = dM$.

Lecz że to zrównanie, iako téż i zrównanie $N = AP + Q(hx + a)$, zawſze powinny mieć miéyſce, niechayby było x iakie chce, więc głoſce x możémy tu dać wártość iaka nam ſię ſpodoba. Obierzmy ſobie tedy taką, któraby dała naypróściéyſzy wypadek; to ieſt połóżmy zamiaſt x, wartość $-\frac{a}{h}$, wynikaiącą z tego przypuſzczenia, że mianownik $hx + a = 0$; ſkąd mieć będziém $hPdx = dM$ i $N = AP$. Położywſzy w drugiém zrównaniu wártość $P = \frac{dM}{hdx}$, wyciągniętą z piérwſzégo, będzie $A = \frac{hNdx}{dM}$; to ieſt, że ażeby mieć licznika A, iednego któregokolwiek z ułamków proſtych, trzeba rozdzielić licznika Ndx ilości zadanéy, przez różniczkę dM mianownika téyże ilości, a położywſzy zamiaſt x wartość iego, wypadaiącą ſtąd, kiedy mianownik ułamka proſtego zrówna ſię z zerém, trzeba wſzyſtko rozmnożyć, przez ſpółczynnika głoſki x, znayduiącéy ſię w tymże mianowniku proſtym.

Np. żeby mieć liczniki A i B, ułamków $\frac{Adx}{a + x}$ i $\frac{Bdx}{a - x}$, na które wyżéy rozłożył ſię

ſię był ułamek $\frac{dx}{aa - xx}$; różniczkuię naprzód mianownika $aa - xx$, i mam, $-2xdx$; potém dzielę licznika dx ilości zadanéy przez $-2xdx$, co mi daie $-\frac{1}{2x}$; gdzie kładąc koléyno zamiaſt x, $-a$ i a, (wártości, wypadaiące po zrównauiu z zerém każdego z mianowników $a + x$ i $a - x$, należących do ułamków cząſtkowych) i rozmnożywſzy przez wártości 1 i -1, głoſki h, znaydę na wártość liczników A i B, te ilości $\frac{1}{2a}$ i $\frac{1}{2a}$, iak było wyżéy.

Możnaby téż podobnież naznaczyć reguły powſzechne, na wynaleziénie czynników mnożących liczniki ułamków cząſtkowych, maiących za mianownika mnogość złożoną z piérwiaſtków równych; ale to pomiiamy.

113. Lubo reguły dopiéro przepiſane do cáłkówania ułamków niepiérwiaſtkowych, ſą powſzechne, atoli kiedy niektóre z czynników ſkładaiących mianownika, będą ilościami zmyślonémi, to i cáłka będzie złożona z ilościów zmyślonych, która niemniéy przeto będzie rzetelna, ale niezawſze wygodnie da ſię naprowadzić do poſtaci rzetelnéy; w takim razie, trzeba naprzód wyciągnąć z mianownika wſzyſtkie czynniki rzetelne, a potém reſztę ro-

rozłożyć na czynniki, nieiuż piérwſzego ſtopnia, ale drugiego, które zawſze ſą rzetelne. A naténczas na odpowiadanie każdému czynnikowi drugiego ſtopnia, (który zawſze może bydź wyrażony przez $ax^2 + bx + c$), ſkłada ſię ułamek takiéy poſtaci, $\frac{Axdx + bdx}{ax^2 + bx + c}$, a na reſzcie czynniki wynayduią ſię iak wyżéy.

Np. gdyby do ſcáłkówania był zadany ułamek $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3}$; znalázłbym naprzód, zrównawſzy z zerém mianownika $a^3 - x^3$, że $a - x$, ieſt iednym z czynników iego; a potèm rozdziéliwſzy $a^3 - x^3$ przez $a - x$, miáłbym na wieloráz $a^2 + ax + x^2$, ilość, zawiéraiącą w ſobie inne dwa czynniki; lecz zrównawſzy ią z zerém, dla wynaleziénia takowych czynników, po odbytém działaniu pokazałoby ſię, że ſą zmyślone. Zaczém niekuſząc ſię o rozłożenie ilości zadanéy na trzy ułamki, maiące za mianowniki, trzy czynniki ſkładaiące ilość $a^3 - x^3$, roſkładam ią tylko na dwa ułamki, z których iedén, miáłby za mianownika, iednego z czynników to ieſt $a - x$, a drugi drugiego, to ieſt $a^2 + ax + x^2$; a po takowém rozłożeniu, robię $\frac{x^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{Adx}{a - x} + \frac{Bxdx + Cdx}{aa + ax + x^2}$. Przywiódſzy wſzyſtko do ſpólnego mianownika, rozdziéliwſzy przez dx, i przeſtawiwſzy, będzie

$$\left.\begin{array}{l} a^4 - Aax - Ax^2 \\ -Aa^2 + Cx + Bx^2 \\ -Ca - Bax \end{array}\right\} = 0.$$

Zrównawfzy z zerém fummę wyrazów mnożących iedénże ftopién głofki x, będzie $B - A = 0$, $C - Aa - Ba = 0$, $a^4 - Aa^2 - Ca = 0$; fkąd wyciąga fię $A = \frac{a^2}{3}$, $B = \frac{a^2}{3}$, $C = \frac{2a^3}{3}$. A zatém będzie $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{\frac{a^2}{3} dx}{a - x} + \frac{\frac{a^2}{3} x dx + \frac{2a^3}{3} dx}{a^2 + ax + x^2}$. Całka piérwfzego z dwóch ułamków fkładaiących drugą część zrównania, ieft oczywifta ftąd co poprzédziło; drugiego zaś ułamku całka, znaydzie fię podług tego co naftępuie.

114. Jeżeli pomiędzy czynnikami drugiego ftopnia, znaydówać fię będą niektóre równe fobie, to na odpowiadanie każdéy wiązce czynników równych, trzeba złożyć ułamek takiéy poftaci, - - $\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots Qdx}{(ax^2 + bx + c)}$, gdzie n oznacza liczbę czynników $ax^2 + bx + c$, równych fobie.

Np. gdyby było zadano do fcałkówania, $\frac{x^4 + 5ax^3 + 4a^3x}{(aa + ax + xx)(x^3 - a^3)} dx$; znalezlibyśmy, że mianownik może bydź rozłożony na te trzy czynniki, $x - a$, $x^2 + ax + a^2$, i $x^2 + ax + a^2$. Niekufząc fię o rozłożenie tych oftatnich czynników na czynniki profte, które wypadłyby zmyślone, trzeba ie wziąść do użycia takie iakie wynikły z

pier-

piérwfzego rozłożenia; ale że fą fobie równe, przeto zamiaft dania ich z ofobna za mianowniki dwóm ułamkóm, daię mnogość ich $(x^2 + ax + a^2)^2$ za mianownika tylko iednemu ułamkowi, w którego liczniku wfzyftkie ftopnie głofki x, byłyby niżfze od naywyżfzego ftopnia téyże głofki położonéy w mianowniku; to ieft, iak w niniéyfzym przykładzie gdzie naywyżfzym ftopniém głofki x w mianowniku ieft x^4, wfzyftkie ftopnie téyże głofki x w liczniku powinny bydź niżfze od x^4. A zatém rozumiéć będziém $\frac{x^4 + 5ax^3 + 4a^3x}{(a^2 + ax + xx)(x^3 - a^3)} = \frac{Adx}{x - a} + \frac{Bx^3dx + Cx^2dx + Dxdx + Edx}{(aa + ax + xx)^2}$, a wynalázłfzy fpółczynników w fpofób wzwyż przepifany, zadana ilość fcałkuie fię iak naftępuie.

115. Teráz nieżoftaie nam więcéy, tylko pokazać iak całkuią fię takowe ilości. Powróćmy naprzód do piérwfzéy, która była, $\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$. Rozumiéymy ią, dla proftfzego wyrażenia, przyprowadzoną do téy poftaci, $\frac{A'xdx + B'dx}{x^2 + a'x + b'}$, co zawfze może bydź wykonano, rozdzieliwfzy górą i dolém przez a. Potém, trzeba wyrugówać drugi wyráz mianownika, zrobiwfzy $x + \frac{1}{2}a' = z$, fkąd będzie $x = z - \frac{1}{2}a'$,

z

a $dx = dz$; położywſzy te wártości w piérwſzém wyrażeniu, wypadnie ilość téy poſtaci, $\frac{Czdz + Ddz}{zz + qq}$; któréy piérwſza część $\frac{Czdz}{zz + qq}$, cáłkuie ſię przez logarytmy (99); a druga przez łuk koła, którego promiéniém byłoby q, a ſtyczną z.

Co zaś dotyczé ſię ilościów téy poſtaci $\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots Qdx}{(x^2 + ax + b)^n}$; w tych trzeba także wyrugówać drugi wyráz z mianownika, ſkąd wyniknie ilość takiéy poſtaci, $\frac{Mz^{2n-1}dz + Nz^{2n-2}dz + \ldots Tdz}{(zz + qq)^n}$, która ſcáłkuie ſię, uſiłuiąc naprowadzić cáłkę ſummy wyrazów w których z ma wykładniki parzyſte, uſiłuiąc ie mówię naprowadzić do tego wyrażenia $\frac{dz}{zz - qq}$ podług (103). Wyrazy zaś, w których wykładniki głoſki z byłyby nieparzyſte, ſcáłkuią ſię podług przepiſów wyżéy danych (68). A tak wſzelki ułamek niepiérwiaſtkowy, albo może bydź ſcáłkowany doſkonale, albo też naywięcéy kiedy zależy od łuków kołowych i od logarytmów.

O niektórych przemianach ułatwiaiących całkówanie.

116. W téy materyi niemożna podać reguł powſzechnych. Wéyźrzenie na ilości, wprawa, i zręczność, powinny w każdéy okazyi nauczyć co trzeba czynić. Zamiár przemian o których tu mówimy, ieſt tén, ażeby zadane różniczki zrobić niepiérwiaſtkowémi; bo te iuż wiémy iak ſię cáłkuią. Do czego mogą ſłużyć naſtępuiące uwagi.

117. Jeżeli ilości piérwiaſtkowe ſą tylko iednoſłowne, to naprzód trzeba im dać poſtać ilościów maiących wykładniki ułamkowe, które potém wſzyſtkie przyprowadzaią ſię do ſpólnego mianownika. Natènczas, ieżeli $x^{\frac{k}{l}}$, wyraża iednę z ilościów przygótowanych, to trzeba zrobić $x^{\frac{1}{l}} = z$; ſkąd wypadnie $x = z^l$, a $dx = lz^{l-1}dz$. Położywſzy takowe wártości zamiaſt piérwſzych, zadana ilość piérwiaſtkowa, przemiéni ſię w niepiérwiaſtkową.

Np. gdyby mi była zadana różniczka $\frac{dx\sqrt{x} + adx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$; napiſáłbym ią tak $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}$; potém przemiéniłbym ią w tę $\frac{x^{\frac{3}{6}}dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}$. Zrobiwſzy tedy $x^{\frac{1}{6}} = z$; miáłbym $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$; a zatém $\frac{6z^8dz + 6az^5dz}{z^4 + z^3}$, ilość, która wychodzi na $\frac{6z^5dz + 6az^2dz}{z + 1}$, i łatwo

da

da ſię ſcáłkówać podług tego co przepiſało ſię względem ułamków niepiérwiaſtkowych.

118. Wſzelka ilość, w któréy nie znayduie ſię tylko ieden piérwiaſtek wieloſłowny, nieprzechodzący drugiego ſtopnia, i w któréy głoſka odmiénna, położona pod znakiém piérwiaſtkowym, podobnież nieprzechodzi drugiego ſtopnia, takowa mówię ilość, może zawſze przemiénić ſię na ilość niepiérwiaſtkową, iednym z dwóch ſpoſobów naſtępuiących. 1od Oſwobodziwſzy kwadrat odmiénnéy położonéy pod znakiém piérwiaſtkowym, trzeba zrównać ténże piérwiaſtek z tąż odmiénną, pomnożoną albo zmniéyſzoną o inną głoſkę także odmiénną. 2re Albo téż, ilość okryta znakiém piérwiaſtkowym, rozkłada ſię na dwa czynniki; a tak rozłożona równa ſię z iednym z tych dwóch ſwóich czynników, rozmnożonym przez nową odmiénną.

Np. gdybym miał $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, mogę zrobić $\sqrt{(xx-aa)}=x-z$; ſkąd miałbym $x=\frac{zz+aa}{2z}$; więc $dx=\frac{(zz-aa)dz}{2zz}$, a $\sqrt{(xx-aa)}=\frac{aa-zz}{2z}=-\frac{(zz-aa)}{2z}$; a zatém

$\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}=-\frac{dz}{z}$, ilość łatwa do ſcáłkówania.

Mógłbym téż w tymże przykładzie, zrobić, $\sqrt{(xx-aa)}$, albo $\sqrt{[(x-a)(x+a)]}=(x-a)z$; a naténczas ſkwadrówawſzy, i rozdzieliwſzy przez $x-a$, miałbym $x+a=(x-a)zz$; ſkąd wnoſi ſię $x=\frac{a+azz}{zz-1}$; $\sqrt{(xx-aa)}=\frac{2az}{zz-1}$; $dx=\frac{-4azdz}{(zz-1)^2}$; więc $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}=\frac{-2dz}{zz-1}$, ilość, która całkuie ſię podług reguł wzwyż przepiſanych do ułamków niepiérwiaſtkowych.

Te ſpoſoby możnaby przyſtóſówać do ſproſtówania paraboli, któréy ſkładka $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ieſt, $\sqrt{\left(dy^2+\frac{4y^2dy^2}{p}\right)}$, albo $dy\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)}$. W tém wyrażeniu, trzeba naprzód oſwobodzić; y^2, piſząc $\frac{2dy}{p}\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+y^2\right)}$, a potém zrobić $\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+y^2\right)}=y+z$.

119. Kiedy w ilości zamkniętéy pod znakiém piérwiaſtkowym, niéma drugiego wyrazu, to piérwiaſtek można zrównać z nową odmiénną, rozmnożoną przez piérwſzą odmiénną.

Np. gdybym miał $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; mógłbym zrobić $\sqrt{(aa-xx)}=xz$. A choćby w w piérwiaſtku znaydował ſię i drugi wyráz, to ieſzcze możnaby użyć téy przemiany, wyrugówawſzy wprzód takowy drugi wyráz.

120. Naoſtatek, dla doświadczenia, czy zadana ilość niedałaby ſię przemiénić w niepiérwiaſtkową, można probówać, i zrównać niewiadomą, lub iakikolwiek związek niewiadoméy, z nową odmiénną albo z iakim związkiém nowéy odmiénnéy, w któréy zoſtać ſię powinno co nieokréślonego, ſłużyć maiącego do zamiaru naſzego.

Np. chcąc wiedzieć, w iakich przypadkach ilość $x^m dx(a+bx^n)^p$, może bydź przemiéniona w niepiérwiaſtkową; zrobiłbym $(a+bx^n)^p = z^q$, (gdzie, q, rozumié ſię bydź ilością nieokreśloną); ſkąd miáłbym $a+bx^n = z^{\frac{q}{p}}$; $x^n = \frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}$; $x = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; $x^m = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$; $dx = \frac{q}{npb} z\,dz \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$;

więc $x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p}+q-1} \times$
$dz.\left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}$, ilość, która mo-

że bydź ſcáłkówana, niech będzie q iakie chce, byleby $\frac{m+1}{n}-1$, było liczbą całą twiérdzącą albo zerém; i która bydź może przemiéniona w niepiérwiaſtkową, zrobiwſzy $q=p$, kiedy będzie $\frac{m+1}{n}-1$, liczbą całą przéczącą. A ieżeliby wártością głoſki p było $\pm\frac{k}{2}$, gdzie przez k rozumié ſię liczba cała nieparzyſta, to możnaby ilość naprowadzić do przypadku wyżéy wzmiankówanego (118), zrobiwſzy $q=k$, ieżeli $\frac{m+1}{n}$, ma na wártość $\pm\frac{k'}{2}$, gdzie k' rozumié ſię bydź liczba cała nieparzyſta.

121. Niemyślimy tu zabawiać ſię dłużéy przemianami tego rodzaiu, uważmy tylko, że częſtokróć można ułatwić pewne cáłkówania, zrównawſzy odmiénną z ułamkiém takim, iak $\frac{1}{z}$.

Np. gdybym miał $\frac{x^{15}dx+adx}{x^{20}+x^{18}}$; zrobiwſzy $x=\frac{1}{z}$, miáłbym $\frac{-z^3dz-az^{18}dz}{1+zz}$, ilość, daiąca rozłożyć ſię w rzęd ilości iednoſłownéy, przez rozdzielenie, i naprowadzić ſię do takiéy poſtaci $\frac{Adz}{1+zz}$, któréy całkę iuż teráz mamy znaiomą.

O cáłkówaniu ilościów wykładniczych.

122. Do cáłkówania ilościów tego rodzaiu, niémamy innych reguł, iak tylko próbówać ażeby ie rozłożyć na dwa czynniki, z których iedén byłby różniczką logarytmu drugiego czynnika, albo był iaką częścią iego ftateczną (28); a natenczas trzeba rozdziélić przez różniczkę logarytmu tego drugiego czynnika.

I tak widzę, że $x^y\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)$, da fię fcáłkówać; bo czynnik $dylx + \frac{ydx}{x}$, ieft różniczką wyrazu ylx, który ieft logarytmém ilości x^y; mieć tedy będę na cáłkę: $\dfrac{x^y\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)}{d(lx^y)} + C$; to ieft $x\dfrac{y\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)}{dylx + \frac{ydx}{x}} + C$, albo $x^y + C$. Taż fama reguła uczy mnie, że dxe^{ax} może bydź fcáłkówane; bo dx ieft różniczką logarytmu ilości e^{ax}, rodzieloną przez ilość ftateczną. Miéć tedy będę, $\int dxe^{ax} = \frac{dxe^{ax}}{adxle} = \frac{e^{ax}}{ale}$. W tén czas zaś kiedy e ieft liczbą maiącą za logarytm 1, reguła wychodzi na rozdzielenie różniczki zadanéy, przez różniczkę wykładnika głofki e.

Gdy-

Gdyby było zadano do fcáłkówania $x^m dxe^{ax}$, gdzie e rozumié fię bydź liczbą maiącą za logarytm 1, można to wykonać, ieżeli m ieft liczbą całą twiérdzącą, zróbiwfzy $\int x^m dxe^{ax} = e^{ax}(Ax^m + Bx^{m-1} + Ex^{m-2}$ + t. d. $+ k)$. *Np.* maiąc x^2dxe^{ax}, robię $\int x^2dxe^{ax} = e^{ax}(Ax^2 + Bx + E)$. Zróżniczkówawfzy (28), i rozdzieliwfzy przez dxe^{ax}, będzie $x^2 = \left\{\begin{matrix} Aax^2 + aBx + aE \\ + 2Ax + B \end{matrix}\right\}$; więc $Aa = 1$, $aB + 2A = 0$, $aE + B = 0$; to ieft $A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{-2}{aa}$, $E = \frac{2}{a^3}$; więc cáłką ilości $\int x^2dxe^{ax}$, ieft $e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C$. Liczby e, maiącéy za logarytm 1, można użyć bardzo pożytecznie do cáłkówania wielu ilościów, ofobliwie tych, co zawiéraią w fobie logarytmy.

Np. gdybym miáł $x^n dx(lx)^m$, zrobiłbym $lx = z = zle$; więc $x = e^z$, $dx = dze^z$; a zatém $x^n dx(lx)^m = z^m dze^{(n+1)z}$, ilość, która może bydź fcáłkówana, w tymże przypadku i tymże famym fpofobém, co poprzédzaiąca.

O cáłkówaniu ilościów o dwu lub więcéy Odmiénnych.

123. Przypomniawfzy fobie regułę wyżéy przepifaną, do różniczkówania ilościów z wielą odmiénnémi, łatwo z niéy wnieść fobie można, iż maiąc fcáłkówać ta-

 kokówe różniczki z wielą odmiénnémi (kiedy to ieſt rzeczą podobną), trzeba zgromadzić wſzyſtkie wyrazy zawiéraiące w ſobie różniczkę iednéyże odmiénnéy, i ſcałkówać ie, iak gdyby niebyło innéy odmiénnéy tylko ta, to ieſt iak gdyby wſzyſtkie inne wyrazy były ilościami ſtatecznémi. Natenczas, zróżniczkówawſzy takową całkę, biorąc z kolei za odmiénne, wſzyſtkie odmiénne, a wypadek odiąwſzy od zadanéy różniczki, wynaleziona całka (przydawſzy do niéy ſtateczną), będzie prawdziwą całką, ieżeli po odięciu nic niezoſtanie. Jeżeli zaś zoſtanie ſię reſzta, to takowa iuż niebędzie zawiérać w ſobie téy odmiénnéy, względém któréy całkowało ſię; z tą reſztą potém, należy tak obéyśdź ſię, iak w piérwſzym razie, i tak daléy względèm każdéy odmiénnéy.

Np. gdybym miał $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$; wyciągnąłbym z téy ilości dwa wyrazy zawiéraiące w ſobie dx, to ieſt, $3x^2ydx + y^5dx$, i ſcałkówałbym ie, iak gdyby y było ſtateczne; ſkąd miałbym $x^3y + y^5x$. Zróżniczkówawſzy tę całkę względém x i y, a wypadek odiąwſzy od różniczki zadanéy, nic mi niezoſtaie, ſkąd wnoſzę, że ſzukaną całką ieſt $x^3y + y^5x + C$.

Gdybym miał $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$; zgromadziwſzy wſzyſtkie wyrazy zawiéraiące w ſobie dx, biorąc y i z za ſtateczne, i ſcałkówawſzy, miałbym $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Lecz odiąwſzy różniczkę téy ilości, w któréyby x, y i z poczytane były za odmiénne, odiąwſzy ią mówię od różniczki zadanéy, zoſtaie mi y^2dy; biorę tedy całkę téy reſzty y^2dy, to ieſt $\frac{y^3}{3}$, dodaię ią do pierwſzéy całki, i mam na żądaną całkę (przydawſzy ſtateczną), $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$.

124. Lecz że niezawſze każda różniczka z wielą odmiénnémi, da ſię ſcałkówać, przeto nie od rzeczy będzie, przepiſać tu znaki, ſłużące do rozeznania kiedy to bydź może.

125. Tym końcém trzeba uważyć, że ieżeli w ilości Q, powiązanéy czyli poplątanéy iak ſię ſpodoba, z dwiema innémi ilościami x i y, położy ſię naprzód zamiaſt x ilość iakakolwiek p, a potém ieżeli w wypadku położy ſię zamiaſt y ilość q, rzecz wynidzie na to ſamo, iak gdyby naprzód położyło ſię było q zamiaſt y, a potém p zamia x; i to ieſt oczywiſta.

126. Stąd naſtępuie, że zróżniczkówawſzy ilość iakąkolwiek Q, złożoną z ilościów x, y i z ſtatecznych,

cznych, niebiorąc naprzód tylko ſamo x za odmiénną, a potém wynikły ſtąd wypadek znowu zróżniczkówawſzy, niebiorąc tylko ſamo y za odmiénną, rzecz wynidzie na to ſamo, iak gdyby w piérwſzém różniczkówaniu, poczytało ſię było y za odmiénną, a w drugiém, x.

Jakóż zmyślmy ſobie, że położywſzy naprzód $x + dx$ zamiaſt x, Q przemiéniło ſię w Q'; to na różniczkę wypadłoby $Q' - Q$. Zmyślmy ſobie znowu, że w tym wypadku, położywſzy $y + dy$ zamiaſt y, Q' przemiéniło ſię w Q'', a Q przemiéniło ſię w Q'''; tak że $Q' - Q$, zamiéniło ſię w $Q'' - Q'''$; to na drugą różniczkę wypadłoby $Q'' - Q''' - Q' + Q$. Poſtąpmy ſobie teráz w ſpoſób odwrotny; a ponieważ położywſzy $y + dy$ zamiaſt y, w ilości Q, Q przemiéniło ſię w Q''', więc na piérwſzą różniczkę wypadnie $Q''' - Q$, biorąc y za odmiénną. Teráz ieżeli w téy ilości położymy $x + dx$ zamiaſt x, Q przemiéni ſię w Q', iak wyżéy; a Q''' (125) w Q'', tak że $Q''' - Q$, zamiéni ſię w $Q'' - Q'$; więc drugą różniczką będzie $Q'' - Q' - Q''' + Q$, ilość, właśnie taż ſama co piérwéy.

To założywſzy na przód, pozwólmy na to, że ieżeli A wyraża ilość ſkładaiącą ſię z głoſek x i y, to $\frac{dA}{dy}dy$, wyrażać będzie różniczkę ilości A, w któréyby poczytało ſię za odmiénną ſamo y; a $\frac{dA}{dx}dx$, wyrażać znowu będzie różniczkę téyże ilości A, w któ-

któréy poczytałoby ſię za odmiénną ſamo x. Podobnież $\frac{ddA}{dxdy} \cdot dxdy$ wyrażać będzie, że naprzód zróżniczkówała ſię ilość A, poczytaiąc za odmiénną ſamo x, a potém zróżniczkówał ſię wypadek, poczytaiąc w nim za odmiénną ſamo y.

127. Na tych fundamentach, gdyby $Adx + Bdy$, była różniczka doſkonała, a M gdyby była iéy całka; to będzie $\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy = Adx + Bdy$; więc $\frac{dM}{dx} = A$, a $\frac{dM}{dy} = B$; więc także $\frac{ddM}{dxdy}dy = \frac{dA}{dy}dy$; a $\frac{ddMdx}{dydx} = \frac{dBdx}{dx}$; albo $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{dA}{dy}$, a $\frac{ddM}{dydx} = \frac{dB}{dx}$; lecz okazaliśmy dopiéro wyżéy (126), że $\frac{ddMdxdy}{dxdy} = \frac{ddMdydx}{dydx}$; więc $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{ddM}{dydx}$; więc także $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; to ieſt, że ieżeli $Adx + Bdy$ ieſt różniczką zupełną, to różniczka ilości A, w któréy ſamo y poczytałoby ſię za odmiénną, i rozdzieliłoby ſię przez dy, powinna równać ſię różniczce ilości B, w któréy ſamo x poczytałoby ſię za odmiénną, i rozdzieliłoby ſię przez dx.

I tak poznaię, że $\frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$, ieſt różniczką zupełną; bo $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$. Jakóż piérwſza część zrównania wychodzi na $\frac{y^2dy}{dy}$, a druga na $\frac{y^2dx}{dx}$. Przeciwnie widzę, że $xydx + 2xdy$, nieda ſię ſcałkować; bo różniczka $\frac{d(xy)}{dy}$, nierówna ſię różniczce $\frac{d(2x)}{dx}$.

128. Jeżeli w różniczkę zadaną wchodzi więcéy nad dwie odmiénne, to ieſt, ieżeliby była téy poſtaci, $Adx + Bdy + Cdz$, to ażeby takowa ilość mogła bydź ſcałkowana, trzeba aby było $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Jakóż można uważać koléyno z, y i x iako ſtateczne, a różniczka która w takim razie niemiałaby tylko dwa wyrazy, (bo z pozwolonego przypuſzczenia wynika albo $dz = 0$, albo $dy = 0$, albo też $dx = 0$), ta różniczka mówię, niémniéy powinna bydź różniczką zupełną, ieżeli różniczka zadana ieſt taką; więc w każdym z tych przypadków, powinna mieć własności różniczek zupełnych o dwu odmiénnych. Podług tego. łatwo będzie wynaléśdź ſobie warunki ſtóſówne większéy liczbie odmiénnych.

O zrównaniach różniczkówych.

129. Kiedy zadane zrównanie różniczkowe, niezawiéra w ſobie tylko dwie odmiénne x i y; i kiedy w iednéy części zrównania znayduie ſię bydź położone x i dx, a w drugiéy y i dy; to natenczas całkówanie każdéy części wykonywa ſię, podług reguł przepiſanych do różniczek z iedną odmiénną.

I tak, gdyby było $ax^my^ndx = by^qx^rdy$; wyrażenie mogące nam oznaczać wſzelkie zrównania różniczkówe o dwu wyrazach; to takowe zrównanie, w którém głoſki nieokréślone, zaráz oddziélaią ſię po rozdzieleniu przez y^n i przez x^r, przemiéni ſię w to, $ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$; a całką iego oczywiście będzie $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C$.

130. Ale ponieważ trafić ſię może, że iedna albo druga albo też obie części zrównania różniczkowego, maiącego iuż w poméniony ſpoſób oddzielone głoſki odmiénne, niedadzą ſię ſcałkować Algebraicznie, lubo zrównanie może bydź Algebraiczne, albo przynaymniéy może bydź naprowadzone do poſtaci Algebraicznéy, przeto niebędzie od rzeczy zaſtanowić ſię tu nad témi przypadkami, które zdarzaią ſię nayczęściéy.

Np.

Np. gdybyśmy mieli w zrównaniu poprzèdzaiącém, $m - r = -1$, i $q - n = -1$, zrównanie różniczkowe wyſzłoby na $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$, którego każdéy części niémożna miéć inaczéy całki, tylko przez logarytmy, tak iż będzie $alx = bly + lC$. * Lecz to zrównanie może przemiénić ſię na Algebraiczne, napiſawſzy go tak, $lx^a = ly^b + lC$, albo $lx^a = lCy^b$; iawna zaś ieſt, że ieżeli dwa logarytmy ſą ſobie równe, to i dwie ilości onym odpowiadaiące, muſzą także bydź ſobie równe; więc będzie $x^a = Cy^b$; zrównanie Albraiczne.

Gdyby zaś było tylko $q - n = -1$, to zrównanie różniczkowe, wyſzłoby na $ax^{m-r}dx = \frac{bdy}{y}$, którego całką ieſt . . $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = bly + lC$; ale temu zrównaniu można dać poſtać Algebraiczną, rozmożywſzy piérwſzą część przez le, gdzie e oznacza liczbę maiącą za logarytm 1; bo tym ſpoſobém w zrównaniu nic ſię nieodmiéni. Będzie tedy $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1}\,le - bly + lC$, albo (zrobiwſzy $m - r + 1 = p$), będzie $le^{\frac{ax^p}{p}} = lCy^b$; a zatém $e^{\frac{ax^p}{p}} = Cy^b$. Odtąd zawſze oznaczać będziémy przez e, liczbę maiącą za logarytm 1.

* *Wolno nam ieſt, przydaną ſtateczną rozumiéć bydź logarytmém.*

131. Obierzmy ſobie na drugi przykład zrównanie $ndx = \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$; druga część wyraża ſkładkę łuku kołowego, w którém z byłoby wſtawą, a 1 promiéniém; z tedy ieſt wſtawą ilości $\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$, to ieſt ilości $\int ndx$, albo ilości $nx + C$. A zatém wypadnie na całkę, $z =$ wſt. $(nx + C)$. Takóż, z zrównania $ndx = \frac{-dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$, wnioſłoby ſię $z =$ doſt. $(nx + C)$.

132. Podobnież, ponieważ $\frac{dz}{1 + zz}$, wyraża ſkładkę łuku kołowego, w którém z byłoby ſtyczną, a 1 promiéniém; więc gdyby było $ndx = \frac{dz}{1 + zz}$, wnioſłoby ſię $z =$ ſtycz. $(nx + C)$. Lecz maiąc $ndx = \frac{bdz}{a + fzz}$; żeby to zrównanie naprowadzić do poſtaci poprzédzaiącéy, trzebaby zrobić $z = mu$, gdzie przez m rozumié ſię ſpółczynnik ſtateczny; naténczas, byłoby $ndx = \frac{bmdu}{a + fm^2u^2}$; a rozumieiąc znowu $fm^2 = a$, byłoby $m = \sqrt{\frac{a}{f}}$; a zatém $ndx = \frac{\sqrt{\frac{a}{f}}\,du}{a + auu}$; ſkąd wyciąga ſię $\frac{du}{1 + uu} = \frac{n}{b}\,dx\sqrt{af}$; więc u, albo $\frac{z}{m}$, albo $z\sqrt{\frac{f}{a}} =$ ſtycz. $(\frac{n}{b}x\sqrt{af} + C)$. Więc $z = \sqrt{\frac{a}{f}}$. ſtycz. $(\frac{n}{b}x\sqrt{af} + C)$.

133. W wyrażeniach, wſt.$[(nx + C)$, ſtycz. $(nx + C)$ dopiéro wynalezionych, $nx + C$ oznacza długość bezwzględną łuku, wyrażoną w częściach promiénia 1. Ale że wygodniéy ieſt używać liczby ſtopniów, aniżeli ſamych długościów, przeto kiedy zdarzą ſię takowe wyrażenia, trzeba oſzacówać łuki na ſtopnie, w czém niéma żadnèy trudności, rozdzieliwſzy przez liczbę części promiénia, zawartych w iednym ſtopniu, to ieſt przez .. 0,0174533, albo (co na iedno wychodzi), rozmnożywſzy przez . 57,2974166.

I tak wſtawa łuku, którego długość byłaby wyrażona przez b, albo wſtawa łuku maiącego za miarę liczbę ſtopniów, wyrażoną przez $b \times 57{,}2974166$, oba wyrażenia znaczą też ſamę rzecz.

134. Gdybyśmy mieli $\dfrac{ndx}{\sqrt{(1-xx)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, zrównanie w którém dwie części, wyrażaią ſkłádki dwóch łuków, maiących ſię iedén do drugiego : : $1 : n$, i których wſtawami ſą x i y. Zeby ſcałkówać to zrównanie, trzeba obie części naprowadzić do poſtaci niepiérwiaſtkówèy, zrobiwſzy, co do piérwſzéy części, $\sqrt{(1-xx)} = x\sqrt{(-1)} - z$; a co do drugiéy, $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{(-1)} - t$. Natènczas poprzedzaiące zró-

zrównanie przemiéniłoby ſię w to, $\dfrac{ndz}{z} = \dfrac{dt}{t}$; którego całką ieſt, $nlz = lt + lC$, ſkąd wyciąga ſię $Ct = z^n$; a położywſzy zamiaſt z i t onych wártości, będzie $C[y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-xx)}]^n$; zrównanie wyrażaiące w powſzechności ſtóſunek między wſtawami x i y dwóch łuków wielokrotnych iedén względém drugiego.

Ale chcąc użyć tego zrównania, trzeba wprzód naznaczyć wártość ſtateczněy C. Rozumiéymy tedy, (iako nam to ieſt wolno), że te dwa łuki maią ténże ſam początek; a w takim razie x i y powinny bydź razém zerami; lecz w tym przypadku, zrównanie przemiénia ſię w to, $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, albo $-C = (-1)^n$; wyráz zaś $(-1)^n$, ieſt wárt $+1$ albo -1, podług tego iak n będzie liczbą parzyſtą albo nieparzyſtą, więc będzie $-C = \pm 1$, i $C = \mp 1$; gdzie znak wyżſzy ſłuży do przypadku, kiedy n ieſt liczbą parzyſtą; a niżſzy, kiedy toż n byłoby liczbą nieparzyſtą, więc naoſtatek będzie $\mp[y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}^n$.

W każdym przypadku ſzczególnym, można zawſze wyrugówać ilości zmyślone; ale żeby to wykonać nayproſtſzą drogą, trzeba, (po przeſtawiéniu wſzyſtkiego do iednéy części), zrównać z zerém ſummę ilościów rzetelnych; naténczas pokaże ſię, że pozoſtałe zrównanie będzie rozdziélne przez $\sqrt{(-1)}$, i będzie toż ſamo, co owo które wynikło z porównania z zerém ſummy ilościów rzetelnych. *Np.* zrobiwſzy $n = 2$, będzie $-y\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-yy)} = -xx - 2x\sqrt{(-1)}$. $\sqrt{(1-xx)} + 1 - xx$, albo $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1$

+

$+ 2x\sqrt{-1}\,.\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$; a porównawſzy z zérèm ſummę iłośćiow rzetelnych, będzie $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$; tak że całe zrównanie wynidzie na $2x\sqrt{(-1)}\,.\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{(-1)} = 0$; króre będąc rozdzielone przeż $\sqrt{(-1)}$, da $2x\sqrt{(1-xx)} - y = 0$, albo $y = 2x\sqrt{(1-xx)}$; ſkwadrowawſzy zaś to zrównanie, i to drugie $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$, albo raczéy $\sqrt{(1-yy)} = 1 - 2xx$, mieć będziém ténże ſam wypadek,

Można także tymże ſpoſobém wynaléśdź doſtawy i ſtyczne łuków wielokrotnych. Co ſię dotyczé tych oſtatnich, dałoby ſię ſcałkówać zrównanie $\frac{ndx}{1+xx} = \frac{dy}{1+yy}$, rozłożywſzy $1+xx$ na $(1+x\sqrt{-1})(1-x).\sqrt{(-1)}$, a $1+yy$ na $(1+y\sqrt{-1})(1-y\sqrt{-1})$; z reſztą trzeba ſobie poſtąpić, iak przepiſało ſię względém ułamków niepiérwiaſtkówych.

135. Kiedy iuż przypadliśmy do téy matéryi, pokażmy za iedną drogą ſpoſób, w iaki wyraża ſię wſtawa i doſtawa łuku, co nam może bydź przydatno.

Niechay tedy będzie $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, zrównanie wyrażaiące ſtóſunek między łukiém x i iego wſtawą y. Jeżeli zrobimy $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - z$, to będzie $dx = \frac{-dz}{z\sqrt{(-1)}}$, albo $\frac{dz}{z} = -dx\sqrt{(-1)}$, zrównanie, którego całką ieſt, $lz = -x\sqrt{-1} + lC$, albo $lz = -x\sqrt{-1}\,le + lC$; ſkąd wnoſi ſię $z = Ce^{-x\sqrt{(-1)}}$; a położywſzy zamiaſt z wár-

tość onego, będzie $y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)} = Ce^{-x\sqrt{(-1)}}$. Co ſię dotyczé ſtatecznéy C, ta wynaydzie ſię, uważywſzy, że łuk x i iego wſtawa powinny wráz ſtawać ſię zerém; co nam daie $-\sqrt{1} = C$; więc $y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)} = -e^{-x\sqrt{(-1)}}$; a zatém $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{(-1)} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$; po ſkwadrówaniu i po zebraniu będzie $y = \frac{1-e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{(-1)}\,.\,e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; więc ponieważ y ieſt wſtawą łuku x, będzie, wſt. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{-1}}$.

Jeżeli w drugiéy części zrównánia $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$, położymy zamiaſt y wártość iego dopiéro wynalezioną, to mieć będziém $\sqrt{(1-yy)}$ to ieſt doſt. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2} + e^{-x\sqrt{(-1)}} = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$; więc doſt. $x = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$. A teráz powróćmy nazád do cálkówania zrównań.

136. Kiedy ilości nieokreślone w zadaném zrównaniu różniczkowém, nieſą oddzielone w oſobnych częściach, to naténczas wprzód nim przed-

przedſięwezmie ſię takowe oddzielénie, trzeba ſpróbówać, ieżeli iakim przypadkiém, zrównanie niedałoby ſię ſcáłkówać w tym ſtanie w iakim znayduie ſię. To zaś można rozeznać podług (127), uważywſzy ieżeli $\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy}$, rozumieiąc że $Adx + Bdy = 0$, wyraża takowe dane zrównanie. Jeżeli tén warunek ma miéyſce, to z cáłkówaniém trzeba obéyśdź ſię podług przepiſu (123).

137. Atoli mogłoby zdarzyć ſię, że tén warunek niebędzie miáł miéyſca, a zrównanie iednak niemniéy przeto podpadać będzie ſcáłkówaniu; kiedy rozmnoży ſię przez czynnika przyzwoitego, złożonego z x z y i z ſtatecznych.

Niechay będzie P, takim czynnikiém. Naténczas $APdx + BPdy = 0$, muſi bydź różniczką doſkonałą. Trzeba tedy ażeby było $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. A zatém cała rzecz od tego zależy, ażeby na wártość czynnika P, wynaléśdź taki związek ſkładaiący ſię z x, z y i z ſtatecznych, któryby uczynił zadość temu zrównaniu. A że to potrzebuie długiego ſzpérania i rozbioru; przeto przeſtaniémy tú na ſzukaniu téy wártości P, tylko w takim przypadku, kiedy

tén

tén czynnik ſkładać ſię ma z ſamych x i z ſtatecznych tylko, albo téż z ſamych y i z ſtatecznych tylko. Daymy tedy że P niéma zawiérać w ſobie tylko ſame x; naténczas będzie proſto $P\frac{dA}{dy} = B\frac{dP}{dx} + P\frac{dB}{dx}$; ſkąd wyciąga ſię $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)}{B} dx$; a zatém łatwo będzie można miéć P, ieżeli $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$, wychodzi na iaki związek głoſki x, iak tego trzeba, kiedy ma bydź, podług przypuſzczenia, związkiém saméy tylko głoſki x.

Można ieſzcze znaléśdź tego czynnika, ieżeliby miáł ſkładać ſię z związku głoſki x, rozmnożonego albo rozdzielonego przez związek głoſki y, znaioméy poſtaci.

138. I tymto ſpoſobém, można powſzechnie ſcáłkówáć wſzelkie zrównanie takiéy poſtaci, $Xy^q dy + X'y^{q+1} dx + X''y^r dx = 0$, gdzie przez X, X', X'' ſą oznaczone iakiekolwiek związki głoſki x; a przez q i r wykładniki także iakiekolwiek.

Mógłbym próbówać, czy to zrównanie podpada ſcáłkówaniu, mnożąc przez czynnika takiéy poſtaci Py^n; gdzie P rozumié ſię bydź związkiém głoſki y, a n wykładni-

 kiém

kiém nieokréślonym; i ználázłbym że to bydź może, rozumieiąc $n = -r$. Ale prościéy będzie naprowadzić zaráz zrównanie do téy poſtaci, $y^{q-r}dy + Fy^{q-r+1}dx + F'dx = 0$, rozdzieliwſzy przez X i przez y^r, a wielorazy $\frac{X'}{X}$ i $\frac{X''}{X}$ oznaczywſzy przez F i F. Naténczas żeby ſcáłkówać to zrównanie, rozumiém P bydź czynnikiém, złożonym z związku głoſki x. Miéć tedy będę $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx + F'Pdx = 0$. Lecz ieżeli P, ieſt związkiém głoſki x, to $F'P$ także nim będzie; a zatém $\int F'Pdx$, przypada do ſpoſobu cáłkówania ilościów z iedną odmiénną. Nieidzie tedy o nic więcéy, tylko ażeby $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx$ zrobić różniczką doſkonałą; do tego zaś trzeba, ażeby było $\frac{d(Py^{q-r})}{dx} = \frac{d(FPy^{q-r+1})}{dy}$; to ieſt, ażeby było $y^{q-r}\frac{dP}{dx} = (q-r+1) \times y^{q-r}FP$; ſkąd wyciąga ſię $\frac{dP}{P} = (q-r+1).Fdx$; a ſcáłkowawſzy, $lP = \int(q-r+1)Fdx = \int(q-r+1)Fdx.le$; więc $P = e^{\int(q-r+1)Fdx}$. Położywſzy tę wártość czynnika P w zrównaniu $Py^{q-r}dy +$ t. d. i ſcáłkówawſzy, będzie

$$\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}e^{\int(q-r+1)Fdx} + \int F'dx \times e^{\int(q-r+1)Fdx} + C = 0.$$

W cáłkówaniu zrównania z którego wynikło P, nieprzydaliśmy ſtatecznéy, bo niemaiąc żadnego warunku ſłużącego do naznaczenia iéy, wolno nam było poczytać ią za nic.

Obierzmy ſobie iaki przykłád, i daymy że ma bydź ſcáłkówano $dy + \frac{aydx}{x} + (bx^2 + cx + f)dx = 0$. Rozmnożywſzy przez czynnika P, miéć będziém, $Pdy + \frac{ayPdx}{x} + P(bx^2 + cx + f)dx = 0$; trzeba tedy ażeby było $\frac{dP}{dx} = \frac{d\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x}$; więc $\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$; więc $lP = alx$, albo $P = x^a$. Zrównanie tedy przemiénia ſię na to, $x^a dy + ax^{a-1}ydx + bx^{a+2}dx + cx^{a+1}dx + fx^a dx$, którego cáłką ieſt, $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = 0$.

139. Zrównanie powſzechne dopiéro ſcáłkówane, trafia ſię doſyć częſto; a ſpoſób którego śmy tu użyli może ſłużyć w wielu innych przypadkach.

Np. gdybyśmy mieli te dwa zrównania, $dx + ady + (bx + cy)Tdt = 0$, $kdx + a'dy + (b'x + c'y)Tdt = 0$, gdzie przez x, y, i t, ſą oznaczone trzy odmiénne, przez a, b, c, a' i. t. d. ilości ſtateczne, a przez T, związek iakikolwiek głoſki t; ſcáłkówanie tych dwóch zrównań możnaby naprowadzić do ſpoſobu poprzédzaiącego, iak naſtępuie. Mnożę iedno z tych dwóch zrównań, *np.* piérwſze,

wſze, przez ſpółczynnika nieokreślonego a ſtatecznego g; i dodawſzy takowe piérwſze zrównanie z drugiém, mnożę wſzyſtko przez czynnika P, którego rozumiém bydź iakim związkiém głoſki t; ſkąd miéć będę, $(gP + kP)dx + (gaP + a'P)dy + [(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]\, Tdt = 0$. Teráz daymy że to zrównanie ieſt doſkonałą różniczką; to trzeba podług (128). ażeby było 1ód - -

$$\frac{d(gP + kP)}{dt} = \frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dx} T;$$ 2re

$$\frac{d(gaP + a'P)}{dt} = \frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dy} T;$$

3cie $\frac{d(gP + kP)}{dy} = \frac{d(gaP + a'P)}{dx}$. Lecz rozumieiąc P bydź związkiém głoſki t, to oſtatnie zrównanie ma miéyſce, bo wychodzi na $0 = 0$; a dwa piérwſze daią, $(g + k)\frac{dP}{dt} = (gb + b')\, PT$, i $(ga + a')\frac{dP}{dt} = (gc + c')\, PT$; ſkąd wyciąga ſię $\frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k}\, Tdt$ i $\frac{dP}{P} = \frac{gc + c'}{ga + a'}\, Tdt$; więc zrównawſzy z ſobą te dwie wártości ilości $\frac{dP}{P'}$ i rozdzieliwſzy przez Tdt, będzie $\frac{gb + b'}{g + k} = \frac{gc + c'}{ga + a'}$, zrównanie, w którem g znaydzie ſię bydź podnieſione do drugiego ſtopnia, i które po rozwiązaniu da na tóż g dwoiaką wártość.

Rozumieiąc tedy g, iuż znaiome, łatwo będzie można wynaléśdź P; bo zrównanie $\frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k}\, Tdt$, daie $P =$ - - e

$e^{\int \frac{gb + b'}{g + k} Tdt}$.

Lecz ponieważ zrównanie $(gP + kP)dx +$ t. d. iuż teráz ieſt doſkonałą różniczką, więc ſcáłkówawſzy go, będzie $(gP + kP)x + (gaP + a'P)y + C = 0$; a zatém ieżeli g oznacza piérwſzą wártość głoſki g, wypadłą z zrównania drugiego ſtopnia - - wzwyż wzmiankówanego. oznaczywſzy przez g' drugą wártość tegóż g, a przez P' oznaczywſzy to w co przemiénia ſię P, położywſzy g' zamiaſt g, miéć będziém, $(g'P' + kP')x + (g'aP' + a'P')y + C' = 0$, gdzie C' wyraża nową ſtateczną. Jakóż niéma tu żadnéy przyczyny, któraby nas przymuſzała do użycia raczéy téy aniżeli owéy z dwóch wártościów głoſki g. A dopiéro z tych dwóch zrównań łatwo będzie wyciągnąć wártości głoſek x i y, króre znaydą ſię bydź wyrażone w t i w ſtatecznych.

140. Kiedy dane zrównanie różniczkowe, nieprzypada do żadnego z przypadków dotąd opiſanych, to w takim razie trzeba uważyć, ieżeli ilości nieokréślone niedałyby ſię rozłączyć. Częſtokroć nietrzeba do tego więcéy, tylko użyć pospolitych reguł Algebraicznych; czaſém zaś trzeba ſię udać do przemian. Atoli bywa wiele takowych zrównań, względém których, niémożna wiedzieć iaka odmiana właśnie byłaby przyzwoita.

Zrównanie $ax^n dx + by^q x^n dx = y^k dy \times (e + fx^h)^r$, rozłącza ſię proſto przez rozdzielenie; bo wychodzi na toż ſamo, co $(a + by^q) x^n dx = y^k dy (e + fx^h)^r$, które przemiénia ſię, na $\frac{x^n dx}{(e + fx^h)^r} = \frac{y^k dy}{a + by^q}$; a tego całka, zależy od iłościów dwuſłownych z iedną odmiénną.

Gdybym zaś miał, $gxdx = ax^4 ydy + 2abx^2 y^3 dy + abby^5 dy$; naprzód łatwo poſtrzégam, że to zrównanie mogę tak napiſać, $gxdx = (x^4 + 2bx^2 y^2 + bby^4)\, aydy$; a potém widzę iż mogę dać mu tę poſtać, $gxdx = (x^2 + by^2)^2 \times aydy$. A tu dołożywſzy cokolwiek uwagi, rozeznawam że mi uda ſię rozłączenie, ieżeli zrobię $x^2 + by^2 = z$; iakóż naténczas miéć będę $x^2 = z - by^2$, i $xdx = \frac{1}{2}dz - bydy$; więc używſzy tych wártościów, będzie $\frac{1}{2}gdz - bgydy = azzydy$. Zrównanie, z którego wyciąga ſię, $\frac{\frac{1}{2}gdz}{bg + azz} = ydy$, co łatwo da ſię ſcałkówać.

141. Ponieważ do takowych przemian niémożna przepiſać reguł powſzechnych, przeto przeſtaniémy tu tylko na niektórych przypadkach ogólnych, w których wiadomo ieſt że rozłączenie udaie ſię.

Ogołém, rozłączenie może miéć miéyſce w wſzelkich zrównaniach iednorodnych o dwu odmiénnych; to ieſt

ieſt w takich gdzie dwie nieokreślone x i y, czyto znayduiące ſię razém czy téż położone oſobno, w każdym wyrazie maią iednakową ſummę wymiarów.

Jakóż zmyślmy ſobie że $Adx + Bdy = 0$, ieſt zrównaniém iednorodném, rozdzieliwſzy wizyſtko przez ſtopień głoſki x, taki ażeby wykładnik iego równał ſię liczbie oznaczaiącéy wymiary zrównania, łatwo daie ſię poymówać, że w czynnikach A i B, znaydówać ſię niebędą tylko ſtopnie ilości $\frac{y}{x}$, i ſtateczne; tak iż zrównanie wynidzie, na $Fdx + F'dy = 0$, gdzie F i F' rozumieią ſię bydź złożone z związków ilości $\frac{y}{x}$ i z ſtatecznych. To założywſzy naprzód, ponieważ $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xx}$, więc będzie $dx = \frac{-xx}{y} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{y} dy$; więc zrobiwſzy $\frac{y}{x} = z$, będzie $dx = -\frac{ydz}{zz} + \frac{dy}{z}$; położywſzy tedy zamiaſt $\frac{y}{x}$ i zamiaſt dx onych wártości, będzie $-\frac{Fydz}{zz} + \frac{Fdy}{z} + F'dy = 0$, gdzie czynniki F i F' rozumieią ſię teráz bydź złożone z związków głoſki z i z ſtatecznych. Skąd wnoſi ſię $\frac{dy}{y} = \frac{Fdz}{Fz + F'zz}$,

zró-

zrównanie wcale rozłączone, bo czynniki F i F' niezawiéraią w ſobie innéy odmiénnéy tylko z.

Np. gdybym miál $y^3dx + y^2xdy + bx^3dy = 0$, zrównanie iednorodne, w którém liczbą wymiarów ieſt 3; rozdzieliłbym przez x^3, i miálbym $\frac{y^3}{x^3}dx + \frac{y^2}{x^2}dy + bdy = 0$; zrobiwſzy tedy $\frac{y}{x} = z$, albo $x = \frac{y}{z}$, miálbym $dx = \frac{zdy - ydz}{zz}$; a położywſzy te wártości w zrównaniu zadaném, wypadnie mi, $z^2dy - yzdz + z^2dy + bdy = 0$; ſkąd wyciągam $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{2z^2 + b}$, zrównanie, którego cálką ieſt $ly = \frac{1}{4}l(2z^2 + b) + lC$, a zatém będzie $y = C(2z^2 + b)^{\frac{1}{4}}$, albo $y^4 = C^4(2z^2 + b)$, albo naoſtatek $y^4 = C^4\left(\frac{2y^2}{x^2} + b\right)$, położywſzy nazád zamiaſt z wártość iego $\frac{y}{x}$.

142. Byłoby tedy rzeczą pożyteczną, gdyby można było każde zrównanie zrobić iednorodném. Ale na to niéma ſpoſobu powſzechnego; trzeba tylko uciekać ſię do przemian. Spomiędzy których te co obiecuią pomyślny ſkutek, zależą na tém, ażeby iednę z odmiénnych, albo związek iaki téy odmiénnéy, albo téż związek obu odmiénnych zrównać z nową od-

odmiénną, maiącą wykładnika nieokreślonego. Potém takowe wykładniki wynayduią ſię przy pomocy tego warunku, aby zrównanie przemiénione było iednorodném.

Np. maiąc zrównanie, $ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = 0$, w ktorém może bydź wyrażone w powſzechności wſzelkie zrównanie o trzech wyrazach, gdybym chciál dóyśdź w iakich przypadkach, dałoby ſię uczynić iednorodném, zrobiłbym $x = z^h$; a tak miálbym $ahz^{mh+h-1}dz + by^n z^{qh}dy + cy^k dy = 0$. Lecz kiedy to zrównanie ma bydź iednorodném, trzeba ażeby było $k = qh + n$, i $k = mh + h - 1$, ſkąd wyciąga ſię $h = \frac{n+1}{m-q+1}$, i $k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$, a zatém ieżeli wykładniki k, q, m i n ſą takie, że to oſtatnie zrównanie może mieć miéyſce, to zadane zrównanie można uczynić iednorodném, a zatém można w niém rozłączyć głoſki odmiénne.

O Ilościach i o Zrównaniach różniczkówych drugiego, trzeciego i. t. d. *porządku.*

143. Wolność którą mamy (19), obrać ſobie w różniczkówaniu za ſtateczną iednę którąkolwiek z różniczek piérwſzych, do ułatwiénia cálkówania w wielu przypadkach może nam znacznie dopomodz

módz. Ale ponieważ przytrafić się może, że w różniczkówaniu obierze się za ſtateczną taka różniczka, która nieieſt nayſpoſobniéyſzą do tego końca, przeto naprzód pokazać mamy, iakim ſpoſobém, zrównanie różniczkowe, w którém poczytała się za ſtateczną ta lub owa różniczka, naprowadzić do innego zrównania, niémaiącego żadnéy ſtatecznéy; a potém wolno będzie poczytać ſobie za ſtateczną, którą się z nich ſpodoba.

Niech będzie $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddy = 0$, zrównanie różniczkowe o dwu odmiénnych, drugiego porządku, w którém piérwſza różniczka dx iednéy z odmiénnych, poczytała się za ſtateczną. Takowe zrównanie rozdzieliwſzy przez dx, trzeba go tak napiſać, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + Dd\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, które w rzeczy ſaméy ieſt toż ſamo co piérwſze; bo kiedy dx rozumié się bydź ſtateczne, to muſi bydź $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ddy}{dx}$. Lecz niechcąc żeby dx było ſtateczne, to naténczas muſi bydź $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - yddx}{dx^2}$; zrównanie tedy przemiénia się na $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = 0$, w którém iuż niéma żadnéy różniczki ſtatecznéy.

Niech

Niech znowu będzie $Adx^3 + Bdx^2dy + Cdy^2dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = 0$, zrównanie różniczkówe trzeciego porządku, w którém dx rozumiało się zawſze ſtateczne. Trzeba rozdzielić przez dx^2, co da, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\frac{dy^3}{dx^2} + E\frac{ddy}{dx} + F\frac{dyddy}{dxdx} + G\frac{d^3y}{dx^2} = 0$, zrównanie, daiące się napiſać w tén ſpoſób, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + Ed\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right) + Gd\left[\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$; gdzie w różniczkówaniach wſkazanych poczytawſzy wſzyſtko za odmiénne, powſtanie ſtąd nowe zrównanie, niezawiéraiące w ſobie żadnéy różniczki ſtatecznéy.

Przyſtóſuymy to do przykładu. Niechay będzie $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, zrównanie, w którém dx poczytało się za ſtateczne. Na piérwſze weyźrzenie niewidać iakby to zrównanie mogło bydź ſcałkówane, ale kiedy poczytamy dx za odmiénną, piſząc, $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx)d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, to w różniczkówaniu wſkazaném, możemy wziąść za ſtateczną dy, ſkąd miéć będziém, $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = -(adx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$, a po zebraniu, będzie, $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = 0$, zrównanie, którego całką ieſt, (iak łatwo widzieć się daie), $xdx + adx - ydy + Cdy = 0$, przydawſzy ſtateczną Cdy tegóż porządku co całka. To zrównanie znowu powtórnie ſcałkowane, da naoſtatek $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C' = 0$.

144.

144. Reguła wyżéy podana (123), do cáłkówania ilościów różniczkówych z wielą odmiénnémi, ſłuży do wſzyſtkich ilościów różniczkowych wſzelakiego porządku, poczytawſzy różniczki ddx, ddy, d^3x, d^3y, i. t. d. za tyleż różnych odmiénnych.

I tak gdyby było zadano ſcáłkówać $x^3y^2ddy + 2x^3ydy^2 + (2x^2y + 3y^2x^2)\,dxdy + 2y^2xdx^2$, ilość w któréy dx poczytało ſię za ſtateczne; ſcáłkówáłbym naprzód poczytawſzy ſamo ddy za odmiénną, i miáłbym x^3y^2dy. Potèm biorę różniczkę tèy ilości ſcáłkówanéy, którą ieſt $3x^2y^2dxdy + 2x^3ydy^2 + x^3y^2ddy$, i odéymuię ią od różniczki zadanéy, ſkąd na reſztę miéć będę $2x^2ydxdy + 2y^2xdx$. Cáłkuię znowu, poczytaiąc za odmiénną ſamo y, i wypada mi x^2y^2dx. Różniczkuię tę ilość, i odéymuię od piérwſzéy reſzty, różniczkę $2x^2ydydx + 2x^2y^2dx$ ſtąd wynikaiącą; ponieważ nic mi niezoſtaie, wnoſzę ſtąd, że cáłką ilości zadanéy, ieſt $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx$, przydawſzy ſtateczną Cdx tegóż porządku co cáłka.

145. Co ſię tyczé zrównań różniczkówych, te cáłkuią ſię podobnież, kiedy to bydź może w takim ſtanie w iakim ſą zadane; co poznaie ſię po tém, ieżeli przyſtępuiąc do cáłkówania, iak powiedziało ſię dopiéro wyżéy, na oſtatnią reſztę wypada żero.

Ale

Ale chociażby oſtatnia reſzta niebyła zerém, to iednakże nienależałoby ieſzcze ſtąd ſobie wnoſić o niepodobiéńſtwie ſcáłkówania. Bo iż nieznoſi ſię równość, mnożąc albo dzieląc obie części zrównania przez też ſamę ilość, dla tego może znaléśdź ſię taka ilość, przez którą będąc rozmnożone zrównanie, uczyni ſię ſpoſobném do ſcáłkówania. Wynaleziénie wzmiankowanego czynnika w ſpoſób powſzechny, ieſt taką rzeczą, którą tu zatrudniać ſię nièmożemy. Przychodzi ſię do znaleziènia go w wielu przypadkach doſyć rozległych, ale my przeſtaniémy tylko na tém, iż damy poięcie iak ſobie trzeba poſtąpić tylko w iednym przypadku, częſto zdarzaiącym ſię w Zagadniéniach Fizyczno-Matematycznych. Idzie tu o zrównanie takiéy poſtaci, $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$, albo $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, albo w powſzechności $d^ny + ad^{n-1}ydx + bd^{n-2}ydx + \ldots mydx^n + Xdx^n = 0$, gdzie dx rozumié ſię bydź ſtateczne, a, b, c i. t. d. rozumieią ſię bydź ſpółczynnikami ſtatecznémi. a X, związkiém iakimkolwiek głoſki x. Te wſzyſtkie zrównania, ſtaią ſię ſpoſobne do ſcáłkówania, będąc rozmnożone przez czynnika złożonego z x i z ſtatecznych. Owóż teráz iak znayduie ſię tén czynnik.

Daymy że idzie o zrównanie, $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$; trzeba naprzód rozłożyć wyráz $adydx$ na dwa inne $kdydx$ i $(a-k)dydx$, przez co odmiéni ſię poprzédzaiące zrównanie w to, $ddy + kdydx + (a-k)dydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$. Rozumié ſię że k ieſt ilością ſtateczną nieokréśloną; temu tedy zrównaniu, żeby mogło bydź ſcáłkówane nic więcéy niebrakuie, tylko aby

go

go rozmnożyć przez czynnika P, któryby był związkiem ſkładaiącym ſię z x i z ſtatecznych.

To założywſzy na przód, iawna ieſt, iż zrównanie $Pddy + Pkdydx + P(a-k)dydx + Pbydx^2 + PXdx^2 = 0$, podług poprzedzaiącego przypuſzczenia, powinno bydź zgodne do ſcałkówania. Piſzę go tedy tak: $Pddy + Pkdxdy + [P(a-k)dy + Pbydx + PXdx]dx = 0$. Lecz żeby to zrównanie podpadało ſcałkówaniu podług, (128), muſi bydź 1ód $\frac{dP}{dy} = \frac{d(Pkdx)}{ddy}$; 2re $\frac{dP}{dx}$ - - - $= \frac{d[P(a-k)dy + Pbydx + PXdx]}{ddy}$; 3cie. $\frac{d(Pkdx)}{dx} = \frac{d[P(a-k)dy + Pbydx + PXdx]}{dy}$. Z tych trzech zrownań pierwſze daie, $0 = 0$, na fundamencie tego przypuſzczenia, że czynniki P i k niezawieraią w ſobie tylko y i dy; drugie na fundamencie tegóż przypuſzczenia, daie $\frac{dP}{dx} = P(a-k)$; a trzecie daie $\frac{Pdk + kdP}{dx} = Pb$, albo tylko $\frac{kdP}{dx} = Pb$; bo k rozumię ſię bydź ſtateczne. Z każdego z tych zrównań wyciągnąwſzy wártość ilości $\frac{dP}{P}$, będzie $\frac{dP}{P} = (a-k)dx$, i $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{k}$; a zrównawſzy te dwie wártości iedna z drugą, będzie $a - k = \frac{b}{k}$, albo $kk - ak + b = 0$. Wynaydzie ſię tedy k, przy pomocy zrównania drugiego ſtopnia, to ieſt że czynnik k mieć będzie dwoiaką wártość. O-

znaczmy ſobie te dwie wártości przez m i m', co nam da 1ód $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{m}$, a zatém log. $P = \frac{bx}{m}$, albo $P = e^{\frac{bx}{m}}$; zrównanie tedy $Pddy +$ t. d. przemieni ſię w to, $ddye^{\frac{bx}{m}} + mdydxe^{\frac{bx}{m}} + (a-m)dydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}} = 0$. Teráz przyſtępuiąc do ſcałkówania, biorę naprzód (144) całkę wyrazu $ddye^{\frac{bx}{m}}$, poczytaiąc ſamo ddy za odmienną; i mam $dye^{\frac{bx}{m}}$. Zróżniczkowawſzy, i tę nową różniczkę odiąwſzy od poprzedzaiącego zrównania, wypada mi na reſztę $(m + a - \frac{b}{m} - m) \times dydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$. Lecz zrównanie $kk - ak + b = 0$, które nieieſt co innego, tylko $mm - am + b = 0$, daie $a - \frac{b}{m} - m = 0$, więc pozoſtałą ilością do ſcałkówania będzie, $mdydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$; którey wziąwſzy całkę, poczytaiąc za odmienną ſamo y, mieć będziem $mydxe^{\frac{bx}{m}}$ na drugi wyraz ſzukaney całki. Zróżniczkowawſzy, i odiąwſzy od pierwſzey reſzty, ſo-zoſtanie $Xdx^2 e^{\frac{bx}{m}}$, ilość, któréy całka w powſzechności, da wyrazić ſię przez - - $dx\int Xdx e^{\frac{bx}{m}}$, i która niezawiéraiąc w ſobie tylko iednę odmiénną, zależy od ſpoſóbów przepiſanych do ilościów z iedną odmiénną; a zatèm całką będzie, $dye^{\frac{bx}{m}} + mydxe^{\frac{bx}{m}} +$ - $dx\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = C$, albo $dy + mydx +$ - $dxe^{\frac{-bx}{m}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = Ce^{\frac{-bx}{m}}$. Ale że niémamy żadnéy przyczyny przymuſzaiącéy do użycia raczéy téy aniżeli owéy wártości k, więc używſzy drugiéy oznaczonéy przez m', podobnież mielibyśmy $dy + m'ydx +$ - - $dxe^{\frac{-bx}{m'}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m'}} = C'e^{\frac{-bx}{m'}}$, oznaczywſzy przez C' ſtateczną, odpowiadaiącą całce, wynikaiącéy z przypuſzczenia nowéy wártości m' wziętéy zamiaſt k.

Zrównawſzy z ſobą dwie wártości ilości dy, wyciągnięte z tych dwóch zrównań, wnoſi ſię naoſtatek - - - - -

$$y = \frac{Ce^{\frac{-bx}{m}} - C'e^{\frac{-bx}{m'}} + e^{\frac{-bx}{m}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m}}}{m - m'}$$

$$\frac{-e^{\frac{-bx}{m'}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m'}}}{m - m'}.$$

146.

146. Gdyby zrównanie było trzeciego porządku, trzebaby ſobie poſtąpić w podobnyż ſpoſób. *Np.* maiąc $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = o$. napiſałbym; $d^3y + kddydx + (a-k)ddydx + k'dydx^2 + (b-k')dydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = o$, gdzie przez k i k' rozumieią ſię ilości nieznaiome, ale ſtateczne, tudzież że do ſcałkówania, temu zrównaniu niebrakuie, tylko aby było rozmnożone przez czynnika P, niezawiéraiącego w ſobie tylko x i ſtateczne; to ieſt, że zrównanie $Pdy^3 + Pkddydx + P(a-k) \times ddydx + Pk'dydx^2 + P(b-k')dydx^2 + Pcydx^3 + PXdx^3 = o$, byłoby ſpoſobne do ſcałkówania. Dawſzy mu poſtać naſtępuiącą: $Pd^3y + Pkdxddy + [P(a-k)ddy + Pk'dydx] \times dx + [P(b-k')dydx + Pcydx^2 + PXdx^2]dx = o$, z warunku ſpoſobności tego zrównania do całkówania, wyniknęłoby podług (128) ſześć zrównań, które dla uczynionego przypuſzczenia względém k, k' i P, wyſzłyby na trzy; a oſtateczne zrównanie dałoby na k trzy wártóści, i znowu inne trzy wártości odpowiadaiące na k' i na P. Poſtąpiwſzy ſobie tedy w ſpoſób poprzédzaiący, mielibyśmy trzy zrównania, wyrażone w y, x, dx, dy i ddy. Z których wyrugówawſzy ddy i dy, wypadłaby wártość pomiérna głoſki y, wyrażona w x i w ſtatecznych.

147. A teráz łatwo domyślić ſię można, co trzebaby czynić z zrównaniami wyżſzych porządków.

Ténże ſpoſob ſłużyć ieſzcze może, chociażby znaydówała ſię większa liczba odmiénnych, byleby takowe nieprzechodziły piérwſzego ſtopnia, i między ſobą rozmnożone niebyły, ani téż przez iaką z różniczek tych odmiénnych, chybaby przez różniczkę, która poczyta ſię za ſtateczną.

 Np.

Np. gdybyśmy mieli te dwa zrównania, $addy + bddz + cdydx + edzdx + fydx^2 + gzdx^2 + Xdx^2 = 0$, i $a'ddy + b'ddz + c'dydx + e'dzdx + f'ydx^2 + g'zdx^2 + X'dx^2 = 0$. Naprzód oba zrównania złączyłbym w iedno, dodawſzy piérwſze do drugiego, rozmnożonego przez czynnika nieokréślonego a ſtatecznego q. Potém w całém zrównaniu, wyráz w który wchodzi dy, i wyráz w który wchodzi dz, rozdzieliłbym na dwie części, iák zrobiliśmy wyżéy; a naoſtatek rozmnożyłbym przez takiego czynnika, którego rozumiáłbym bydź złożonym, z związku głoſki x i z ſtatecznych.

148. Całą rzecz o zrównaniach różniczkowych zakóńczymy tą uwagą, że kiedy w zrównaniu o dwu odmiénnych, niedoſtaie iednéy z odmiénnych pomiérnych, to zawſze można takowe zrównanie naprowadzić do różniczek porządku bezśrzednie poprzédzaiącego; a to zrównawſzy różniczkę piérwſzą iednéy z odmiénnych, z różniczką drugiéy rozmnożonéy przez nową odmiénną.

Np. gdybym miáł do ſcáłkowania to zrównanie, $\frac{ddy}{dy} \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} = (ay + b)\, dx$, w którém dx rozumié ſię bydź ſtateczne, i w którém niedoſtaie odmiennéy x. Zrobiłbym $dy = pdx$, i miálbym $ddy = dpdx$, a zatém $\frac{dp}{p} \sqrt{(1 + pp)} = (ay + b) \cdot \frac{dy}{p}$, albo $dp \sqrt{(1 + pp)} = (ay + b)\, dy$; zrównanie, którego druga część cáłkuie ſię Algebraicznie, a piérwſza część przez logarytmy, przemiéniwſzy wyráz $\sqrt{(1 + pp)}$, na ilość niepiérwiaſtkową, w ſpoſób iuż indziéy przepiſany (117).

PO-

POWSZECHNE FUNDAMENTA MECHANIKI.

WIADOMOŚCI POPRZÉDZAIĄCE.

149. **P**od imieniém *Mechaniki* zawiéramy naukę o Ruchu i o Równowadze. Ciało rozumié ſię bydź w ruchu, kiedy albo całe, albo niektóre części iego, ſą przenieſione z iednego miéyſca na drugie. Ciało czyli ſkupiénie wielu części materyalnych, niémoże ſamo przez ſię dać ſobie ruchu. Niémoże bydź poruſzone tylko przez iaką przyczynę, lubo bez niéy może miéć bytność ſwoię. Ta przyczyna (niech ona będzie iaka chce) która ieſt zdolna do poruſzenia ciała, ieſt to, co my nazywamy *ſiłą*. Równowaga, ieſt taki ſtan ciała, albo ſkupionych cząſtek materyalnych, albo *układu* ciała

(ſy-

(ſyſteme), kiedy to ciało ieſt nagabane od wielu ſił, które ſą zniſzczone od iakich zawád, albo téż które pſuią ſię wzaiémnie iedna drugą.

Spoczynek, ieſt taki ſtan ciała, w którym części iego, nietylko nieſą z miéyſca poruſzone, ale nawet od żadnéy ſiły nieſą nagabane.

Dla uſtanowiénia fundamentów Ruchu i Równowagi, zmyślmy ſobie naprzód, iakoby w naturze nieznaydówałoſię nic więcéy, tylko ciała o których mówić mamy, i ſiły które rozumiémy do tych ciał bydź przyłożone. A tak uważać będziémy naprzód ciała, iakoby niebyły ważne, ale owſzém iakoby były doſkonale wolne czyli ſwobodne; rozumieiąc iż w naturze niémaſz ani powietrza, ani ważności, ani tarcia, ani żadnéy innéy przeſzkody. Potém dopiéro mieć będziémy wzgląd na te przeſzkody; ale ażeby można było oſzacówać ich ſkutki, trzeba nam naprzód uważyć rzeczy, w tym ſtanie iak ſię namiéniło.

150. Na fundamencie tych zaſád, iawna ieſt, że ieżeli ciało odebrało ruch od iakiéykolwiek bądź przyczyny, to powinno trwać w tym ſtanie ruchu, bez żadnéy przerwy i pomnożenia, bez żadnego zboczenia, póty, póki taż albo nowa ſiła niebędzie czynić przeciwko niému. Jakóż, powiedziało ſię dopiéro, że ciało niémoże ſamo ſobie dać ruchu; więc niémoże téż ani go ſobie odiąć, bobyto było dać go ſobie w rozumiéniu przeciwném; a do tego rozumiémy, że niéma na zawadzie żadnéy przeſzko-

ſzkody. A zatém ruch ieſt naturalnię równy, czyli iednokſztáłtny, i proſtoliniowy. Zaſtanówmy ſię tedy naprzód nad właſnościami tego Ruchu.

O *Ruchu* iednokſztáłtnym (*uniforme*).

151. Ruch tedy *iednokſztáłtny* ieſt taki, w którym ciało rucha ſię w ſpoſób ſtatecznie iednakowy; to ieſt kiedy ciało przebiéga zawſze iednakową rozległość miéyſca, w iednakowym przeciągu czaſu. Żeby przyſtoſówać iedén do drugiego ruchu dwóch ciał ruchaiących ſię iednokſztáłtnie, trzeba mieć wzgląd na rozległość iaką każde ciało przebiéga w iednymże iakowym pewnym czaſie, iakoto w miнucie piérwſzéy, wtóréy, i t. d. Takowa rozległość ieſt to, co nazywamy *ſzypkością*.

152. Szypkością tedy ciała, mówiąc właściwie, ieſt rozległość, iaką to ciało może przebieżyć iednokſztáłtnie, w péwnym przeciągu czaſu, który my nazwiémy *iednością czaſu*.

I tak w ruchach iednokſtáltnych dwóch ciał, ieżeli czas rachówać będziém w minutach wtórych, i ieżeli iedno ciało przebiéga 5*ſt.* w téyże minucie wtóréy, to powiém, że ſzy-

ſzypkość pierwſzego ciała ieſt na $5ſt.$ a ſzypkość drugiego ciała, na $6ſt.$ Ale (biorąc zawſze iednę minutę wtórą za iedność czaſu), gdyby mi powiedziano, że ciało iakowe przebiegło $100ſt.$ w 5 minutach wtórych, to takowe $100ſt.$ niewyrażałyby mi ſzypkości, ale widzę, że to ciało w każdéy minucie wtórey, przebiegłoby piątą część wſzyſtkiego albo $20ſt.$; to ieſt że chcąc mieć znaiomą ſzypkość, dzielę liczbę 100, wyrażaiącą liczbę części rozległości przebieżonéy, przez 5, czyli przez liczbę iednościow czaſu upłynionych.

153. Więc ogołém, *ſzypkość równa ſię rozległości rozdzielonéy przez czas*, to ieſt oznaczywſzy przez V ſzypkość, przez E rozległość przebieżoną w czaſie iakim oznaczym przez T, będzie $V=\frac{E}{T}$; wyrażenie, które ieſt iedną ſpomiędzy fundamentalnych zaſad Mechaniki.

154. Zrównanie $V=\frac{E}{T}$; daie nietylko pomiar ſzypkości, ale téż rozległości i czaſu. Jakóż poczytaiąc z kolei, E i T za niewiadome, podług poſpolitych reguł Algebraicznych mieć będziem $T=\frac{E}{V}$ i $E=VT$.

A zatém, *Zeby mieć czas, trzeba rozdzielić rozległość przez ſzypkość; żeby zaś mieć rozległość, trzeba rozmnożyć ſzypkość przez czas.*

Wreſzcie ieżeli tu używamy wyrażenia Algebraicznego, to dzieie ſię nie żeby tego

tego potrzeba wyciągała dla łatwości wyrozumienia tych prawd początkowych, ale tylko dla poratowania pamięci. Jakóż z tego przykładu pokazuie ſię, że kiedy raz ta pierwſza zaſada utwierdzi ſię w pamięci, to zawſze łatwo będzie wynaléść ſobie z niéy dwie inne, poſtąpiwſzy ſobie z tą pierwſzą zaſadą wyrażoną Algebraicznie, podług reguł zwyczaynych.

155. Już tedy teráz łatwo przyſtóſować możemy, ruchy iednokſztaltne dwóch lub większéy liczby ciał, iedne do drugich.

Np. gdyby mnie zapytano, w iakim ſtóſunku znayduią ſię między ſobą ſzypkości dwóch ciał, przebiegaiących rozległości znaiome E i e, w czaſach znaiomych T i t. Oznaczywſzy przez V i u, ſzypkości tych dwóch ciał, mieć będę $V=\frac{E}{T}$, i $u=\frac{e}{t}$ . . (153); więc $V:u::\frac{E}{T}:\frac{u}{t}$; to ieſt, *że ſzypkości ſą między ſobą iak rozległości rozdzielone przez czaſy.*

Słowém czyto ſzypkości, czy rozległości, czy czaſy, maią bydź iedne do drugich przyſtóſowane, to zaſada dopiero założona (153) zawſze da wyrażenie każdéy z tych rzeczy, względém każdego ciała: nietrzeba tylko z tych wyrażeń złożyć ſtóſunek.

Np. ieżelibym chciał przyſtóſować rozległości, zaſada fundamentalna daie mi $V=\frac{E}{T}$, ſkąd wyciągam $E=VT$; więc co do do drugiego ciała, miéć będę podobnież $e = ut$; więc $E : e :: VT : ut$; to ieſt, *że rozległości maią ſię między ſobą, iak ſzypkości rozmnożone przez czaſy.*

156. Z tych trzech rzeczy, iakie ſą rozległość, czas, i ſzypkość, chcąc dwie przyſtóſówać do ſiebie, kiedy trzecia w obu ciałach ieſt iednakowa, nietrzeba więcéy, tylko poſzukać wyrażenia téy trzeciéy rzeczy, odpowiadaiącego każdemu ciału, i przyſtóſówać iedno do drugiego.

Np. gdybym chciał miéć ſtóſunek między rozległościami, kiedyby ſzypkości były iednakowe, uważam iż ieſt $V = \frac{E}{T}$ i $u = \frac{e}{t}$, więc ponieważ rozumie ſię $V = u$, będzie $\frac{E}{T} = \frac{e}{t}$ albo $Et = eT$; ſkąd wnoſi ſię $E : e :: T : t$; to ieſt, *że ieżeli ſzypkości dwóch ciał ſą ſobie równe, to rozległości maią ſię między ſobą iak czaſy.* Znalezlibyśmy podobnież, *że ieżeli czaſy ſą ſobie równe, to rozległości miéć ſię będą do ſiebie iak ſzypkości;* i *że kiedy dwa ciała maią przebiégać też ſamę rozległość, to trzeba ażeby ſzypkości ich były odwrotnie proporcyonalne czaſóm.* Jakóż mamy $E = VT$ i $e = ut$; więc ieżeli $E = e$, to muſi bydź $VT = ut$, ſkąd wyciąga ſię $V : u :: t : T$. A tak to ſamo iedno fundamentalne zrównanie $V = \frac{E}{T}$, daie ſpoſób wynaleziénia ſtóſunków mię-

między wſzelkiémi okolicznościami należącémi do Ruchu iednokſztáltnego.

O Siłach i o ilości Ruchu.

157. Summa części materyalnych, z których ſkłada ſię ciało, nazywa ſię *miąższością* (maſſe); ale my używaiąc tego ſłowa, oznaczać będziémy przez nie, liczbę wyrażaiącą, z wielu części materyalnych ieſt złożone ciało iakowe. *Siła*, iak iuż powiedziało ſię wyżéy, ieſt przyczyna daiąca ciału ruch, albo dążąca do poruſzenia go.

Ponieważ w ſiłach niémamy nic innego uważać tylko onych ſkutki, przeto ſiły miérzyć ſię powinny ſkutkami ſwémi, do iakich ſą zdólne. Skutek zaś ſiły ieſt tén, że każdéy cząſtce ciała matéryalnéy udziéla pewnéy ſzypkości. Więc ieżeli wſzyſtkie części nabywaią iednakowéy ſzypkości, iak tu rozumiéć chcémy), to przyczyna poruſzaiąca, miéć będzie za miarę, ſzypkość rozmnożoną przez liczbę części materyalnych ciała, to ieſt przez miążſzość. Więc, *wymiarém ſiły ieſt ſzypkość, iaką ta ſiła nadać może miążſzości iakiéy znaioméy, ieſt mówię, ta ſzypkość rozmnożona przez miążſzość.*

158. Mnogość wynikaiąca z miążſzości ciała przez ſzypkość, nazywa ſię *ilością ruchu* tego ciała. *Siły tedy miérzą ſię przez ilość ruchu, iaką w ciałach ſprawić mogą.*

I tak, ieżeli oznaczymy tę mnogość przez F; miąższość przez M; ſzypkość przez V, mieć będziém $F = MV$. To zrównanie $V = \frac{F}{M}$ i $M = \frac{F}{V}$, uczy mnie 1ód *Ze maiąc znaiomą ſiłę poruſzaiącą, i miąższość ciała, można wiedzieć, iaką ſzypkość powinno mieć to ciało, rozdzieliwſzy ſiłę poruſzaiącą przez miąższość.* 2re *Ze maiąc znaiomą ſiłę poruſzaiącą i ſzypkość, można wiedzieć iaka ieſt miąższość odpowiadaiąca téy ſzypkości i téy ſile poruſzaiącéy, rozdzieliwſzy ſiłę poruſzaiącą przez ſzypkość.* Ale należy pomnieć, że co my tu rozumiémy przez F czyli przez ſiłę poruſzaiącą, ieſt ſkutek, iaki ſprawić zdolna ieſt przyczyna daiąca ruch ciału. I ténto iedynie ſkutek wchodzić może, i trzeba ażeby wchodził w rachunek,

159. Więc, ieżeli f oznacza ſiłę poruſzaiącą drugiego ciała, m miąższość iego, a u ſzypkość téy miąższości, to będzie podobnież $f = mu$; a zatém $F : f :: MV : mu$; to ieſt, *że ſiły poruſzaiące maią ſię między ſobą, iak miąższości rozmnożone przez ſzypkości.* Jeżeli zaś z każdego z tych zrównań wyciągniémy wártość głoſek M i m, potém głoſek V i u, to mieć będziém ſtóſunek między miąższościami, wyrażony w ſiłach i ſzypkościch, i ſtóſunek między ſzypkościami, wyrażony w ſiłach i miąższościach; ſkąd wnoſi ſię. 1od Ze *kiedy miąższości ſą ſobie równe, to ſiły poruſzaiące maią ſię między ſobą iak ſzypkości.* 2re Ze *kiedy ſzypkości ſą ſobie równe, to ſiły poruſzaiące ſą między ſobą iak miąższości.* 3cie I że naoſtatek, *ieżeli ſiły poruſzaiące ſą ſobie równe, to ſzypkości maią ſię między ſobą, w ſtóſunku odwrotnym miąższościów.* O czém łatwo przekonać

nać ſię można, zrównawſzy iedne do drugich z kolei wártości głoſek M i m. V i u, naoſtatek F i f; zrównania ſtąd wynikaiące przemiénione w proporcyą, wywodzą każde z tych podań.

160. Miąższość czyli liczba cząſtek materyalnych każdego ciała, zależy od *obiętości* i *gęſtości* onego. Ponieważ ciała maią w ſobie bardzo wiele prożnych dziurek, przeto ilość materyi w nich zawiéraiącéy ſię, niémoże bydź proporcyonalna ich obiętości, ale pod tąż ſamą obiętością, znaydówać ſię muſi tém więcéy materyi, im ściśléy będą w niéy cząſtki z ſobą ſpoione; i tacto większa lub mniéyſza bliſkość cząſtek nazywa ſię *gęſtością*; tak iż mówi ſię że to ciało ieſt *gęſtſze* od tego lub owego, kiedy pod iednakową obiętością piérwſze, zawiéra w ſobie więcéy cząſtek materyalnych iak drugie.

Gęſtość tedy ſłuży do oſzacówania cząſtek materyalnych, kiedy obiętość będzie znaioma; a tak *gęſtość*, można ſobie wyobrazić, iakoby wyrażała liczbę cząſtek materyalnych, zawartych w pewnéy iakiéy obiętości; a zatém kiedy ſię mówi że złoto ieſt 19 razy gęſtſze od wody, to znaczy, że złoto w ſobie ma 19 razy więcéy cząſtek aniżeli woda, zawarta w téyże obiętości miéyſca co złoto to. W tén tedy ſpoſób wyobraziwſzy ſobie gęſtość, to ieſt iakoby wyrażaiącą liczbę części materyalnych zawartych w iakiéy pewnéy obiętości, która bierze ſię za *iedność obiętości*, iawna ieſt, iż ażeby mieć miąższość, albo ſummę wſzyſtkich części materyalnych, ſkładaiących ciało wiadoméy obiętości, trzeba rozmnożyć miąższość przez obiętość. *Np.* ieżeli gęſtość iednego cała ſześciénnego złota, ieſt wyrażona przez 19, to ilość materyi zawiéraiącéy ſię w 10 całach ſześciénnych takiegóż złota, będzie wyrażona, przez 10 razy 19. A tak oznaczywſzy ogołém miąższość przez *M*, obiętość czyli bryłówatość przez *S*, a gęſtość przez *D*, będzie $M = S \times D$; zrównanie, przy pomocy którégo łatwo będzie wynaléśdź zachodzące ſtóſunki, między miąższościami, bryłówatościami, i gęſtościami ciał. Zobaczymy wkrótce, że miąższóści ciał ſą proporcyonalne ich wadze, a zatém w użyciu można wziąść wagę zamiaſt miąższości.

O Ruchach iednokſztáłtnie przyſpieſzonych.

161. Ciało, które nieodebrało tylko iedén popęd, trwa w ſwoim ruchu, z tąż ſamą ſzypkością i w tymże kierónku, iaki doſtało w piérwſzym momencie (150). Ale ieżeli odbierze nowy popęd w témże albo w przeciwném rozumiéniu, to naténczas rucha ſię z ſzypkością równaiącą ſię ſummie albo ró-

różnicy dwóch ſzypkościów, z kolei nabytych; i to ieſt oczywiſta.

Więc ieżeli w pewnych wymiarach
czaſu, ciało doſtaie nowe popędy w tèmże
rozumiéniu albo w przeciwném popędowi
piérwſzèmu, to takowe ciało ruchać ſię bę-
dzie ruchém nierównym czyli *odmiénném*,
i ſzypkość iego będzie coráz inſza na po-
czątku każdego wymiaru czaſu. Atoli bądź
co chce, ſzypkość takiego ciała uważona na
końcu iakiegokolwiek czaſu, powinna bydź
ſzacówana podług rozległości, iaką przebiedz
zdołałoby to ciało, w przeciągu iedności cza-
ſu, gdyby ruch iego odmiénił ſię w iedno-
kſztáłtny, rachuiąc od tego momentu w któ-
rym uważa ſię pomiéniona ſzypkość.

Ogołém, nazywa ſię *ſiłą przyſpiéſzaią-
cą*, wſzelka ſiła, czyniąca przeciwko *Rucha-
dłu* (mobile), i ſprawuiąca w niém ruch od-
miénny. Jeżeli takowa ſiła w równych prze-
ciągach czaſu, równo ſkutkuie to nazywa
ſię *ſiłą iednokſztáłtnie przyſpiéſzaiącą*, albo *ſiłą
iednokſztáłtnie opóźniaiącą*; a to podług tego,
iako dąży do pomnożenia albo do umniéy-
ſzenia niniéyſzéy ſzypkości Ruchadła. Za-
ſtanówmy ſię teráz nad okolicznościami ru-
chu iednokſztáłtnie przyſpieſzonego.

162. Ponieważ w takowym ruchu, ſiła przyſpiéſzaiąca, ſkutkuie zawſze w iednakowy ſpoſób, ieżeli oznaczym przez g ſzypkość, iaką ta ſiła nadaie ciału w każdéy iedności czaſu, to iawna ieſt, że koléynémi ſzypkościami Ruchadła, będą g, 2g,

2g, 3g; tak iż po upłynionéy liczbie czaſów oznaczonéy przez t, ſzypkość nabyta powinna bydź wyrażona przez g, powtórzone tyle razy, ile będzie iednościów w t; to ieſt, przez $g \times t$ albo przez gt.

163. Więc 1ód W Ruchu iednokſztałtnie przyſpiéſzonym, liczby ſtopniów ſzypkości, iakiéy nabywa ruchadło, rosną iak liczby wymiarów czaſu, przez których przeciąg ruch trwa; co wyraża ſię tak; Ze *ſzypkości nabyte, maią ſię między ſobą, iak czaſy upłynione od początku ruchu.* I tak oznaczywſzy przez u ſzypkość, iakiéy nabyło ruchadło na końcu czaſu t, będzie $u = gt$. 2re Szypkości tedy, w iakich ruchadło znayduie ſię koléyno przez przeciąg każdego z wymiarów czaſu, iedén po drugim następuiącego, ſkładaią progreſſyą arytmetyczną ÷ g, 2g, 3g, i. t. d., w któréy oſtatnim wyrazèm ieſt gt albo u, a liczbą wyrażów ieſt t, to ieſt, że liczba wyrazów ieſt oznaczona przez liczbę czynnościów ſiły przyſpiéſzaiącéy. 3cie A ponieważ ſzypkości g, 2g, i. t. d. każda z nich nieieſt co innego, tylko rozległość iaką ruchadło zdoła przebiédz w przeciągu czaſu odpowiadaiącym (151), więc rozległością całkowitą przebieżoną w czaſie t, będzie ſumma wyrazów téyże progreſſyi arytmetycznéy; to ieſt podług (Alg. 271), będzie wyrażona przez $(g + u) \times \frac{t}{2}$. Więc oznaczywſzy przez e takową rozległość przebieżoną od początku ruchu, będzie $e = (g + u)\frac{t}{2}$.

164. Teráz zmyślmy ſobie, że ſiła przyſpiéſzaiąca ſkutkuie bez uſtanku, albo co na iedno wychodzi, zmyślmy ſobie, czas t podzielony na niezmiérną liczbę części niezmiérnie małych, które nazwiymy chwilkami; i że na początku albo na końcu każdéy takiéy chwilki, ſiła przyſpiéſzaiąca daie popęd ruchadłu. Zmyślmy ſobie nadto, że ta ſiła ſkutkuie ſtopniami niezmiérnie małémi. Naténczas ponieważ g ieſt niezmiérnie małe względém u, więc takowe g trzeba opuścić w zrównaniu $e = (g + u)\frac{t}{2}$, tak iż będzie tylko $e = \frac{ut}{2}$.

165. To założywſzy, daymy że na końcu czaſu t, ſiła przyſpiéſzaiąca przeſtaie ſkutkówać; ciało tedy (150) trwać będzie w ruchu ſwoim z nabytą ſzypkością u; to ieſt że w każdéy iedności czaſu, przebiegałoby rozległość $= u$ (151); więc gdyby nieuſtaiąc, daléy bieżało z tąż ſamą ſzypkością przez czas t, przebiegłoby rozległość $= u \times t$, to ieſt dwa razy tak wielką, iak e albo $\frac{ut}{2}$, którą przebiégło w czaſie równym, mocą koléynéy czynności ſiły przyſpiéſzaiącéy. Więc, *w Ruchu iednokſztałtnie i nieuſtannie przyſpieſzonym, rozległość przebieżona w przeciągu pewnego czaſu, ieſt połową téy rozległości,*

iaką ruchadło może przebieżyć w czaſie rownym piérwſzému, z ſzypkością nabytą iednokſztáłtnie dalėy trwaiącą.

166. Ponieważ (163) ſzypkości nabyte, roſną iak czaſy upłynione, więc ieżeli oznaczymy przez p ſzypkość nabytą na końcu iednéy minuty wtóréy; to po liczbie t minut wtórych, ſzypkość nabyta, będzie wyrażona przez pt; tak iż będzie $u=pt$. A zatém zrównanie $e=\frac{ut}{2}$ wyżéy wynalezione, przemiéni ſię na $e=\frac{ptt}{2}$.

Więc, ieżeli oznaczymy przez E, inną rozległość przebieżoną w ténże ſpoſób, w przeciągu czaſu T, to będzie podobnież $E=\frac{pT^2}{2}$; ſkąd wnoſi ſię, $e:E::\frac{ptt}{2}:\frac{pTT}{2}::tt:TT$; co daie znać, że *rozległości przebieżone w ruchu iednokſztáłtnie i nieuſtannie przyſpiéſzonym, maią ſię między ſobą iak kwadraty czaſów.*

167. A ponieważ podług (163), ſzypkości maią ſię między ſobą w ſtóſunku czaſów, więc *rozległości przebieżone muſzą także mieć ſię między ſobą w ſtóſunku kwadratów ſzypkościów.*

168. Więc, *ſzypkości i czaſy maią ſię między ſobą, iak piérwiaſtki kwadratowe rozległościów przebieżonych od początku ruchu.*

169. To wſzyſtko zarówno ſłuży ruchòm iednokſztáłtnie opoźnionym, byleby przez czaſy, rozumiéć te, które zoſtaią do upłyniénia, póki ſię ſzypkość nieznіſzczy, i byleby przez rozległości znowu rozumiéć, te które zoſtaią do przebieżenia póki ſię taż ſzypkość nieznіſzczy.

170. W zrównaniu $e=\frac{pt^2}{2}$ wyżéy wynalezioném (166), ilość p, przez którą oznaczyliśmy ſzypkość, iaką może ſprawić ſiła przyſpiéſzaiąca, mocą koléynéy czynności ſwoiéy, przez przeciąg iednéy minuty wtóréy, ieſt to co odtąd nazywać będziemy *ſiłą przyſpiéſzaiącą*; bo o téy ſile ſądzić ſię powinno ze ſkutku, iaki ſprawić może w ruchadle w pewnym przeciągu czaſu; ſkutek, który niezależy na czém innėm tylko na udzieleniu pewnéy ſzypkości.

O Ruchu ſwobodnym ciał ważnych.

171. Do tego rodzaiu ruchu który dopiéro uważaliśmy, należy ruch ciał ważnych. Ale nim przyſtąpiemy do niego teoryą wzwyż założoną, wprzód trzeba nam rozważyć niektóre okoliczności tyczące ſię ważności. Przez ważność, rozumié ſię ta ſiła, mocą któréy ciało dąży do upadku w kierónku linii pionowych, albo proſto-

ſtopadłych względém powierſzchni wód. Gdyby ziemia, albo gdyby powiérſzchnia wód była poſtaci doſkonale kulowéy, to wſzyſtkie kierónki ważności zbiegałyby ſię do śrzodka. A lubo ta powiérſzchnia niéma doſkonałéy poſtaci kulowéy, atoli przynaymniéy niewiele rożni ſię od niéy, tak iż w tych materyach które traktować mamy, kiérónki ważności uważać możemy bez znacznego błędu, iakby zbiégały ſię do śrzodka ziemi.

Już indziéy (Jeom 338) mieliśmy okazyą powiedzieć, że promień ziemi, uważonéy iakby była poſtaci kulowéy, wynoſi 19605480 *ſt.* A ſtąd łatwo wnieść ſobie można, że kątowi śrzodkowemu od iednéy minuty wtórèy, odpowiadać muſi na powiérſzchni ziemi, rozległość od $15\frac{2}{3}$ *ſąż.* A zatém w ſilni długiéy na 16 *ſąż*, do równoległości między kierónkami ważności, ſkutkuiącémi z dwóch końców téy ſilni, niebrakówałoby tylko kąta od iednéy minuty wtóréy. Więc, *w iednémże miéyſcu, kierónki ważności można poczytać za rownolegle.*

Co ſię tyczé wiélkości téy ſiły, to takowa (biorąc ściśle), wypada różna w różnych odległościach od *Ekwatora*, i w różnych oddaleniach od śrzodka ziemi. Ale różnice, wynikaiące z różnych odległościów od *Ekwatora*, ſą bardzo małe, i na nich teráz nic nam niezależy. Toż rozumieć ſię ma, o ùmniéyſzaiącéy ſię ważności,

im bardziéy oddalamy ſię od śrzodka ziemi; bo to niémoże uczynić znacznie odmiénnego ſkutku, aż dopiéro w odległościach daleko większych, aniżeli ſą te wyſokości do których możemy ſię podnieść, albo głębokości do których możemy ſię ſpuścić. Dla czego, ważność, poczytamy tu za ſiłę wſzędzie iednakową, to ieſt mocą któréy ciało dąży do upadku na iednaką ilość w iednakim czaſie.

Tę ſiłę trzeba uważać iako ſkutkuiącą, równo w każdym momencie nad każdą cząſtką materyi. Jawna zaś ieſt, że ieżeli każda z cząſtek ciała odbiéra iednakową ſzypkość, to całe ciało ruchać ſię muſi tylko z taką ſzypkością, iakąby miała iedna z cząſteczek oddzielona od tego ciała; tak iż ſzypkość, iaką nadaie ważność iakiéykólwiek miąższości, od wielkości téy miąższości wcale nic niezależy, i ieſt taż ſama w małéy miąższości co w wielkiéy. I lubo niewidzimy ażeby wſzyſtkie ciała, z iednakowéy wyſokości upadały w iednakim przeciągu czaſu, atoli ta różność, ieſt iedynie ſkutkiém odporu powietrza, iak zobaczymy niżéy; tak iż ſpuſzczaiąc ciała w miéyſcu wypróżnionèm z powietrza, da ſię widzieć iako ciała, lubo bardzo daleko od ſiebie różne w miąższości, atoli z iednakowéy wyſokości upadaią w iednakim czaſie.

A tu należy nam uczynić różnicę między ſkutkiém ważności i ſkutkiém wagi. Skutek ważności ieſt tén, iż takowa nadaie albo dąży do nadania każdéy cząſtce materyi pewnéy ſzypkości, która od liczby cząſtek materyalnych wcale niezależy. *Waga* zaś, równa ſie uſilności, iakiéy trzeba użyć, chcąc przeſzkodzić ażeby miąższość iaka, niebyła poſłuſzną ſwoiéy ważności. A takowa uſilność zależy od dwóch rzeczy, to ieſt od ſzypkości, do któréy nadania każdéy cząſtce, dąży ważność. i od liczby cząſtek, które nieiako ożywia albo dąży do ich ożywiénia taż ważność. A że ſzypkość, do któréy nadania dąży ważność, ieſt w każdéy cząſteczce materyi taż ſama, więc uſilność któréy potrzeba użyć, muſi bydź proporcyonalna liczbie cząſtek materyalnych, to ieſt miąższości. *A zatém waga zawiſła od miąższości, a ważność wcale od niéy niezależy.* Ta uwaga względém wagi ciał, potwiérdza to co iuż wyżéy namieniliśmy (160). to ieſt, że miąższość ieſt proporcyonalna wadze.

172. Po założeniu tych wiadomości ściągaiących ſię do ważności, przyſtąpmy teráz do prawideł ruchu ciał ważnych. Ponieważ ważność ſkutkuie równo i bez uſtanku, choćby ciało w iakiéykolwiék bądź odległości znaydówało ſię od powiérzchni ziemi, (przynaymniéy co do takich wyſokościów do iakich tylko podnieść ſię możem), przeto ta pomiéniona ważność, ieſt ſtatecznie przyſpiéſzaiącą, nadaiąca co moment ruchadłu nowy ſtopiéń ſzypkości, który zawſze ieſt iednakowy w każdym iednakowym momencie czaſu; tak iż podług (163 i daléy), ſzypkości nabyte pomnażaią

ią ſię iak czaſy upłynione; rozległości przebieżone, ſą iak kwadraty czaſów, albo iak kwadraty ſzypkościów; ſzypkości ſą iak piérwiaſtki kwadratowe rozległościów przebieżonych; i czaſy ſą także iak piérwiaſtki kwadratowe tychże rozległościów przebieżonych; ſłowém, to wſzyſtko co powiedziało ſię o ſiłach przyſpiéſzaiących ſtatecznych, ſłowo w ſłowo ſłuży ważności. Byleby uważyć, że w tém wſzyſtkiém, niémamy względu ani na odpór powietrza, ani na żadną inną przeſzkodę.

Zeby tedy można było naznaczyć czaſy, rozległości i ſzypkości w ruchu ciał ważnych, do tego nietrzeba więcéy, tylko mieć znaiomy iaki iedén ſkutek ważności w pewnym iakim czaſie znaiomym. Albowiém zrównania $u = pt$ i $e = \frac{pt^2}{2}$, pokazuią nam drogę do wynaleziénia czego potrzeba będzie z tych rzeczy, bylebyśmy tylko mieli znaiomą wártość głoſki p. Przypomniymy więc ſobie (166), że przez p rozumieliśmy ſzypkość iakiéy nabywa ruchadło na końcu iednéy minuty wtóréy. Tym czaſém wiémy z doświadczenia, (iak to zaś było wynaleziono zobaczymy niżéy), że ciało któremuby powietrze nieczyniło znacznego odporu, w piérwſzey minucie wtóréy upadku ſwego, ubiéga $15\frac{1}{10}$ *ſt.*, albo raczéy 15,098 *ſt.*

 Skąd-

Skądinąd znowu wiémy, że ruchadło, mocą ſzypkości nabytéy od koleynych popędów, w podobnymże czaſie, mogłoby przebieżyć tyle dwoie w ruchu iednokſztáłtnym. Więc ſzypkość iakiéy nabywa ciało na końcu piérwſzéy minuty wtóréy, ieſt taka, iż gdyby ważność uſtała daléy ſkutkować, to ubiegłoby w każdéy minucie wtóréy dwa razy $15\frac{1}{10}$ ſt., to ieſt 30,2. Więc $p = 30,2$.

173. Teráz powróciwſzy do zrównań $u = pt$ i $e = \frac{pt^2}{2}$; piérwſze z nich uczy nas, iż ażeby mieć ſzypkość iakiéy nabyło ciało ważne w przeciągu upadku ſwego trwaiącego przez liczbę minut wtórych t, trzeba rozmnożyć ſzypkość nabytą przeciągu piérwſzéy minuty wtóréy, przez liczbę t minut wtórych. Więc. *kiedy ciało ważne trwało w upadku przez iakąkolwiek liczbę minut wtórych, to ſzypkość iego nabyta będzie taka, iż gdyby ważność przeſtała daléy ſkutkować, to na każdą minutę wtórą ubiegłoby tyle razy 30,2 ſt. ile upłynęło minut wtórych.*

I tak ciało które do upadnienia potrzebowało ſiedmiu minut wtórych, na końcu takowych 7 minut, nabyłoby takiéy ſzypkości, iż mocą iéy, mogłoby na iednę minutę wtórą ubieżyć 7 razy 30, 2 ſt. to ieſt $211\frac{2}{5}$ ſt. bez wſzelkiego nowego popędu.

174. Drugie zaś zrównanie $e = \frac{pt^2}{2}$, daie znać, iż ażeby mieć rozległość czyli wyſokość e, z któréy ciało ważne upada w przeciągu liczby t minut wtórych, trzeba rozmnożyć $\frac{1}{2}p$, to ieſt rozległość iaką przebiéga w piérwſzéy minucie wtóréy, trzeba

ią

ią mówię rozmnożyć przez kwadrat liczby minut wtórych. Więc, *wyſokość z któréy ciało ważne upada, w przeciągu liczby t minut wtórych, ſkłada ſię z $15\frac{1}{10}$ ſt. tyle razy powtórzónych, ile znayduie ſię iedności w kwadracie téyże liczby minut wtórych.*

I tak ieżeli ciało potrzebowało 7 minut wtórych do upadnienia, można bydź pewnym, iż ſpadło z wyſokości, wynoſzącéy 49 razy 15,1 ſt. to ieſt wynoſzącéy 740 ſt. z małém uchybieniem; gdzie zawſze rozumiémy że odpór powietrza niéma miéyſca. A ſtąd pokazuie ſię, iż byleby mieć wiadomy czas upłyniony, niémaſz nic łatwieyſzego iak wynaleźdź ſzypkość nabytą i przebieżoną rozległość.

175. Chcąc znowu wiedzieć iak wiele czaſu ciało potrzebowałoby do upadnienia z iakiéy wyſokości znaiomey; trzeba uważyć, iż zrównanie $e = \frac{1}{2}pt^2$, daie $t^2 = \frac{e}{\frac{1}{2}p}$, a zatém $t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}p}}$; to ieſt, że trzeba ſzukać wiele razy takowa wyſokość e, zawiéra w ſobie wyſokość $\frac{1}{2}p$, z któréy ciało ważne ſpada w piérwſzéy minucie wtóréy, a potèm z tego wielorazu trzéba wyciągnąć kwadratowy piérwiaſtek.

176. Gdyby mi zaś trzeba było dochodzić, z iakiéy wyſokości ciało ważne powinnoby upaśdź, ażeby nabyło pewnéy ſzyp-

ko-

kości, to ieſt ſzypkości, mocą którćy mogłoby przebiéżyć iednokſztáłtnie pewną liczbę ſtop w iednéy minucie wtóréy; to naprzód z zrównania $u = pt$, wyciągnąłbym wártość głoſki t, miálbym $t = \frac{u}{p}$, potém kwadrat téy wártości położyłbym w zrównaniu $e = \frac{1}{2}pt^2$ zamiaſt t^2, ſkąd wypadłoby mi $e = \frac{1}{2}p \times \frac{u^2}{pp} = \frac{u^2}{2p}$; zrównanie, które mnie uczy, iż: *Ażeby dòyśdź wyſokości* e, *z któréy ciało ważne powinnoby upaśdź, dla nabycia ſzypkości* u, *wynoſzącéy pewną liczbę ſtóp na iednę minutę wtòrą. trzeba rozdzielić kwadrat takowéy liczby ſtòp przez podwòyność ſzypkości, iakiéy nabywa. ciało na końcu iednéy minuty wtóréy, to ieſt przez* 60,4.

I tak, chcąc wiedzieć, z iakiéy wyſokości ciało ważne powinnoby upaśdź, żeby nabyło ſzypkości 100 *ſt.* na iednę minutę wtórą; dzielę kwadrat 100 = 10000, przez 60,4; a wypadaiący wieloráz 165½ pokazuie mi, iż ciało dla nabycia pomiénionéy ſzypkości 100 *ſt.* na iednę minutę wtórą, powinnoby upaśdź z wyſokości wynoſzącéy 165½ *ſt.* Jawna ieſt, iż podobnymże ſpoſobém trzebaby ſobie poſtąpić chcąc dóyśdź do iakiéy wyſokości podnioſłoby ſię ciało wyrzucone pionowó, z nadaną ſobie pewną ſzypkością.

177. Ponieważ, (iako widzieć ſię daie z poprzédzaiących przykładów), można bardzo łatwo obrachówać wſzelkie okoliczności, tyczące ſię ruchu ciáł ważnych, przeto

to poſpolicie wſzelkie inne ruchy, naprowadzaią ſię do tego rodzaiu ruchu; tak iż częſtokroć, zamiaſt coby miała bydź zadana bezśrzednie ſzypkość ciała, to zadaie ſię tylko wyſokość z któréy ciało powinnoby upaśdź, żeby nabyło téy ſzypkości mocą ſkutkuiącéy ważności.

Uważmy tedy na zakóńczenie téy materyi, iż wſzyſtkie okoliczności ruchu przyſpieſzonego, a zatém i ruchu, ciáł ważnych, zamykaią ſię w tych dwóch zrównaniach, $u = pt$, i $e = \frac{1}{2}pt^2$; tak iż maiąc znaiome p, byleby była wiadoma iedna z tych trzech rzeczy, to ieſt, albo czas, albo rozległość, albo ſzypkość, zawſze można wynaléśdź dwie inne, bądźto bezśrzednie, przy pomocy tego lub owego z dwóch zrównań wzwyż uſtanowionych, bądź też przy pomocy obu razém, połączonych iedno z drugiém, w ſpoſób w który poſtąpiliśmy ſobie wyżéy (176).

O Ruchach różnokſztáłtnych, czyli odmiénnych w ſpoſób bądź iaki chce rozmaity.

178. Kiedy ruchadło ieſt poddane czynności iakiéy ſiły, ſkutkuiącéy przeciwko niému bez uſtanku, ale w ſpoſób odmiéniaiący ſię co chwila, to ruch taki w powſzechności nazywa ſię *ruchém różnokſztáłtnym.*

tnym. Ruchu różnokſztáłtnego mamy przykłady, w odprężeniu ſprężyn, gdzie lubo ſzypkość, pomnaża ſię coráz bardziéy, ale ſtopnie takowego pomnażania, ſą coráz mniéyſze. Toż rozumié ſię o ſtopniach, którémi, ſtatek płynący przychodzi do iednokſztátności: czynność wiatru przeciwko żaglom, umniéyſza ſię tèm bardziéy, im większego ruchu nabywa ſtatek; bo takowy tém bardziéy odéymuie ſię pomiénionéy czynności wiatru, im większą ſzypkość ma ſtatek.

179, Fundamenta ſłużące do naznaczenia własnościów tego ruchu, mogą bydź łatwo wnieſione ſtąd, co ſię powiedziało o ruchach iednokſztáłtnych, i iednokſztáłtnie pomnożonych, a to w tèn ſpoſób. *1ód* Niechay będzie iaki chce ruch odmiénny, ieżeli go uważać będziémy względèm chwil niezmiérnie małych, to zawſze rozumieć można, że ſzypkość w przeciągu takowéy chwili nieodmiénia ſię. Lecz ſzypkość iednokſztáłtna, ma za wyrażenie, rozległość przebieżoną w czaſie iakimkolwiek t, rozdzieloną przez ténże czas t; więc kiedy takowa ſzypkość nieieſt iednokſztáłtną tylko przez iednę chwilkę, to na wyrażenie ſwoie, mieć będzie rozległość niezmiérnie małą, przebieżoną w téyże chwilce, i rozdzieloną przez tęż chwilkę. A zatém oznaczywſzy przez e rozległość przebieżoną, mocą ruchu odmiénnego w przeciągu czaſu iakiegokolwiek t, to de wyra-

żać

żać będzie, rozległość przebieżoną iednokſztáłtnie w przeciągu chwilki dt; będzie tedy $u = \frac{de}{dt}$, albo $de = udt$; *piérwſze zrównanie fundamentalne, należące do ruchów różnokſztáłtnych.*

180. *2re* Zrównanie $u = pt$, wyżèy wynalezione (166), wyrażaiące ſtóſunek zachodzący między ſzypkościami i czaſami w ruchach iednokſztáłtnie przyſpieſzonych, daie $p = \frac{u}{t}$. To ieſt, że kiedy ſiła przyſpiéſzaiąca, albo raczéy ilość p wymiérzaiąca takową ſiłę (170) ieſt ſtateczna, to na wyrażenie ſwoie mieć będzie, ſzypkość u nabytą w pewnym czaſie t, a rozdzieloną przez tenże czas t. Więc ieżeli ta ſiła przyſpiéſzaiąca p, w każdéy chwilce inaczéy ſkutkuie, to ieſt ieżeli nieieſt ſtateczną tylko przez iednę chwilkę, to powinna mieć na wyrażenie ſwoie, ſzypkość nabytą w przeciągu takowéy chwilki, rozdzieloną przez tęż chwilkę; to ieſt że powinna mieć na ſwoie wyrażenie, pomnożenie ſzypkości, rozdzielone przez pomnożenie czaſu; będzie tedy $p = \frac{du}{dt}$, albo $du = pdt$; *drugie zrównanie fundamentalne, należące do ruchów różnokſztáłtnych.*

181. W zrównaniu $u = pt$, przez p (166) rozumieliśmy, ſzypkość iakąby ruchadłu nadać mogła ſiła przyſpiéſzaiąca w przeciągu iakiego pewnego czaſu, (iakoto iedney minu-

ty

ty wtóréy), mocą czynności nieuſtannéy i zawſze równéy. Toż ſamo tedy i w zrównaniu $du = pdt$, przez p rozumiéć ſię powinno. Ale trzeba nam tu uważyć, że ponieważ ſiła przyſpiéſzaiąca rozumié ſię bydź odmiénną, przeto ilość p, przez którą oznacza ſię ſzypkość, iaką pomiéniona ſiła mogłaby ſprawić w przeciągu iednéy minuty wtóréy, gdyby ſkutkówała tak iak ſiła przyſpieſzaiąca ſtateczna, ta mówię ilość p odmiénia ſię za każdą chwilką ruchu. Jakóż łatwo to daie ſię poiąć, że kiedy ſiła przyſpiéſzaiąca ſtaie ſię mniéyſzą, to i ſzypkość, iaką mogłaby ſprawić ta ſiła w iednéy minucie wtóréy, mocą nieuſtannéy czynności ſwoiéy, ſkutkuiącéy równo w każdéy chwilce téyże minuty wtóréy, także muſi ſtawać ſię mniéyſzą; *i odwrotnie.*

182. Z dwóch zrównań, $de = udt$ i $du = pdt$, może bydź wnieſione inne trzecie, niemniéy pożytecznie ſłużące do użycia, tym ſpoſobém. Z zrównania $de = udt$, wyciąga ſię $dt = \frac{de}{e}$; a położywſzy tę wártość w zrównaniu $du = pdt$, po uczynioném zebraniu, będzie $pde = udu$.

183.

183. Uważmy, iż w zrównaniu którego użyliśmy do wynaleziénia zrównania $du = pdt$ (180), ſzypkość rozumieliśmy bydź roſnącą. Gdyby zaś była ubywaiąca, to zamiaſt du, trzebaby położyć $-du$ (21); tak, iż dwa poprzédzaiące zrównania, $du = pdt$ i $pde = udu$, powinny ſię tak piſać, $\pm du = pdt$ i $pde = \pm udu$, gdzie znak wyżſzy należy do ruchu przyſpiéſzonego, a znak niżſzy należy do ruchu opoznionego.

184. Jeſt ieſzcze i czwarte zrównanie wynikaiące z dwóch zrównań fundamentalnych, którégo nienależy nam tu opuścić. Jeſt zaś takie. Zrównanie $de = udt$, daie $u = \frac{de}{dt}$; więc $du = d\left(\frac{de}{dt}\right)$; położywſzy tę wártość w zrównaniu $pdt = \pm du$, będzie $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$. A poczytawſzy (co zawſze wolno) ilość dt za ſtateczną, będzie $pdt = \pm \frac{dde}{dt}$, albo $pdt^2 = dde$. A o tém trzeba dobrze pamiętać że tu dt rozumie ſię bydź ſtateczne. Uważaiąc zaś dt, iako odmiénne, trzeba używać zrównania, $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$. Będziemy mieli okazyą nieráz użyć pożytecznie tych formuł. Ale na to trzeba zawſze pomnièć, że ilość p zawiéraiąca ſię w tych zrównaniach, wyraża ſzypkość odpowiadaiącą każdéy chwilce, iaką ſiła przyſpiéſzaiąca, mogłaby nadać ruchadłu, w przeciągu czaſu wiadomego, iakoto iednéy minuty wtóréy, gdyby przez takową minutę wtórą tak ſkutkówała, iak ſiła ſtateczna przyſpiéſzaiąca; a zatèm ponieważ ta ilość p, ieſt wymiarém ſkutku odpowiadaiącego każdéy chwil-

chwilce, iaki może ſprawić ſiła przyſpieſzaiąca, przeto dla krótſzego wyrażenia, odtąd nazywać będziemy tę ilość p ſiłą przyſpieſzaiącą.

O Równowadze między ſiłami w brew ſobie przeciwnémi.

185. Dotąd uważaliśmy ruch, iaki powinno miéć ciało, poddane czynności ſiły, ſkutkuiącéy przeciwko niemu zawſze w iednakowym kierónku. Ale ieſzcze nieuczyniliśmy żadnéy wzmianki o ſpoſobie, w iaki, tén ruch przechodzi w ruchadło. Na rozebraniu téy rzeczy niemało nam zależy; ale że prawa podług których udziéla ſię takowy ruch, zawiſły od praw należących do równowagi, iak zobaczymy niżéy, przeto trzeba nam wprzód zaſtanowić ſię nad témi. Teráz rzecz tu będzie, tylko o Równowadze między ſiłami w bréw ſobie przeciwnémi. Gdzie ſiły, oznaczać będziemy przez ſkutki, do których ſprawiénia ſą zdólne, iak iuż uczyniliśmy wyżéy; to ieſt każdą oznaczymy przez ilość ruchu pewnéy miąźſzości wiadoméy. Ale żebyśmy wiele rzeczy razém nieobéy-

béymówali, uważać będziémy te miąźſzości, każdą iakoby w iedén punkt zebraną, któremu w myśli naznaczymy też ſamę ilość materyi którą ma całe ciało. Jakóż zobaczymy niżéy, iż w rzeczy ſaméy, we wſzyſtkich ciałach znayduie ſię taki iedén punkt, którym udziéla ſię ruch, tak iak gdyby w nim cała miąźſzość była ſkupiona. Nadto uważać będziémy ciała, (póki nieoſtrzeżemy inaczéy), iako złożone z cząſtek doſkonale twardych, i tak połączonych iedne z drugiémi, iż w położeniu ich żadna ſiła nic odmiénić niémoże.

186. To założywſzy na przód, zmyślmy ſobie dwie miąźſzości czyli bryły M i m (fig. 27); piérwſzą popędzoną od A ku C *fig. 27.*
z ſzypkością V; drugą popędzoną od C ku A, z ſzypkością u; kiedy te dwie bryły ſpotkaią ſię z ſobą, to zoſtaną w równowadze, ieżeli ilość ruchu bryły M, równa ſię ilości ruchu bryły m; to ieſt ieżeli (158) będzie $MV = mu$.

Jakóż naprzód iawna ieſt, że ieżeli dwie bryły M i m ſą ſobie równe, i obie ſzypkości V i u także ſobie ſą równe, to muſi bydź między témi dwiéma bryłami równowaga; bo w takim razie, taż ſama przyczyna, która naznaczyłaby ſię na dowód tego, że M powinno przemódz m, dowodziłaby na odwrót że m powinno przemódz M; ponieważ wſzyſtko z obu ſtrón znayduie ſię w równości. Teráz daymy że M ieſt dwa razy tak wielkie iak m; ale natomiaſt znowu u niech będzie dwa razy tak wielkie iak V; tak iżby *np.* M przebiégało iednę ſtopę, a m dwie ſtopy w iednéy minucie wtórey. Jawna ieſt, że mogę uważać M iakoby złożone z dwóch miąźſzościów równaiących ſię bryle m; i że w ſaméy chwilce uderzenia, mogę wyſtawić ſobie w myśli ciało m, iakoby nadane ſzypkością iednèy ſtopy na iednę minutę wtórą, do któréy w téyże chwilce byłaby dodana drúga ſzypkość, wynoſząca także iednę ſtopę na iednę minutę wtórą. A natenczas, wolno mi ieſt zmyślić ſobie, że w uderzeniu, bryła m wyniſzcza iednę z ſwoich ſzypkościów przeciwko części bryły M, równaiącéy ſię téyże całéy bryle m; a drugą ſzypkość wyniſzcza, przeciwko drugiéy części takiéyże pozoſtałéy bryły M.

Teráz zaś, gdyby zamiaſt cośmy uważali bryły M i m w ſtóſunku Q do 1, a przeciwnie ſzypkości ich w ſtóſunku 1 do Q, gdybyśmy mówię rozumieli ie bydź w iakimkolwiek innym ſtóſunku; to iawna ieſt, że można zawſze wyſtawić ſobie w myśli większą bryłę iakoby rozłożoną, na pewną liczbę brył równaiących ſię mniéyſzéy bryle, z których każda wyniſzcza w mniéyſzéy bryle ſzypkość rownaiąiącą ſię ſwoiéy ſzypkości, tak iż zaſadę naſtępuiącą można położyć za powſzechną.

ZASADA FUNDAMENTALNA.

Dwa ciała ſkutkuiące iedno przeciw drugiemu, w kierònku linii w bréw ſobie przeciwnych, zoſtaią w równowadze, kiedy ich ilości ruchu ſą ſobie równe; to ieſt, kiedy mnogość wynikaiąca z rozmnożenia miąźſzości iednéy bryły, przez ſzypkość iaką ieſt nadana, równa ſię mnogości, wynikaiącéy z rozmnożenia miąźſzości drugiéy bryły, przez ſzypkość odpowiadaiącą téyże drugiéy bryle. To podanie w powſzechności zawſze ma miéyſce, czyto będą dwa ciała takie, które ſwobodnie dążą iedno naprzeciwko drugiemu, czy takie, że iedno drugie popycha, przy pomocy linii Mm ani giętkiéy ani miąźſzéy; czyli téż naoſtatek takie, że iedno drugie pociągnie w rozumiéniu przeciwném przy pomocy nitki Mm nieociągaiącéy ſię (inextenſible). I odwrotnie, ieżeli dwa ciała ſą w równowadze, to trzeba ſtąd wnieść, że ich ruchy ſą ſobie w brew przeciwne, i ilości ruchu maią równe.

187. Więc, ieżeli trzy, albo większa liczba ciał M, m, m' i. t. d. (fig. 28), będących w ruchu albo dążących do ruchu w kiérónku iednéyże linii, z ſzypkościami V, u, i u', znayduie ſię w równowadze, to ſumma ilościów ruchu ciał czyniących w iedném rozumiéniu, muſi bydź równa ſummie ilościów ruchu, ciał czyniących w rozumiéniu przeciwnèm. *fig. 28.*

Albowiém, ieżeli znayduią ſię w rówowadze, to zawſze można rozumiéć, że gdy M i m dążą w iednę ſtronę, to m wyniſzcza iednę część ruchu ciała m', a M wyniſzcza reſztę. Lecz oznaczywſzy przez x, ſzypkość, iaką utraca m' mocą czynności ciała m, mieć będziém $m'x$, na ilość ruchu, wyniſzczoną mocą takowéy czynności;

ści; będzie tedy $mu = m'x$; a zatém ciału M, niezoſtanie do wyniſzczenia w ciele m; tylko reſzta pozoſtałéy ilości ruchu, to ieſt $m'u' - m'x$; więc będzie $MV = m'u' - m'x$; albo z przyczyny że $m'x = mu$, będzie $MV = m'u' - mu$, to ieſt $MV + mu = m'u'$.

O Ruchu składanym.

188. Rozumiéć i tu trzeba, że miąż-ſzości do których ſą przyłożone ſiły, o iakich mówić mamy, ſą ſkupione iakoby w ieden punkt. Nazywa ſię Ruch ſkładany, tén, iaki bierze ciało, razém popędzone od wielu ſił, maiących takie kierónki iakie ſię ſpodoba.

Jeżeli ciało M popędzone w kierónku linii proſtéy AB (fig. 29), dobiegłſzy punktu M, odbiéra nowy popęd w kierónku linii MD, proſtopadłéy linii AB; takowy popęd niémoże uczynić innego ſkutku, tylko że muſi oddalać ciało M od linii AB; niémoże zaś ani powiękſzyć ani umnièyſzyć téy ſzypkości, iaką powzięło na oddalenie ſię od linii CD, proſtopadłéy linii AB. Jakóż, ponieważ kierónek CD ieſt proſtopadły kierónkowi AB, więc niéma żadnéy przyczyny ażeby ſiła czyniąca w kierónku CD, ſkutkówała raczéy w prawą aniżéli w lewą ſtronę téy linii; a iż niémoże ſkutkówać razém na obie ſtrony, więc niepowinna ſkutkówać ani na tę ani na owę. fig. 29.

Toż ſamo rozumówanie miałoby miéyſce, gdybyśmy pozwolili że ciało M, popędzone w kierónku linii CD, odebrało nowy popęd w kierónku MB; ta oſtatnia ſiła ani-

aniby uięła aniby co przydała do ſzypkości, z którą ciało M dążyło do oddalenia ſię od linii MB.

189. ZASADA FUNDAMENTALNA.

Jeżeli dwie ſiły P *i* Q *(fig. 30), których kierónki czynią kąt proſty, ſkutkuią razém w iednéyże chwilce przeciwko ruchadłu* M; *ſiła* Q *niech będzie taka, iż mocą czynności ſwoiéy momentalnéy, mogłaby ſama nadać mu zdolność do przebieżenia linii* MB *w pewnym iakowym wyznaczonym czaſie, iakoto w iednéy minucie wtóréy; a ſiła* P *niech będzie taka, iżby temuż ruchadłu mogła nadać zdolność do przebieżenia linii* MD *w tymże czaſie; to mówię że mocą złożonéy czynności tych dwóch ſił razém ſkutkuiących, ruchadło* M, *w tymże czaſie, przebieży przeciwproſkątną* ME *równoległoboku* DMBE, *maiącego za boki też liniie* MB *i* MD. fig. 30.

Ponieważ obie ſiły ſkutkuią razém w iednéyże chwilce przeciwko ruchadłu, więc można rozumiéć iż znaydówało ſię w ruchu w kierónku linii PD, i że dobiégłſzy do punktu M, w tymże momencie ſiła Q proſtopadła linii PD, daie mu także ſwóy popęd; lecz podług tego co ſię powiedziało dopiéro wyżéy (188), ta ſiła Q niémoże ani pomnożyć ani umniéyſzyć ſzypkości, z którą ruchadło dążyło od oddalenia ſię od linii

nii QB; więc ieżeli przez punkt D poprowadzi ſię liniia DE równoległa linii MB, to ruchadło na końcu iednéy minuty wtóréy, muſi znaydówać ſię na iakim punkcie linii DE, któréy wſzyſtkie punkta, ſą oddalone od linii QB na ilość równaiącą ſię linii MB. Lecz toż ſamo rozumówanie dopiéro użyte do ſiły P względém ſiły Q, ſtóſuie ſię ſłowo w ſłowo do ſiły Q względém ſiły P; więc ieżeli przez punkt B poprowadzi ſię liniia BE równoległa liniii PD, to ciało M, na końcu téyże iednéy minuty wtóréy muſi znaydówać ſię na którym punkcie linii BE. Ale że niéma tylko iedén punkt E, któryby ſpólnie należał tak do linii DE iako też do linii BE, więc ruchadło na końcu iednéy minuty wtóréy znaydówać ſię muſi w punkcie E.

Nadto iawna ieſt (150), że niechay wezmie drogę iaką chce ruchadło, popędzone mocą momentalnéy czynności dwóch ſił, to zawſze ta droga muſi bydź liniią proſtą; bo po nadaniu popędu, pomiénione ſiły więcéy przeciwko niému nieczynią; a zatém ponieważ tór téy drogi powinién przechodzić przez M i przez E, więc takową drogą muſi bydź liniia ME, to ieſt przeciwproſtkątna równoległoboku $DMBE$. Przydaymy do tego, iż to ciało przebiéga liniią ME w ruchu iednokſztáłtnym, bo natychmiaſt, po złożonéy czyli ſpólnéy czynności przeciwko niemu dwóch ſił, ieſt zoſtawione ſamo ſobie (150).

190. Ponieważ dwie ſiły P i Q, czyniąc ſpólnie przeciwko ruchadłu, nieſprawuią innego ſkutku, tylko że mu nadaią zdólność do przebie-

że-

żenia przeciwproſtkątnéy ME, więc wniéśmy ſtąd. 1^{ód} Że zamiaſt dwóch ſił których kierónki czyniłyby kąt proſty, zawſze można użyć tylko iednéy ſiły, byleby takowa, mogła nadać ruchadłu zdolność, do przebieżenia przeciwproſtkątnéy równoległoboku, maiącego takie boki, z których każdy zoſobna, mogłby bydź przebieżony od tegóż ruchadła, mocą czynności ſiły odpowiadaiącéy temu każdemu bokowi. Takowa iedna ſiła ME wynikaiąca z dwóch ſił MB, MD nazywa ſię *złożona* z tych dwóch ſił. Ponieważ liniie MB, MD, oznaczaią ſkutki, do iakich ſą zdolne ſiły Q i P każda zoſobna, a liniia ME oznacza ſkutek, do iakiego ſą zdólne te dwie ſiły razém złączone, więc można ſobie w myśli wyſtawić, liniie MB, MD, ME, iakoby oznaczały ſame takowe ſiły.

2re Można też uważać ſiłę iednę iakąkolwiék ME, iakoby powſtaiącą z dwóch innych ſił MB, MD, których kierónki czyniłyby między ſobą kąt proſty, byleby, kiedy ta iedna ſiła oznaczy ſię przez

 prze-

przeciwproſtkątną ME, tamte dwie były oznaczone przez dwa boki MB, MD równoległoboku. Można tedy zamiaſt iedney ſiły ME, użyć dwóch ſił MB i MD; bo w ſamym ſkutku z takowych dwóch ſił niewynika tylko ſiła ME.

191. *Ogołém, kierónki dwòch ſił* P i Q, *(fig. 31. 32), niechay czynią między ſobą kąty bądź iakiekolwiek, kiedy te dwie ſiły razém ſkutkuią przeciwko ruchadłu* M; *to takowe ruchadło, przebieży przekątną* ME *równoległoboku* DMBE, *którego boki położone w kierónkach tych ſił, oznaczaią ſkutki, do iakich ſą zdolne te ſiły każda zoſobna; przebieży mówię tę przekątną, w tymże czaſie, w iakim mocą czynności iedney z tych dwóch ſił, przebiegłoby bok oznaczaiący takową ſiłę.* *figura* 31. 32.

Jakóż, zmyślmy ſobie liniią FMH proſtopadłą przekątnéy ME, poprowadzoną przez punkt M; i że przez punkta D, i B, ſą poprowadzone inne liniie DF, BH równoległe, tudzież liniie DG, BI, proſtopadłe téyże przekątnéy. Zamiaſt ſiły P, oznaczonéy przez MD czyli przez przekątną równoległoboku $FMGD$, można (190), wziąść dwie ſiły MF i MG. Z téyże przyczyny, zamiaſt ſiły Q, oznaczonéy przez przekątną MB równoległoboku MH BI,

BI, można wziąść dwie ſiły MH i MI. A zatém zamiaſt dwóch ſił P i Q, można użyć cztérech ſił MF, MG, MH, MI; z których złożona iedna ſiła muſi bydź taż ſama, co z dwóch piérwſzych. Z tych zaś cztérech ſił, dwie MH i MF, nieprzykładaią ſię nic do ſiły złożoney, iako czyniące w kierónkach przeciwnych, a ſobie równe. Jakóż, łatwo widzieć ſię daie, że dwa tróykąty DGM, EIB ſą ſobie równe, z natury równoległoboku; więc $DG = BI$; a zatém też $MF = MH$.

A co ſię tyczè dwóch ſił MI, MG, tych kierónki ponieważ znayduią ſię w téyże linii; więc ſkutkiém z nich wynikaiącym, powinna bydź ſumma dwóch ſkutków MG, MI (fig. 31), gdzie te dwie ſiły czynią w témże rozumieniu; a (fig. 32) ſkutkiém powinna bydź różnica tychże ſił, gdzie czynią w rozumiéniu przeciwném. Ale że tróykąt EIB równa ſię tróykątowi DGM; więc będzie (fig. 31). $MI + MG = MI + EI = ME$; a (fig. 32), $MI - MG = MI - EI = ME$; więc cztèry ſiły MF, MH, MG, MI, a zatém i dwie ſiły MD, MB niewyprowadzaią innego ſkutku tylko ſiłę ME, wyrażoną przez przekątną równoległoboku $DMBE$, którego dwa boki MB, MD oznaczaią dwie ſiły Q i P. *fig.* 31. *fig.* 32.

192. W tèm co poprzédziło, dwie ſiły P i Q (fig. 30. 31. 32), oznaczyliśmy przez liniie MD, MB, do których przebieżenia, poměnione dwie ſiły, nadałyby zdolność ruchadłu M; to ieſt oznaczyliśmy ie przez ſzypkości, iakie mogą mu nadać; lubo podług tego, co rzekło ſię indziéy (158), pra- *fig.* 30. 31. 32.

prawdziwym wymiarém ſił, powinna bydź ilość ruchu, iaką mogą ſprawić. Ale że ilości ruchu (159), ſą między ſobą w ſtóſunku ſzypkościów, kiedy miąźſzość bryły ieſt taż ſama, iak w teraznieyſzym przypadku; więc na oznaczenie takowych dwóch ſił zawſze możemy wziąść ſzypkości *MD* i *MB*.

Ale ieżeli zamiaſt zadanych bezśrzednie ſzypkościów, iakie ruchadłu *M* mogą nadać ſiły *P* i *Q*, byłyby zadane ilości ruchu, iakie, pomiénione ſiły mogą ſprawić w miąźſzościach znaiomych, to w takim razie liniie *MD* i *MB*, trzebaby wziąść w ſtóſunku takowych ilościów ruchu. *Np.* gdybym nieznał ſił *P* i *Q*, tylko z téy własności, że ſiła *P*, może nadać ſzypkość wiadomą u bryle wiadoméy m, a ſiła *Q* może nadać ſzypkość wiadomą u' bryle wiadoméy m'; to w takim razie zrobiłbym $MD : MB : mu : : m'u'$. Albowiém, podług tego co ſię rzekło, trzebaby zrobić $MD : MB$ w ſtóſunku ſzypkościów, iakie mogą nadać te dwie ſiły ruchadłu *M*; a że piérwſza ſiła, mogąca ſprawić ilość ruchu mu, ieſt zdólna do nadania ruchadłu ſzypkości $\frac{mu}{M}$ (158), a druga ſiła *Q* z téyże przyczyny, ieſt zdólna do nadania ruchadłu *M* ſzypkości $\frac{m'u'}{M}$; więc trzebaby zrobić $MD : MB : : \frac{mu}{M} : \frac{m'u'}{M}$; lecz $\frac{mu}{M} : \frac{m'u'}{M} : : mu : m'u'$;

więc

więc w rzeczy saméy należy zrobić *MD* i *MB* w ſtóſunku ilościów ruchu, wymierzaiących pomiénione ſiły *P* i *Q*. Ta uwaga może bydź pożyteczna, w porównywaniu ſkutków odpowiadaiących różnym ſiłóm, przyłożonym do różnych ruchadeł. Ogólne podanie wzwyż wywiedzione (191). ieſt wielce użyteczne; bo to wſzyſtko co ma naſtąpić, niebędzie tylko prawie iego przyſtóſowaniém.

193. Stąd iawnie pokazuie ſię, że ieſt rzeczą wcale oboiętną, uważać ciało, iakoby popędzone ſpólną czynnością dwóch ſił *MB* i *MD* (fig. 31. 32.), czyniących między ſobą kąt iakikolwiek, albo też uważać go iakoby popędzone mocą tylko iednéy czynności oznaczonéy przez przekątną *ME*. I odwrotnie, wcale na iedno wychodzi, uważać ciało iakoby popędzone, mocą tylko iednéy ſiły *ME*, albo też uważać go iakoby popędzone, ſpólną czynnością razém dwóch ſił, oznaczonych przez boki równoległoboku, w którymby ſiła *ME* była przekątną. figura 31. 32.

Np. niechay ciało iakie, w przeciągu iednéy minuty wtóréy ruchém iednokſztáłtnym, przebiéga od *M* do *E*; albo też niechay zoſtaie w ruchu wzdłuż linii *MB*, tak ażeby ią przebiegło w iednéy minucie wtóréy, a oráz niechby taż liniia była prze-

nie-

niesiona równolegle sama sobie wzdłuż linii *MD*, tak iżby przebiegła *MD* w téyże minucie wtóréy, to w takim razie znaydzie się, że ciało w tym drugim ruchu zarówno nieprzebieży innéy linii, tylko *ME*.

194. Ponieważ dwie siły *MB*, *MD* spotykaią się w punkcie *M*, więc koniècznie muszą znaydówać się na téyże płaszczyznie (Jeom. 177). A że z tych dwóch sił powstaiąca iedna siła, wyraża się przez przekątną *ME*, która iest położona na téyże płaszczyznie równoległoboku; więc można powiedzieć w powszechności: Ze *dwie siły spotykaiące się, znayduią się zawsze na téyże płaszczyznie, na któréy znayduie się iedna siła z nich złożona.*

O składaniu i rozkładaniu sił.

195. Na fundamencie dopiéro wyżéy podanym, nietylko można dwie siły spólnie czyniące przemiénić w iednę, iako téż iednę siłę rozłożyć na dwie inne; ale téż ogółém można zbić w iednę siłę tyle sił ile się spodoba, byleby wszystkie, albo znaydówały się na iednéyże płaszczyznie, albo wszystkie zbiégały się w iednym punkcie. I odwrotnie, można zawsze rozłożyć iednę lub więcéy sił, na taką liczbę innych sił iaka się spodoba.

196. Ale wprzód nim przystąpimy, do pokazania jak się to wy-

wykonywa, trzeba uważyć, że kiedy siła *P*, (fig. 33), czyni przeci- *fig.* 33.
wko iakiemu ciału, bądźto popędzaiąc go, bądź téż pociągaiąc go do siebie, mało na tèm zależy, rozumiéć w którymkolwiek punkcie kierónku tèy siły bydź położoną iéy czynność.

Np. iedno to iest, czy siła *P* pociąga do siebie ciało *C* w punkcie *P*, przy pomocy pręta ani miąższego ani giętkiego, lub nitki nieociągaiącéy się i niemiąższéy, albo téż czy go pociąga w punkcie *A* albo w punkcie *B*, albo w punkcie *C*, albo téż czy go popędza w iakimkolwiek innym punkcie *D*, spoionym z témże ciałèm. Byleby tylko czynność siły odbywała się w iednymże kierónku, to zawsze sprawówać będzie tenże sam skutek. Odległość niémoże wpływać w takowy skutek, tylko w tén czas, kiedyby czynność siły udziélała się przy pomocy iakiego narzędzia, iakoto drąga albo sznura, którego miąższość dzieliłaby czynność pomiénionéy siły.

I tak ieżeli dwie siły *P* i *Q* (fig. 34), *fig.* 34.
skutkuiące na iednéyże płaszczynie w kierónkach linii *AQ*, *BP*, pociągaią albo popędzaią ciało w dwóch punktach *A* i *B*; to takowe ciało nieinaczéy znayduie się bydź nagabane, tylko iak gdyby te dwie siły ciągnęły go obie w punkcie *I*, gdzie się zbiégaią, w tychze kierónkach iak piérwéy. To założywszy, przystąpmy teráz do sposobów składania i rozkładania sił.

197.

197. Daymy że mamy cztéry
fig. 35. ſiły $P, Q, R, S,$ (fig. 35) ſkutkuiące w kierónkach OP, AQ, BR, TS, wſzyſtkie położone na iednéyże płaſzczyznie. Przedłużmy naprzód myślą kierónek PO, ażby ſię ſpotkał z kierónkiém AQ w punkcie A; pozwólmy przy tèm, że AD i AE ſą rozległości, do których przebieżenia, w pewnym czaſie iakoto w iednéy minucie wtóréy, odpowiadaiące im ſiły P i Q mogłyby nadać zdolność iakiemu pewnemu ruchadłu; ieżeli zamkniémy równoległobok $AEID$, to liniia przekątna AI, wyrażać będzie (191), czynność wynikaiącą z dwóch ſił P i Q, a zatém może zaſtępówać miéyſce tych dwóch ſił.

Zmylśmy ſobie daléy, że liniia AI przedłużona, ſpotyka ſię w punkcie B z kierónkièm BR, ſiły R; a zrobiwſzy liniią $BM = AI$, ieżeli wezmiémy BF, na wyrażenie rozległości, do któréy przebieżenia w iednéy minucie wtóréy, ſiła R może nadać zdolność temuż ruchadłu co wyżéy; to naténczas, rozumieiąc ſiłę AI przyłozoną w punkcie B, (gdyż ta ſiła oznacza ſię przez $BM = AI$), z iéy czynności ſpólnéy z ſiłą R, wyniknie iedna ſiła, oznaczona przez przekątną BG równoległoboku $BMGF$; takowa tedy ſiła, będzie zaſtępó-

wać

wać miéyſce ſiły R i ſiły AI, to ieſt będzie zaſtępówać miéyſce trzech ſił R, Q i P.

Naoſtatek zmyślmy ſobie, że liniia BG przedłużona, ſpotyka ſię z kierónkiém TS, ſiły S, w punkcie C, a zrobiwſzy $CK = BG$, daymy że CH wyraża rozległość, do któréy przebieżenia w iednéy minucie wtóréy ſiła S może nadać zdólność temuż ruchadłu co wyżéy; to naténczas, rozumieiąc ſiłę BG przyłożoną w punkcie C w kierónku CG, oznaczoną przez CK, z ſpolnéy czynności téy ſiły z ſiłą S, wyniknie iedna uſilność oznaczona przez przekątną CN równoległoboku $CHNK$. Takowa tedy ſiła, będzie zaſtępówać miéyſce ſiły S i ſiły CK albo BG; a zatèm będzie zaſtępować miéyſce cztérech ſił P, Q, R, S; więc ieſt złożona z tychże cztérech ſił. A ſtąd pokazuie ſię, iż można zawſze i iak można, przemiénić w iednę ſiłę tyle ſił, ile ſię ſpodoba, kiedy kierónki ſwoie maią na iednéyże płaſzczyznie.

198. Tén przykłád naucza także, iakim ſpoſóbém można zamiaſt iednéy ſiły, użyć tyle innych ſił ile ſię ſpodoba, i iakie warunki powinny miéć te nowe ſiły.

Np. (fig. 35), zamknąwſzy równoległobok iakikolwiek $BFGM$, w którym liniia BG byłaby przekątną, można zamiaſt iednéy ſiły BG, wziąść inne dwie oznaczone przez BF i BM. A że każdą z tych dwóch ſił, wolno ieſt rozumiéć przyłożoną w takim punkcie ich kierónków iaki ſię ſpodoba, więc można przeſtawić BM na AI, punkt A niechby znaydówał ſię w iakiéy chce odległości od B, i będzie można na fig. 35.

AI

AI iako przekątnéy złożyć inny równoległobok iakikolwiek *AEID*; a naténczas znowu zamiaſt ſiły *AI* będzie można wziąść dwie inne ſiły oznaczone przez *AE* i *AD*; tak iż zamiaſt iednéy ſiły *BG*, mogą bydź użyte trzy ſiły *BF*, *AE*, *AD*, czyniące razém ténże ſam ſkutek co tamta.

199. Uważmy tu, że ponieważ do naznaczenia ſił *AD*, *AE* niéma innego warunku, iak tylko ażeby były wyrażone przez boki *AD*, *AE* równoległoboku *ADIE*, maiącego *AI* za przekątną, co może mieć miéyſce niezmiérnie wielą ſpoſpoſobami, czyto równoległobok *ADEI*, znayduie ſię bydź położony na płaſzczyznie równoległoboku *FBMG*, czy téż na iakiéykolwiek innéy płaſzczyznie; więc zawſze można ſiłę iakąkolwiek *BG* rozłożyć na tak wiele ſił i położonych na takich płaſzczyznach, iak ſię ſpodoba. Zobaczymy niżéy użycie takowego ſkładania i roſkładania ſił.

200. Z przykładu rozłożenia ſił dopiéro wyżéy położonego, pokazuie ſię, iż można ile razy ſpodoba ſię w to potrafić, ażeby niektóre ſiły przechodziły przez pewne zadane punkta, a nawet żeby miały pewną iaką zadaną wielkość; ażeby były równoległe pewnym liniióm danym; słowém żeby czyniły zadość iakim pewnym warunkóm danym.

Np. gdyby była zadana ſiła oznaczona przez liniią *AB* (fig. 36); chcąc zamiaſt téy ſiły użyć dwóch innych ſił, z których iedna przechodząc przez punkt zadany *O*, byłaby równoległa linii danéy z położenia *ST*, a oraz miałaby pewną wielkość *SK*; to ieſt żeby była taka, iżby pewnemu iakiemu ruchadłu nadała zdólność do przebieżenia linii *SK*, w tymże czaſie, w którym toż ruchadło popędzone mocą ſiły oznaczonéy przez *AB*, zdółałoby przebieżyć liniią *AB*; to takowe zagadniénia możnaby rozwiązać na fundamentach poprzédzaiących w ſpoſób naſtępuiący. *fig. 36.*

Przez punkt *O* trzeba poprowadzić liniią *OV*, równoległą linii *ST*, któraby ſpotkała ſię w iakim punkcie *V* z liniią *AB*; potém zrobiwſzy $VR = SK$, a $VQ = AB$, i poprowadziwſzy liniią *RQ*, trzeba przez punkt *V* poprowadzić inną równoległą iéy *VH*, która ma bydź zakończona w punkcie *H* przez liniią *QH*, równoległą linii *VR*; naténczas *VR* będzie ſiłą żądaną, a *VH* będzie taką ſiłą, która wraz z ſiłą *VR*, zaſtępowałaby miéyſce ſiły *VQ* albo *AB*. To rozwiązanie niemniéy miałoby miéyſce, gdyby liniia *ST* była równoległa linii *AB*; ale zobaczymy w krótce iak w takowym przypadku poſtąpićby ſobie potrzeba.

201. Uważny ieſzcze, że ponieważ dwie ſiły ſpólne P i Q (fig. 31. 32), będąc oznaczone przez dwa boki MD i MB równoległoboku $DMBE$, ſiła z nich złożona muſi bydź wyrażona przez przekątną ME tegóż równoległoboku, więc oznaczywſzy tę ſiłę złożoną przez R, będzie $P : R :: MD : ME$, i $Q : R :: MB : ME$, to ieſt $P : Q : R :: MD : MB : ME$, albo (z przyczyny że $MD = BE$) $:: BE : MB : ME$. Lecz w tróykącie MBE podług (Jeom. 303) wypada $BE : MB : ME ::$ wſt. BME : wſt. BEM : wſt. MBE, albo z przyczyny równoległych BE i MD czyniących, że kąt $BEM = DME$, a kąt MBE ieſt ſpełniéniém kąta BMD, a zatém (Jeom 279). że wſt. $MBE =$ wſt. BMD, będzie $BE : MB : ME ::$ wſt. BME : wſt. DME : BMD; więc także będzie $P : Q : R ::$ wſt. BME : wſt. DME : wſt. BMD; gdzie można uważyć, że ieżeli ſiła P rozumié ſię bydź wyrażona przez wſt. BME, to ſiła Q będzie wyrażona przez wſt. DME, a ſiła R przez wſt. BMD; to ieſt, że dwie ſiły ſkładaiące i ſiła z nich złożona, zawſze mogą bydź wyrażone, każda z nich przez wſtawę kąta, zawartego między kierónkami dwóch innych.

figura 31. 32.

A tak na oznaczenie ſił, można wziąść zarówno czyto ſame liniie w których kierónku ſkutkuią, czy téż wſtawy kątów zawartych między ich kierónkami, byleby każda była wyrażona przez wſtawę kąta zawartego między kierónkami dwóch innych. Tén oſtatni ſpoſób oznaczania ſił, ma także ſwoie właſne pożytki, iak zobaczymy niżéy.

202. Jeżeli z punktu M iako ze śrzodka (fig. 37. 38) promiéniém iakimkolwiek ME nakryśli ſię łuk kołowy HEG ſpotykaiący ſię w punktach G i H z kierónkami ſił P i Q przedłużonémi, i ieżeli z punktu E wyſtawią ſię liniie EF, EI proſtopadłe liniióm MD, MB; a z punktu H, liniia HL proſtopadła linii MD, to łatwo poſtrzédz można, że liniie EF, EI, HL, będą odpowiadaiącémi wſtawami kątów DME, BME, i BMD; a zatèm będzie $P : Q : R :: EI : EF : HL$.

figura 37. 38.

203. Zmyślmy ſobie teráz, że kiedy kierónki dwóch ſił P i Q (fig. 39. 40) ſtatecznie przechodzą przez dwa punkta ſtałe K i N; punkt M, w którym ſpotykaią ſię, oddala ſię coráz bárdziéy; iawna ieſt, że w takim razie wſtawy kątów BME, DME, i BMD coráz bardziéy zmniéyſzać ſię będą; * a zatém téż że coráz bardziéy zbliżać ſię będą do pomiéſzania ſię w iedno z łukami EH, EG, GH; więc ieżeli punkt M oddali ſię niezmiérnie, to liniie EF, EI, i HL wſzyſtkie znaydą ſię bydź przyſtaiące do łuku GH, który przemiéni ſię w liniią proſtą i proſtopadłą dwóm liniióm MK i MN, naténczas równoległym i ſobie ſpolnie i linii ME. A że zawſze wypada $P : Q : R :: EI : EF : HL$, i w takim razie ſtaie ſię $HL = EI + EF$ (fig. 39),

figura 39. 40.

* *Trzeba ſobie przypomniéć (Jeom. 279) że wſtawa kąta wklękłego ieſt taż ſama co wſtawa iego ſpełniénia.*

fig. 40. 39), a (fig. 40) toż $HL = EI - EF$, więc
figura idzie zatém, *że kiedy dwie ſiły* P *i* Q (*fig.* 41.
41. 42. 42) *maią kierònki wzaiemnie ſobie ròwnolegle,* to 1ód *Siła z nich złożona ieſt im także ròwnoległa.* 2re *Ze poſtawiwſzy liniią* FI *proſtopadłą takowym kierónkóm, każda z tych ſił będzie wyrażona przez część takowéy proſtopadłéy, zawartą między kierónkami dwòch innych.* 3cie *Ze ſiła złożona, równa ſię ſummie dwóch ſkładaiących, kiedy ſiły ſkładaiące ſkutkuią w iednęż ſtronę; a znowu ròwna ſię onych rożnicy, kiedy ſkutkuią w ſtrony przeciwne.*

figura 41. 42. 204. Ponieważ (fig. 41. 42.) mamy, $P : Q : R :: EI : FE : FI$, więc będzie $P : Q :: EI : FE$, i $P : R :: EI : FI$; to ieſt, *że maiąc dwie ſiły składaiące równolegle i trzecią złożoną z tych dwóch, dwie z nich ſą zawſze między ſobą w ſtóſunku odwrotnym dwóch proſtopadłych, poſtawionych na kierònkach takowych dwóch ſił z iednegoż punktu, wziętego na kierónku trzeciéy ſiły.*

205. Jeżeli poprowadzi ſię podług upodobania liniia ABC, to będzie (Jeom. 102), $BC : AB : AC :: EI : FE : FI$; więc będzie także, $P : Q : R :: BC : AB : AC$; to ieſt w powſzechności, że *przeciąwſzy kierónki dwóch ſił ròwnoległych, i trzeciéy złozonéy z tych dwóch, przez liniią proſtą poprowadzoną iak ſię ſpodoba, każda z tych ſił będzie mogła bydź wyrażona przez część takowéy linii proſtéy, zawartą między kierónkami dwóch innych.*

206. A ſtąd łatwo ſobie wnieść można, iak ſię trzeba obéyśdź w wynaydówaniu ſiły iakiéy, złożonéy z wielu równoległych, i odwrotnie iak ſobie poſtąpić, chcąc użyć iednéy ſiły iakiéykolwiek, zamiaſt innych ſił równoległych, tak wielu iak ſię ſpodoba.

Np. maiąc przemiénić na iednę ſiłę dwie ſiły P i Q (fig. 41), ſkutkuiące w iednęż ſtronę. Prowadzę liniią iakąkolwiek ABC; ſiła złożona z tych dwóch ſił powinna równać ſię ſilóm $P + Q$ (203): nieidzie tedy tylko o wynaleziénie punktu B, przez który ma przechodzić. Lecz podług (205), mamy $P : R :: BC : AC$; trzeba tedy między dwóma punktami A i C obrać punkt taki, ażeby było $BC = \frac{P \times AC}{P + Q}$. Jeżeli pomiénione dwie ſiły ſkutkuią w rozumiéniu przeciwném (fig. 42), to ſiła z nich złożona równać ſię będzie onych różnicy (203), to ieſt będzie $= P - P$ albo $Q - P$. Daymy że ſiła P ieſt większą od Q. Poprowadziwſzy podług upodobania liniią AC, trzeba ią przedłużyć za punkt A względém C o ilość AB taką, ażeby było $P : R :: BC : AC$ (205), al- *fig. 41.* *fig. 42.*

albo $P : P - Q :: BC : AC$, to ieſt że trzeba zrobić $BC = \frac{P \times AC}{P - Q}$. Gdyby Q było większe nad P, to punkt B znaydówałby ſię bydź położony na przedłużeniu linii AC, za punktém C uważonym względém A.

fig. 43. 207. Gdyby była zadana i trzecia ſiła K (fig. 43), to naténczas znalázłſzy ſiłę R złożoną z dwóch ſił P i Q, trzeba znowu ſzukać ſiły S złożonéy z dwóch ſił R i K, iak gdyby niebyło zadanych innych tylko te dwie, to ieſt właśnie w ténże ſpoſób iak uczyniliśmy dopiéro wyżéy.

figura 1.42. 208. Wiec odwrotnie gdybyśmy chcieli, ſiłę iakąkolwiek R rozłożyć na dwie inne równoległe piérwſzéy (fig. 41. 42):

Trzebaby poprowadzić podług upodobania liniią PF równoległą kiérónkowi ſiły R, i obrawſzy ſobie taką liniią, za kiérónek iednéy z dwóch ſił ſkładaiących, na wártość téy ſiły ſkładaiącéy, trzeba ſobie obrać ilość iakąkolwiek P, byleby była mniéyſza od R, a to kiedy dwie ſiły ſkładaiące maią ſkutkówać po obu ſtronach ſiły R; a naténczas druga ſiła ſkładaiąca, oznaczywſzy ią ſobie przez Q, powinna bydź wyrażona przez $R - P$; żeby zaś wynaléśdź iey położenie, nietrzeba więcéy tylko poprowadzić liniią iakąkolwiek CBA, i na przedłużeniu linii AB wziąść część BC taką, ażeby było $Q : P :: AB : CB$; ieżeli tedy przez punkt C popowadzi ſię liniia QC, równoległa linii RB, to takowa liniia QC będzie kieronkiém ſiły Q.

Ale

Ale ieżeli obie ſiły ſkładaiące maią bydź położone z iednéyże ſtrony, w którymto przypadku muſzą ſkutkówać w rozumiéniu przeciwném; to naténczas na wártość ſiły P, można ſobie obrać ilość iakąkolwiek mniéyſzą lub większą nad R, a wziąwſzy liniią PF (fig. 42) równoległą linii RB za kierónek ſiły P, trzeba na linii iakiéykolwiek BAC, naznaczyć ſobie punkt C tak, ażeby było, $P - R$ albo $R - P : R :: AB : AC$; a naténczas punkt C będzie takim punktém, przez który powinna przechodzić ſiła Q, równoległa zadanéy ſile R, i znaydówać ſię będzie położony za punktém A względém B, kiedy P ieſt więkſze aniżeli R; przeciwnie zaś ieżeli mniéyſze nad R, to pomiéniony punkt C znaydówać ſię będzie między A i B. fig. 42.

209. Co tu powiedziało ſię o ſile R, względém dwóch ſił ſkładaiących ią P i Q, ponieważ oczywiście daie ſię przyſtoſówać do każdéy z tych oſtatnich dwóch ſił, przeto iawna ieſt, iakim ſpoſobém zamiaſt iednéy ſiły iakiéykolwiek, można użyć tylu innych ſił ile ſię ſpodoba, maiących kierónki równoległe piérwſzéy ſile.

O Momentach, i onych użyciu do ſkładania i roſkładania ſił.

210. To wſzyſtko co dotąd poprzédziło, zawiéra w ſobie doſtateczną naukę względém ſkładania i roſkładania ſił, maiących bądźto kiérónki bądź wártości iakiekolwiek. przynaymniéy kiedy

S4 ſku-

ſkutkuią na iednéyże płaſzczyznie. Ale różne rodzaie ruchów które daléy uważać mamy, wyciągaią ſpoſobów proſtſzych, i prętſzych do wynaleziénia ſiły złożonéy z wielu ſił i onéy kierónku; i to ieſt do czego właśnie teráz przyſtępuiemy.

211. *Jeżeli z punktn iakiegokolwiek* F
figura 44. 45. *(fig. 44. 45), obranego na płaſzczyznie iakie-*
gokolwick równoległoboku ABCD, *poprowa-*
dzą ſię liniie FE, FH, FG, *proſtopadłe na*
przyległe boki AB, AD *i na przekątną* AC;
to ſumma mnogościów wynikaiących z roz-
mnożenia każdéy proſtopadłéy przez bok na
który pada, równać ſię będzie mnogości, wy-
nikaiącéy z romnożenia przekątnéy przez pro-
ſtopadłą co na nię pada; a to kiedy punkt F
fig. 44. *(fig. 44) znaydówać ſię niebędzie ani w ką-*
cie BAD, *ani w przeciwnym iému w wierſz-*
fig. 45. *chołku. Jeżeliby zaś iak (fig. 45) punkt* F
znaydówał ſię w kącie BAD, *albo w przeci-*
wnym iemu w wiérſzchołku, to naténczas, ró-
żnica mnogościów, wynikaiących z rozmno-
żenia każdéy proſtopadłéy przez bok na któ-
ry pada, równać ſię będzie mnogości wyni-
kaiącéy z rozmnożenia przekątnéy, przez
proſtopadłą na tę przekątną.

Przedłużmy bok BC, ażby ſię ſpotkał
w I z proſtopadłą FH, i poprowadźmy li-
fig. 44. niie FA, FB, FC, FD. Tróykąt FAC (fig.
44) ieſt $= FAB + ABC + FBC = FAB$
$+ ADC + FBC$. Lecz 1ód tróykąt FAC
$= \frac{AC \times FG}{2}$. 2re Tróykąt $FAB = \frac{AB \times FE}{2}$.

3cie Tróykąt ADC maiący za podſtawę AD a IH za wyſokość, ieſt $= \frac{AD \times IH}{2}$. 4te Tróykąt $FBC = \frac{BC \times FI}{2} = \frac{AD \times FI}{2}$; . . więc $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AB \times FE}{2} + \frac{AD \times IH}{2} + \frac{AD \times FI}{2}$; lecz $IH + FI = FH$; więc wſzyſtko zdwoiwſzy, będzie $AC \times FG = AB \times FE + AD \times FH$. A w (fig. 45) tróykąt fig. 45.
$FAC = ABC - FAB - FBC = ADC - FAB - FBC$; to ieſt $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AD \times IH}{2} - \frac{AB \times FE}{2} - \frac{BC \times FI}{2}$; albo dawſzy baczenie na to, że $BC = AD$, i że $IH - FI = FH$, i wſzyſtko zdwoiwſzy, będzie $AC \times FG = AD \times FH - AB \times FE$.

212. Ponieważ okazało ſię wyżéy, że dwie ſiły iakiekolwiek i ſiła z nich złożona, mogą bydź wyrażone przez boki i przekątną równoległoboku nakryślonego w kierónkach tych linii, więc wnieśmy
ſobie ſtąd, że ieżeli P i Q (fig. 44. figura 44. 45.
45), ſą dwiéma ſiłami oznaczonémi przez linie AB i AD, w którymto przypadku, ſiła R złożona z dwóch piérwſzych byłaby oznaczona przez AC; wnieśmy ſobie,

mówię, ſtąd, że obrawſzy ſobie zewnątrſz kąta *BAD*, przeciwnego iemu w wiérſzchółku, punkt iakikolwiek *F* położony na płaſzczyznie tych trzech ſił, będzie zawſze $R \times FG = Q \times FH + P \times FE$; a gdyby punkt *F* był położony w kącie *BAD*, albo w przeciwnym iemu w wiérſzchołku, to zawſze będzie $R \times FG = Q \times FH - P \times FE$.

213. Mnogość, wynikaiąca z rozmnożenia ſiły przez odległość iéy kierónku od punktu ſtałego, ieſt to co nazywamy *momentém* téy ſiły. I tak $Q \times FH$ ieſt momentém ſiły *Q*; $R \times FG$ ieſt momentém ſiły *R*.

214. Ponieważ ſiły, ſzacówać ſię zwykły (158) podług ilości ruchu, to ieſt, że wyrażaią ſię przez mnogość, wynikaiącą z rozmnożenia iakiéy pewnéy miąższości, przez ſzypkość iaką nadać mogą téyże miąższości, więc wártością momentu ſiły iakiéykolwiek, będzie mnogość z miąższości przez ſzypkość i przez odległość iéy kierónku od punktu ſtałego.

215. Zmyśliwſzy ſobie, że proſtopadłe *FH*, *FG*, *FE*, ſą liniiami niegiętkiémi i niemiąższémi, ſpoionémi między ſobą i zaſtanowionémi w punkcie *F*, tak iż więcéy nic tylko obracaćby ſię mogły około tegóż punktu; i że ſiły *P*, *Q* tudzież ſiła *R* z nich złożona, ſą przyłożone do końców *E*, *H*, *G*, da ſię widzieć (fig. 44), fig. 44. że te trzy ſiły wſzyſtkie rázém dążą do obracania całego *układu* (ſyſtême) w iednęż ſtronę około punktu *F*; a w (fig. 45) daie fig. 45. ſię widzieć, że dwie ſiły *Q* i *R*, dążą do obracania układu w ſtronę przeciwną téy, w którą dąży ſiła *P*. A zatém można powiedzieć ogołém: *Ze moment iednéy ſiły złożonéy z wielu, uważony względém iakiegokolwiek punktu ſtałego* F, *zawſze równa ſię ſummie albo różnicy momentów odpowiadaiących dwóm ſiłóm ſkładaiącym, a to podług okoliczności, gdy takowe ſiły dążą do obracania układu w iednęż ſtronę, albo w ſtrony przeciwne, około pomienionego punktu ſtałego.*

216. A ſtąd można wnieść w powſzechności: *ze niech będzie liczba ſił* P, Q, S, T, *i. t. d. iaka chce* (*fig. 46*), *niechay maią takie wielkości i kierónki iak ſię ſpodoba, byleby znaydówały ſię wſzyſtkie na iednéyże płaſzczyznie, to moment ſiły złożonéy z tych wſzyſtkich ſił, uważony względém iakiegokolwiek punktu* F, *obranego na téyże płaſzczyznie, zawſze równać ſię będzie ſummie momentów, odpowiadaiących ſiłóm dążącym do obracania układu w iednę ſtronę około takowego punktu, mniéy ſumma momentów, odpowiadaiących ſi-* fig. 46.

ſiłòm dążącym do obracania tegòż układu w ſtronę przeciwną.

Jakóż pozwoliwſzy, że r ieſt ſiłą złożoną z dwóch ſił P i Q ſkutkuiących w kierónkach AP i EQ; r', ſiłą złożoną z dwóch ſił r i S, ſkutkuiących w kierónku GS; a naoſtatek że R, ieſt ſiłą złożoną z dwóch ſił r' i T, ſkutkuiących w kierónku DT; nadto oznaczywſzy przez m moment ſiły r, a przez m' moment ſiły r'; to ſpuściwſzy proſtopadłe FA, FE, FD, FB na ſiły ſkładaiące P, Q, S, T, i na ſiłę R z nich złożoną, mieć będziém 1ód $m = P \times AF + Q \times EF$. 2re $m' = m - S \times FG$. 3cie $R \times FB = m' - T \times FD$. Więc uczyniwſzy dodanie tych trzech zrównań, i wyrugówawſzy ilości iednakowe znayduiące ſię w obu częściach, będzie $R \times FB = P \times AF + Q \times EF - S \times FG - T \times FD$; gdzie daie ſię widziéć, iako momenta dwóch ſił T i S, dążących do obracania układu z prawéy ſtrony w lewą, maią w rzeczy ſaméy znaki przeciwne tym, co poprzédzaią ſiły P i Q, dążące do obracania tegóż układu z lewéy ſtrony w prawą.

217. Gdyby punkt F znaydówáł ſię bydź położony na ſamym kiérónku ſiły z wielu złożonéy, to momentém téy ſiły byłoby zéro; a że takowy moment powinién równać ſię ſummie momentów odpowiadaiących ſiłóm dążącym do kołowrotu w iednę ſtronę, mniéy ſumma momentów, odpowiadaiących ſiłóm dążącym do kołowrotu w ſtro-

ſtronę przéciwną, więc należy ſtąd wnieść, że różnicą téy dwoiakiéy ſummy momentów, uważonych względém iakiégokolwiek punktu ſiły z wielu złożonéy, że mówię takową różnicą ieſt zawſze zero.

I odwrotnie, *ieżeli ſumma momentòw, odpowiadaiących wielu ſiłòm dążącym do nadania kołowrotu w iednę ſtronę, około iakiego punktu, mniéy ſumma momentòw, odpowiadaiących ſiłòm dążącym do nadania kołowrotu w ſtronę przeciwną, około tegòż punktu, ieſt zerém; to należy ſobie ſtąd wnieść, że ſiła złożona z takowych wielu ſił muſi przechodzić przez tén punkt.*

218. Ponieważ te podania ogołém wzięte ſą prawdziwe, choćby kierónki ſił czyniły między ſobą kąty bądź iakie chce, więc muſzą bydź i w tén czas prawdziwe, kiedy ſiły czynią między ſobą kąty niezmiérnie małe, albo co na iedno wychodzi, kiedy kierónki ſił ſą ſobie równoległe.

219. A ſtąd ieſt łatwo wnieść ſobie ſpoſób bardzo proſty, do wynaleziénia położenia i wielkości iakiéykolwiek ſiły, złożonéy z tak wielu ſił iakby ſię ſpodobało, byleby wſzyſtkie ſkutkówały na iednéyże płaſzczy-

czyznie. Pozwolmy naprzód, że te wſzyſtkie ſiły ſą ſobie równoległe; i ażebyśmy bez potrzeby niezawikłali rachunku, daymy że ich niéma tylko trzy, a ſtąd potém łatwo będzie można dóyśdź, iakby ſobie trzeba poſtąpić zwiękſzą liczbą.

Niechay tedy będą te trzy ſiły zna-
fig. 47. iome P, Q, S (fig. 47), z których dwie piérwſze ſkutkówałyby w kierónkach AP i BQ, a oſtatnia w kierónku CS. Poprowadziwſzy podług upodobania liniią iakąkolwiek $FABC$, proſtopadłą kierónkóm AP, BQ, i. t. d. zmyślmy ſobie że punkt D ieſt taki, przez który ma przechodzić ſiła R, złożona z tamtych trzech. Naténczas obrawſzy ſobie do woli punkt F na linii $FABC$, mieć będziém podług tego co poprzédziło, $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$; a że odległości AF, FB, FC, i ſiły P, Q, S ſą nam znaiome, więc z tego zrównania łatwo byłoby nam wyciągnąć, wártość odległości DF, w którey przechodzić ma ſiła złożona, byleby tylko wártość tèy ſiły złożonéy R, była także wiadoma. Zobaczmy tedy, iaka ma bydź iéy wártość.

Obiérzmy ſobie inny punkt F' na przedłużeniu AF; a na fundamencie téyże ſaméy zaſady, mieć będziém $P \times AF' + Q \times BF' - S \times CF' = R \times DF'$. Od tego zrównania odiąwſzy piérwſze zrównanie, i dawſzy baczenie na to, że $AF' - AF = FF'$, $BF' - BF = FF'$, $CF' - CF = FF'$, i $DF' - DF = FF'$, będzie $P \times FF' + Q \times FF' - S \times FF' = R \times FF'$; to ieſt, rodzieliwſzy wſzyſtko przez FF', będzie $P + Q - S = R$. Lecz zaſtano-

nowiwſzy ſię nad tém rozumówaniém dopiéro użytém, łatwo widzieć ſię daie, że takowe wcale nic nienależy od liczby ſił, ale zarówno ſłuży wſzelkiéy bądź iakiéy chce liczbie tychże ſił. Więc należy ſtąd wnieść w powſzechności: *Że ſiła złożona z tak wielu ſił równoległych iak ſię ſpodoba, równa ſię ſummie ſił ſkutkuiących w iednèm rozumiéniu, mniéy ſumma ſił ſkutkuiących w rozumiéniu przeciwném.*

Jeżeli w zrównaniu $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$ wypadłém na początku, położymy zamiaſt R wártość onego $P + Q - S$ dopiéro wynalezioną, to mieć będziém $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = (P + Q - S) \times DF$; ſkąd wyciąga ſię $DF = \frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$; a zatém z tego wyrażenia i maiąc wzgląd na to, że rozumówanie które nas do niego przywiodło, wcale niezależy od liczby ſił, w nieśmy w powſzechności: *Iż chcąc wiedzieć w iakiéy odległości od punktu zadanego przechodzi ſiła złożona z wielu ſił równoległych, trzeba od ſummy momentów odpowiadaiącyh ſiłóm dążącym do nadania kołowrotu w iednę ſtronę, odiąć ſummę momentów, odpowiadaiących ſiłóm dążącym do nadania kołowrotu w ſtronę przeciwną, a reſztę rozdzielić przez ſummę ſił ſkutkuiących w iednę ſtronę, mniéy ſumma ſił ſkutkuiących w ſtronę przeciwną.* * 220.

* *Nienależy tu brać ſił ſkutkuiących w rozumiéniach przeciwnych, za ſiły dążące do nadania kołowrotu w rozumiéniach przeciwnych, ani odwrotnie. Bo dwie ſiły ſkutkuiące w rozumiéniach przeciwnych częſtokroć dążą do nadania ciału kołowrotu w iednę*

220. Gdyby punkt obrany z razu podług upodobania, znaydował się bydź położony w samymże punkcie D, przez który przechodziła siła z wielu złożona, to w takim razie, z przyczyny że odległość DF iest zerém, wártość iego $\frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$, odmiéniaiąca się na $\frac{-P \times AD + Q \times BD - S \times CD}{P + Q - S}$, (bo siła P dąży do nadania kołowrotu około punktu D w stronę przeciwną co siła Q), wártość mówię odległości DF byłaby zerém; a zatém mielibyśmy $-P \times AD + Q \times BD - S \times CD = 0$; a że punkt F z razu obrany podług upodobania, mógł bydź wzięty wyżéy lub niżéy do woli, tak iż punkt D, nierozumié się, raczéy położony w tym

strone; co zależy, od punktu, względém którego uważa się kołowròt albo momenta. Np. fig. 47. *dwie siły* Q *i* S (*fig.* 47), *skutkuią w rozumiéniach przeciwnych, ale obie dążą do nadania kołowrotu linii* B *w témże rozumiéniu, około punktu wziętego między* B *i* C; *a ieżeliby uważał się kołowrot względém punktu* F, *to siła* Q, *dąży do nadania linii* CF, *kołowrotu w stronę przeciwną téy, w którą dąży siła* S.

tym punkcie kierónku siły złożonéy R, aniżeli w którymkolwiek innym punkcie, więc wnosi się ztąd w powszechności:

Ze momenta wielu sił równoległych, uważone względém iakiegokolwiek punktu, należącego do kierónku siły z tych wszystkich wielu sił złożonéy, są takie, że summa momentów, odpowiadaiących siłóm dążącym do nadania kołowrotu w iednem rozumiéniu, zawsze równa się summie momentów, odpowiadaiących siłom, do dążącym nadania kołowrotu w rozumiéniu przeciwném.

221. Więc biorąc z znakami przeciwnémi momenta sił dążących do nadania kołowrotu w rozumiéniach przeciwnych, i siły skutkuiące w rozumiéniach przeciwnych, biorąc także z znakami przeciwnémi, można rzéc w powszechności. 1$^{\text{od}}$ *Ze siła złożona z tak wielu sił równoległych iak się spodoba, zawsze równa się summie tych wszystkich sił.* 2$^{\text{re}}$ *Ze ta siła złożona z wielu, i onym równoległa, przechodzi przez ciągły rzęd takich punktów, z których każdy ma tę własność, że summa momentów, uważonych względém niego, iest zerém.*

Tych zasad bardzo często używać będziémy w dalszym przeciągu, i zobaczymy wkrótce, z iaką łatwością

ścią podług nich znayduie ſię śrzodek ciężkości w ciałach. Tym czaſém teráz przyſtąpmy do ſił, których kierónki czynią między ſobą iakiekolwiek kąty.

222. Niechay tedy będzie, podług
fig. 48. (fig. 48) tyle ſił P, Q, S i. t. d. ile ſię ſpodobá, maiących ſwoie kierónki na iednéyże płaſzczyznie. Niech ſiła P, ſkutkuiąca w kierónku AP będzie wyrażona przez AB; ſiła Q ſkutkuiąca w kierónku EQ, przez EG, a ſiła S, ſkutkuiąca w kierónku IS, niech będzie wyrażona przez IL. Przez punkt T obrany do woli na płaſzczyznie tych ſił, zmyślmy ſobie dwie liniie proſte nieokreślone TE', TE'' czyniące między ſobą kąt iakikolwiek, (który dla tém większéy łatwości rozumiéymy bydź proſty); zmyślmy także ſobie ſiły P. Q. S, albo AB, EG, IL, każdą z nich rozłożoną na dwie inne, z których iedna byłaby równoległą linii TE', a druga rómnoległą linii TE'', które zatém powinny bydź wyrażone, każda z nich, przez odpowiadaiący bok równoległoboku, (193), którego przekątna oznacza ſiłę zadaną. Jawna ieſt ſtąd co poprzédziło (219), że z ſił AD, EF, IM * złożona iedna ſiła, będzie VO, tamtym równoległa, maiąca na wártość ſwoię, $AD + EF - IM$, i że przechodzić będzie w odległości VV', takiéy że wypadać muſi VV' - - - -

$$= \frac{AD \times AA' + EF \times EE' - IM \times II'}{AD + EF - IM}.$$

Po-

* Nie puſzczaymy z pamięci tego, co iuż powiedziało ſię indziéy (192). Przez to wyrażenie, ſiły AB EG i. t. d. rozumiémy,

Podobnież ſiły AC, EH, IK równoległe linii TE'', wſzyſtkie mogą bydź zebrane w iednę ſiłę VN, równoległą i równą trzém tamtym, to ieſt $= AC + EH + IK$, i która (rozumieiąc że V ieſt punktém ſpotkania ſię iéy kierónku z kierónkiém ſiły OV), która mówię, przechodzić będzie w odległości VV'', takiéy że będzie VV'' - -

$$= \frac{AC \times AA'' + EH \times EE'' + IK \times II''}{AC + EH + IK};$$

To założywſzy, ponieważ ſiły P, Q, S i kierónki ich, (to ieſt, kąty iakie czynią z liniiami ſtałémi i znaiomémi, takiémi iak TE' i TE'', albo z równoległémi onym), rozumieią ſię bydź wiadome, przeto w każdym z tróykątów BAD, GEF, IKL, będą znaiome kąty i przekątna; a zatém nietrudno będzie wynaléśdź liniie AD, EF, KL albo IM, i liniie BD albo AC; FG albo EH i IK, z których łatwo wynaydą ſię dwie ſiły złożone $AD + EF - IM$ i $AC + EH + IK$. Nadto, ponieważ także odległości AA', AA'', EE' EE'' i. t. d. muſzą bydź znaiome, bo położenie punktów A i E, gdzie rozumieią ſię ſiły bydź przyłożone, niémoże bydź nieznane, więc będziémy mieć wiadome wſzyſtkie ilości, wchodzące w wyrażenie odległościów VV' i VV'';

T 2 a

że liniie, AB, EG, *i. t. d. maią ſię między ſobą w ſtóſunku ilościów ruchu, iakie nadać mogą ſiły* P i Q, *miąższościóm, do których byłyby przyłożone. Toż trzymać mamy o ſiłach* AD, EF *i. t. d.; rozumiéiąc przez nie takie ilości ruchu, które miałyby ſię do ilościów ruchu oznaczonych przez* AB, EG, *iak ſię maią liniie* AD, EF *do linii* AB, EG, *każda do każdéy.*

a zatém łatwo będziémy mogli naznaczyć punkt V, w którym zbiégaią ſię te dwie ſiły złożone. Zrobiwſzy tedy $VO = AD + EF - IM$, i $VN = AC + EH + IK$, i zamknąwſzy równoległobok $OVNX$, miéć będziém przekątną VX na wártość ſiły R złożonéy z dwóch ſił piérwéy złożonych, równoległych liniiom TE' i TE'', to ieſt na wártość ſiły złożonéy z wſzyſtkich ſił zadanych,

O ſiłach skutkuiących na różnych płaſzczyznach.

223. Niechay będą zadane trzy
fig. 49. trzy ſiły P, Q, S (fig. 49), ſkutkuiące w kiéronkach linii AP, BQ, CS równoległych ſobie, ale położonych na różnych płaſzczyznach. Zmyślmy ſobie płaſzczyznę XZ, któréyby trzy liniie proſte AP, BQ, CS były proſtopadłe, i drugą płaſzczyznę ZV, któréyby też liniie były równoległe; A, B, C niech będą takie punkta, w którychby pomiénione liniie ſpotykały ſię z płaſzczyzną XZ.

Dwie ſiły P i S znayduią ſię bydź położone na iednéyże płaſzczyznie, któréy przecięciém z płaſzczyzną XZ ieſt liniia AC. Te tedy dwie ſiły mogą bydź zebrane w iednę $R' = P + S$, która będzie im

im równoległą, i przechodzić będzie przez punkt D, taki (220), iż będzie $P \times AD = S \times CD$. Dwie ſiły R' i Q, ſą znowu na iednéyże płaſzczyznie, któréy przecięciém z płaſzczyzną XZ, ieſt liniia BD, a zatém i te mogą bydź zebrane w iednę ſiłę $R = R' + Q = P + S + Q$, która będzie im równoległą, i przechodzić będzie przez punkt E, taki, iż będzie $R \times DE = Q \times BE$. Skąd iako też i z tego co poprzédziło wnoſi ſię w powſzechności: *Że niechby było tyle ſił ile ſię ſpodoba, maiących kierónki równoległe, to zawſze wſzyſtkie mogą bydź zebrane w iednę ſiłę, równaiącą ſię ſummie ſił ſkutkuiących w iednéym rozumiéniu, mniéy ſumma ſił ſkutkuiących w rozumiéniu przeciwném; czyto te ſiły będą położone na iednéyże, czy na różnéy płaſzczyznie.* Zobaczmy teráz ſzczególniéy, którędy powinna przechodzić takowa ſiła z wielu złożona.

Jeżeli z punktów A, C, D, B, E, poſtawią ſię liniie AA', DD', CC', BB', EE' proſtopadłe ſpólnemu przecięciu dwóch płaſzczyzn XZ, ZV; to z przyczyny równoległych AA', DD', CC', miéć będziém $AD : CD :: A'D' : C'D'$; a że znowu zrównanie

nie $P \times AD = S \times CD$ wynalezione dopiéro wyżéy, daie $AD : CD :: S : P$, więc $A'D' : C'D' :: S : P$, a zatém $P \times A'D' = S \times C'D'$. Podobnież, równoległe DD', EE', BB', daią $DE : BE :: D'E' : B'E'$, a zrównanie $R' \times DE = Q \times BE$ także wzwyż wynalezione, daie $DE : BE :: Q : R'$; więc $D'E' : B'E' :: Q : R' :: Q : P + S$; więc $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$.

Obiérzmy ſobie teráz na ſpólném przecięciu ZT dwóch płaſzczyn, iedén punkt ſtały T, i ſzukaymy odległości TE' od tego punktu, do punktu E' odpowiadaiącego punktowi E, przez który przechodzi ſiła złożona. Jawna ieſt, że $A'D' = TD' - TA'$, $C'D' = TC' - TD'$, $D'E' = TE' - TD'$, $B'E' = TB' - TE'$. Położywſzy te wártości w dwóch zrównaniach $P \times A'D' = S \times C'D'$ i $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$, miéć będziém $P \times TD' - P \times TA' = S \times TC' - S \times TD'$; i $(P + S) \times TE' - (P + S) \times TD' = Q \times TB' - Q \times TE'$. Lecz piérwſze z tych dwóch zrównań, daie $(P + S)\, TD' = P \times TA' + S \times TC'$; którąto wártość położywſzy w drugiém zrównaniu, będzie $(P + S) \times TE' - P \times TA' - S \times TC' = Q \times TB' - Q \times TE'$; więc zebrawſzy wſzyſtkie wyrazy rozmnożone przez TE', będzie $(P + Q + S) \times TE' = P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'$; ſkąd wyciąga ſię $TE' = \frac{P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'}{P + Q + S}$.

Lecz to wyrażenie odległości TE' ieſt właśnie takie ſamo, iakieby wypadło ſzukaiąc odległości, w któréy ma przechodzić ſiła złożona, gdyby ſiły P, Q, S wſzyſtkie trzy znaydówały ſię bydź położone na iednéyże płaſzczyznie ZV, i przechodziły przez punkta A', C', B' odpowiadaiące pun-

któm

któm A, B, C, przez które przechodzą w niéyſzym razie; więc zmyśliwſzy ſobie linią proſtą TX, proſtopadłą płaſzczyznie ZV, można znaléśdź odległość TE' ſiły złożonéy R od téy linii, wziąwſzy ſummę momentów * względém téyże linii proſtéy, iak gdyby te ſiły, nieodmiéniaiąc odległości ſwoiéy od téy linii, były wſzyſtkie położoné na płaſzyznie ZV, któréy pomiéniona liniia ieſt proſtopadła, i rozdzieliwſzy takową ſummę momentów, przez ſummę ſił.

Zeby tedy naoſtatek uſtanówić punkt E, nietrzeba więcéy, tylko wynaléśdź odległość EE' albo (poprowadziwſzy liniią EE'' równoległą linii ZT), wynaleśdź odległość TE'', w któréy przechodzi ta ſiła względém linii ZT. Lecz iawna ieſt, ſtąd co dopiéro wzwyż powiedziało ſię o odległości TE'; że ażeby miéć odległość TE'', trzeba podobnież zmyślić ſobie płaſzczyznę przechodzącą przez XT, i równoległą kierónkóm ſił; potém trzeba wziąść ſummę momentów względém linii TZ, która ieſt ſpólném przecięciém téy płaſzczyzny z płáſzczyzną ZV, trzeba mówię wziąść ſummę momentów względém TZ, iak gdyby wſzyſtkie ſiły, nieodmiéniaiąc odległości ſwoiey od płaſz-

czy-

* *Trzeba nam tu uważyć, i pamiętać na potém, że przez ſummę momentów, ma ſię rozumiéć ſumma momentów, odpowiadaiąca ſiłóm, dążącym do nadania kołowrotu w iednę ſtronę, mniéy ſumma momentów odpowiadaiąca ſiłóm, dążącym do nadania kołowrotu w ſtronę przeciwną. Podobnież. przez to wyrażenie* ſumma *ſił, ma ſię rozumiéć ſumma ſił ſkutkuiących w iednéin rozumiéniu, mniéy ſumma ſił ſkutkuiących w rozumiéniu przeciwném.*

czyzny ZV, znaydówały ſię na płaſzczyznie XV, i takową ſummę momentów rozdzielić przez ſummę ſił. A tak, iuż będzie znaiomo wſzyſtko, czego potrzeba do uſtanowiénia punktu E, którędy ma przechodzić ſiła złożona,

224. Zaſtanówmy ſię teráz nad ſiłami, których kierónki, ani ſą położone na iednéyże płaſzczyznie, ani ſobie ſą równoległe.

Niechay będą zadane trzy ſiły P, Q,
fig. 50. R (fig. 50), ſkutkuiące w kierónkach AP, BQ, CR, a położone na różnych płaſzczyznach. Zmyślmy ſobie płaſzczyznę iakąkolwiek XZ, ſpotykaiącą ſię w punkcie H z kierónkiém AP, w punkcie F z kierónkiém BQ, i w punkcie L z kierónkiém CR. Ponieważ wolno mi ieſt, podług (196), uważać ſiłę przyłożoną w którymkolwiek punkcie iéy kierónku, przeto zmyślam ſobie te trzy ſiły przyłożone w punktach H, F, L, i oznaczone przez liniie HV, FT, LK, poprowadzone w przedłużeniach linii AP, BQ, CR, poniżéy płaſzczyzny XZ. Zmyślmy ſobie ieſzcze nadto, że przez liniie AH, BQ, CL ſą poprowadzone inſze płaſzczyzny proſtopadłe płaſzczyznie XZ, których przecięciami z tą oſtatnią płaſzczyzną, byłyby liniie GHN, EFT, DLM. To założywſzy, iawna ieſt, że każdą z tych ſił mogę rozłożyć na dwie inne, z których iedna byłaby położona na płaſzczyznie XZ, a druga byłaby proſtopadła téyże płaſzczyznie. *Np.* mogę rozłożyć ſiłę HV, na ſiłę maiącą kierónek HN i na drugą maiącą kierónek HO proſtopadły płaſzczyznie XZ; tak iż zamiaſt trzech ſił HV, FT, LK, mogę użyć ſze-

ſześciu ſił HN, FT, LM, HO, FS, LI, z których trzy piérwſze ſą na płaſzczyznie XZ, a trzy oſtatnie ſą proſtopadłe téyże płaſzczyznie.

Lecz podług tego, co ſię nauczyło (222), trzy ſiły HN, FT, LM, mogą bydź zebrane w iednę, położoną na téyże płaſzczyznie XZ; a podług tego coſię rzekło (223) trzy ſiły HO, FS, LI, mogą znowu bydź zebrane w iednę, proſtopadłą téyże płaſzczyznie XZ. Więc ogołem: *Niech będzie liczba ſił iaka chce, maiących kierònki iakie ſię ſpodoba, zawſze można zebrać ie naywięcéy na dwie ſiły, z których iedna miałaby ſwòy kierònek na płaſzczyznie wiadoméy, a druga byłaby proſtopadła téyże płaſzczyznie.*

225. Lubo wywód niniéyſzego podania, niezdaie ſię miéć miéyſca, tylko w tych przypadkach, kiedy wſzyſtkie ſiły ſpotykaią ſię z obraną płaſzczyzną XZ, atoli łatwo poiąć można, że w rzeczy ſaméy to podanie w powſzechności ſłuży wſzelkim przypadkóm. Albowiém, po zebraniu na dwie ſiły, wſzyſtkich ſił ſpotykaiących ſię z tą płaſzczyzną, ieżeli zmyślimy ſobie położenie iéy odmiénne, iednakże tak, iżby pomiénione dwie ſiły złożone, nieprzeſtawały z nią ſpotykać ſię, (co nam uczynić wolno), to w takim razie, zawſze można téy płaſzczyznie dać położenie takie, ażeby ſpotykała ſię z

z kierónkami, które w pierwszém położeniu były iéy równoległe.

226. A zatém z siłami maiącémi kierónki swoie na różnych płaszczyznach, rzeczy niétak maią się, iak z siłami maiącémi kierónki na iednéyże płaszczyznie. Te ostatnie zawsze mogą bydź zebrane w iednę siłę, iak widzieliśmy wyżéy. Ale piérwsze pospolicie przemiéniaią się na dwie, które niemogą bydź zebrane w iednę, tylko w takim przypadku, kiedy siła złożona z sił skutkuiących na płaszczyznie XZ, spotykałaby się z siłą złożoną z sił prostopadłych téyże płaszczyznie.

227. Można tedy wynaléśdź, dwie siły złożone z tak wielu sił iak się spodoba, maiących swoie kierónki na różnych płaszczyznach. Atoli, lubo tén sposób może bydź użyteczny w wielu przypadkach, przecież w rozwięzywaniu wielu zagadniéń nieiest naywygodniéyszy; dla tego umyśliliśmy tu przydać ieszcze inszy następuiący.

fig. 51. Niech będzie P (fig. 51), iedna którakolwiek z sił zadanych, oznaczona przez liniią AB; niech będzie X punkt stały iakikolwiek; nadto XZ, XT, XT, niech będą trzy liniie wzaiemnie sobie prostopadłe. Na linii AB iako przekątnéy, robi się równoległobok prostokątny $ADBC$, którego płaszczyzna byłaby prostopadła płaszczyznie TXT, a bok BC byłby równóległy linii XZ; potém na linii BD iako przekątnéy, robi się inny

inny prostokąt $DFBE$, którego płaszczyzna, byłaby równoległa płaszczyznie TXT, a boki BF, BE, byłyby równoległe liniióm XT, XT. Jawna iest, 1ód że zamiast siły AB, można wziąść dwie siły, to iest iednę BC równoległą linii XZ, czyli prostopadłą płaszczyznie TXT, a drugą BD równoległą téyże płaszczyznie. 2re Ze zamiast téy siły BD, można znowu wziąść dwie siły, to iest, iednę BE równoległą linii XT, czyli prostopadłą płaszczyznie ZXT, a drugą BF, równoległą linii XT, czyli prostopadłą płaszczyznie ZXT; tak iż siła P albo AB, znaydzie się bydź rozłożona na trzy siły, równoległe trzém liniióm, wzaiemnie sobie prostopadłym, albo co na iedno wychodzi, znaydzie się bydź rozłożona na trzy siły, prostopadłe trzém płaszczyznóm, wzaiemnie sobie prostopadłym.

Lecz to wszystko co tu mówi się o sile P, oczywiście da się przystósować do wszelkiéy innéy siły, która niebyłaby prostopadłą iednéy z tych trzech płaszczyzn; więc zmyśliwszy sobie wszystkie siły takie iak P, rozłożone w tén sposób, a potém wszystkie siły prostopadłe płaszczyznie ZXT, zebrawszy w iednę podług przepisu (223), i uczyniwszy tóż samo względém sił prostopadłych płaszczyznie ZXT, iako też względém sił prostopadłych płaszczyznie TXT, iawna iest, iż zawsze można zebrać na trzy siły, prostopadłe trzém płaszczyznóm wzaiemnie sobie prostopadłym, tak wiele sił iak się spodoba. I te są powszechne zasady, służące do składania i rozkładania sił.

O

O ſrzodkach ciężkości.

228. Nim przyſtąpimy do oſobnych ſkutków, iakie, czyto w ſilniach czy powſzechnie w ciałach poſtaci i natury wiadoméy, ſprawić mogą ſiły, których własności ogólne dopiéro wyżéy rozbiéraliſmy, trzeba nam wprzód zaſtanowić ſię nad ſrzodkami ciężkości; bo od téy wiadomości wiele zależy naznaczenie ruchów, do iakich przyięcia ſą ſpoſobne takowe ſiły lub ciała. Przypomnimy tu ſobie, co powiedziało ſię indziéy (171), że kierónki podług których ważność ſkutkuie w cząſtkach materyalnych ciała iakiego, ſą równoległe; i że ta ſiła, dąży do nadania każdéy cząſtce materyi, iednakowéy ſzypkości w iednakowym czaſie.

229. Nazywa ſię *ſrzodkiém ciężkości* ciała, albo *układu* ciał, (to ieſt, wielu ciał z ſobą połączonych), punkt tego ciała, przez który przechodzi ſiła, złożona z oſobnych ſił, któremi każda cząſtka tego ciała albo tego układu ciał, byłaby nagabana przez przyrodzoną czynność ważności; niechby to ciało albo tén układ

ciał, znaydówał ſię w iakiém chce położeniu.

Np. ieżeli w ninieyſzém położeniu tróy-
kąta *ABC* (fig. 52), ſiła złożona z czynno- *fig.* 52.
ściów ważności przeciwko wſzyſtkim czą-
ſtkóm tego tróykąta, przechodzi przez pewny
punkt *G* powiérſzchni iego; i ieżeli w innem
położeniu *abc*, pomiéniona ſiła przechodzi
przez ténże punkt *G*. to takowy punkt nazy-
zywa ſię ſrzodkiém ciężkości. Zobaczymy
wkrótce, że takowa ſiła złożona, zawſze
przechodzi przez ténże ſam punkt w wſze-
lakich położeniach ciała, iakie tylko bydź
mogą.

230. Wynaleziénie takowego ſrzodka, ieſt łatwe na fundamencie tego, co wzwyż powiedziało ſię o użyciu momentów, do znaleziénia ſiły złożonèy z wielu ſił równoległych.

Jakóż, niech będzie *M, N, P* (fig. 53), *fig.* 53.
tak wiele ciał ile ſię ſpodoba, których miąższości (na tę chwilkę) uważać będziémy iakoby ſkupione w punktach *B, A, C*, rozumieiąc ie tym czaſém położone na iednéyże płaſzczyznie. Niechay będzie *p* ſzypkość, do iakiéy nadania każdemu ciału w iednéy chwilce, dąży ſiła ważności, któratoſzypkość podług (171), w każdém z tych ciał ieſt iednakowa. To w takim razie przez $p \times M$, albo przez pM, pN, pP, będą wyrażone ilości ruchu, czyli ſiły, mocą których te ciała dążą do ruchu w kierónkach równoległych $C''D$, $B''B$, $A''A$. Lecz podług tego co ſię rzekło (219), żeby mieć położenie

nie ſiły złożoney z tych wſzyſtkich ſił, trzeba wziąść ſummę momentów względem iakiegokolwiek punktu T, obranego na linii proſtopadłey tym kierónkóm, i tę ſummę rozdzielić przez ſummę ſił; więc na wartość odległości TG'', wktórey przechodzi pomieniona ſiła złożona, mieć będziem $TG'' = \frac{pM \times TB'' + pN \times TA'' + pP \times TD}{pM + pN + pP}$; co po wyrugówaniu ſpólnego czynnika p, wychodzi na $TG'' = \frac{M \times TB'' + N \times TA'' + P \times TD}{M + N + P}$.
Lecz poprowadziwſzy liniie BB', AA', DC', równoległe linii TG'', i kończące ſię na linii pionowey TC', zmyśliwſzy ſobie nadto, że punkt G wzięty na kierónku ſiły złożoney, ieſt ſzukanym środkiem ciężkości, a naoſtatek poprowadziwſzy $G'G$, równoległą linii TG'', mieć będziem $TG'' = G'G$, $TB'' = BB'$, $TA'' = AA'$, $TC'' = C'D$; więc $GG' = \frac{M \times BB' + N \times AA' + P \times C'D}{M + N + P}$; to ieſt, określiwſzy znaczenie tego słowa *moment*, i nierozumieiąc przez nie więcey, tylko mnogość z miąższości ciała przez odległość iego od iakiey linii proſtey, można powiedzieć.

Ze *odległość ſpólnego środka ciężkości wielu ciał, od pewney linii proſtey, znayduie ſię, rozdzieliwſzy ſummę momentów tych ciał (momentów, uważonych względem pomieniony linii proſtey), rozdzieliwſzy ią mówię przez ſummę miąższościów.*

Daymy teraz, że układowi ciał M, N, P, dało ſię położenie przeciwne, tak że liniia TA'' przedtem poziemna zamieniła ſię w pionową, a odwrotnie pionowa TC' w poziemną; to i w tym razie okazałoby ſię po-

dobnież, że ażeby mieć odległość ſiły złożoney od linii TA'' teraz pionowey, trzeba wziąść ſummę momentów względem TA'', i rozdzielić ią przez ſummę miąższościów; tak iż mielibyśmy podobnież $GG'' = \frac{M \times BB'' + N \times AA'' + P \times DC''}{M + N + P}$. Wynalazłszy zaś odległości od G, do dwóch linii ſtałych i znaiomych TA'' i TC', iawna ieſt, że położenie takowego punktu, który ieſt środkiem ciężkości, będzie wiadome; bo odległości BB', BB'', AA', AA'' i.t.d. rozumieią ſię bydź wiadome, z przyczyny, że nam ieſtwolno obrać ſobie punkt T gdzie ſię ſpodoba, przez który prowadzą ſię liniie TA'' i TC'.

231. Jeżeli odległości AA'', BB'', i.t.d. każda z nich ieſt zerém, to ieſt, ieżeli wſzyſtkie ciała ſą położone na iedneyże linii proſtey TA'', to w takim razie ſumma momentów względem tey linii, będzie zerém; więc i odległość GG'' muſi bydź także zerém. A zatém *ieżeli wiele ciał, uważonych iakoby były punktami, znayduie ſię położonych na teyże linii proſtey, to ſpólny ich środek ciężkości, znaydówać ſię także będzie na teyże linii proſtey.*

232. Gdyby liniie TA'' i TC', ta lub owa, albo też obie tak były poprowadzone, iżby ciała wypadały położone po obu ſtronach linii, to naténczas zamiaſt ſummy momen-

mentów, trzeba wziąść ſummę momentów, ciał położonych z iednéy ſtróny, mniéy ſumma momentów ciał znayduiących ſię po drugiéy ſtronie. Co zaś tyczé ſię mianownika ułamka, wyrażaiącego odległość środka ciężkości, to takowy zawſze złożony będzie z ſummy miąższościów; bo ſiły ważności odpowiadaiące tym miąższościom, ſkutkuią wſzyſtkie w iednakiém rozumiéniu. I to rościąga ſię powſzechnie do wſzelkiéy liczby ciał, które uważone jakoby były punktami, wſzyſtkie znayduią ſię na iednéyże płaſzczyznie. Są to wſzyſtko wnioſki ſtąd co ſię rzekło (219). Liniie TA', TA'', nazywaią ſię *Oſiami Momentów*.

233. Teráz daymy, że punkt T, piérwéy wzięty podług upodobania, przypada w punkcie G; to w takim razie odległości GG' i GG'', każda przemiénia ſię w zero. Więc ſumma momentów względém TC, i ſumma momentów względém TA'', każda w tymże przypadku, muſi także bydź zerém.

234. Stąd wnoſi ſię: że ieżeli ſumma momentów odpowiadaiących wielu ciałóm, wziętych względém linii proſtéy RS, przechodzącéy przez punkt G (fig. 54), ieſt zerém; iako téż i ſumma momentów uważonych względém linii proſtéy PQ, proſtopadłéy linii RS, przechodzącéy przez punkt G, ieżeli ieſt także zerém; to i ſumma momentów względém wſzelkiéy innéy linii MN, przechodzącéy przez ténże punkt G, muſi także bydź zerém.

fig. 54.

Jakóż, ſpuściwſzy proſtopadłe AA', AA'', AA''' na liniie PQ, RS, MN, ieżeli punkt I, rozumiéć będziémy takim punktém, w którymby liniia AA' ſpotykała ſię z liniią MN; to tróykąt proſtokątny $GA'I$ da nam: Wſt. GIA' albo doſt. PGM : GA' albo AA'' : : wſt. PGM : $A'I$ $= \frac{AA''\,\text{wſt.}\,PGM}{\text{doſt.}\,PGM}$; więc $AI = AA' - A'I$ $= AA' - \frac{AA''\,\text{wſt.}\,PGM}{\text{doſt.}\,PGM}$. Lecz w tróykącie proſtokątnym IAA''' (rozumieiąc promién $= 1$), miéć będziém, $1 : AI : :$ wſt. AIA''' albo doſt. $PGM : AA'''$; więc $AA''' = AI \times \text{doſt.}\,PGM$; to ieſt $AA''' = AA' \times \text{doſt.}\,PGM - AA''\,\text{wſt.}\,PGM$; a zatém rozmnożywſzy przez miąższość A, miéć będziém moment $A \times AA''' = A \times AA' \times \text{doſt.}\,PGM - A \times AA''\,\text{wſt.}\,PGM$; to ieſt że moment odpowiadaiący ciału A, względém oſi MN, równa ſię doſtawie kąta PGM, rozmnożonéy przez moment wzięty względém oſi PQ, mniéy wſtawa tegóż kąta PGM, rozmnożona przez moment wzięty względém oſi RS.

Łatwo zaś widziéć ſię daie, iż toż ſamo można przyſtóſówać do wſzelkiego innego ciała, oprócz różności co do znaków, wynikaiących z odmiénności położenia ciał,

gdy

gdy takowe z iednéyże lub z różnych ſtrón linii *MN* znaydówać ſię będą. Więc wziąwſzy ſummę wſzyſtkich momentów względém oſi *MN*, znaydziémy iż takowa równa ſię doſtawie kąta *PGM*, rozmnożonéy przez ſummę momentów, wziętą względém linii *PQ*, mniéy wſtawa kąta *PGM*, rozmnożona przez ſummę momentów, wziętą względém linii *RS*. Lecz podług założonego przypuſzczenia, każda z tych dwóch oſtatnich ſumm ieſt zerém; więc mnogości wynikaiące z rozmnożenia tychże ſumm przez doſtawy i wſtawy kąta *PGM*, będą podobnież zerém; a zatém: *Summa momentów wzięta względém oſi iakiéykolwiek* MN. *przechodzącéy przez śrzodek ciężkości* G, *ieſt także zerem.*

235. Stąd tedy wniéśmy ſobie, że czynność, wynikaiąca z oſobnych czynnościów ważności przeciwko każdéy cząſtce układu ciał, zawſze przechodzi przez iedénże punkt tegoż układu, ſamo położenie układu niechayby było iakie chce; albowiém ſumma momentów odpowiadaiąca wielu ſiłóm, równoległym, niémoże bydź zerém, tylko względém kierónku ſiły złożonéy z tamtych ſił.

Wreſzcie, lubo dotąd niemówiło ſię tylko o ciałach, których śrzodki ciężkości byłyby położone na iednéyże płaſzczyznie, atoli to wſzyſtko co poprzédziło, niemniéy rościąga ſię do przypadków, w których części układu znaydówałyby ſię na różnych pła-

płaſzczyznach; iako ſię to okaże ſtąd co naſtępuie.

236. Jeżeli ciała (uważaiąc ie zawſze iakoby były punktami) nieznayduią ſię na iednéyże płaſzczyznie, to należy zmyślić ſobie płaſzczyznę poziemną *XZ* (fig. 49); i linie pionowe *PA*, *QB*, *SC* ſpuſzczone z każdego punktu ważnego *P*, *Q*, *S*; natènczas, ażeby wynaléśdź punkt *E*, co przezéń przechodzi ſiła złożona *RE*, w ktoréy kierónku powinién znaydówać ſię śrzodek ciężkości, trzeba wziąść (223) momenta względém dwóch linii proſtych ſtałych *TX*, *TZ*, obranych na płaſzczyznie poziemnéy *ZX*, a ſobie wzaiemnie proſtopadłych, trzeba mówię wziąść ſummy momentów, iak gdyby wſzyſtkie ciała znaydówały ſię na tèyże płaſzczyznie poziemnéy, i każdą z tych dwóch ſumm momentów, rozdzieliwſzy przez ſummę miąższościów *P*, *Q*, *S*, wypadną dwie odległości *E'E* i *E''E*. Niezoſtanie tedy więcéy do czyniénia tylko wynaléśdź, w iakiéy odległości *EG* poniżéy płaſzczyzny poziemnéy *XZ*, ieſt poło- fig. 49.

 żo-

żony takowy śrzodek ciężkości. Lecz zmyśliwszy sobie poprzédzaiącą figurę tak przewróconą, iż płaszczyzna *XZ* zrobiłaby się pionową, a płaszczyzna *ZV* zamiéniłaby się w poziemną, daie się widziéć na tymże fundamencie, iż ażeby miéć odpowiadaiącą odległość *EG'* równą szukanéy wysokości *EG*, trzeba wziąść summę momentów względém *ZT*, iak gdyby wszystkie ciała znaydówały się na iednéyże płaszczyznie *ZV*, i takową summę momentów rozdzielić przez summę miąższościów; a naténczas, iuż będzie wiadomo wszystko, czego tylko potrzeba do naznaczenia śrzodka ciężkości.

237. Więc to wszystko co się rzekło, krótko powtórzywszy, szukanie śrzodka ciężkości zależy na téin:

1*ód* Kiedy wszystkie ciała, uważone iakoby były punktami, znayduią się bydź
fig. 55. położone na iednéyże linii prostéy (fig. 55), to trzeba wziąść summę momentów względém iakiego punktu stałego *F*, obranego na téyże linii podług upodobania, i takową summę rozdzielić przez summę miąższościów; wieloráz pokaże odległość śrzodka ciężkości *G*, od takowago punktu *F*. 2*re* Kiedy wszy-

wszystkie ciała, uważone iakoby były punktami, znayduią się bydź położone na iednéyże płaszczyznie; to trzeba zmyślić sobie dwie linie *TA''*, *TA'* (fig. 53), prostopa- fig. 53.
dłe iedna drugiéy, obrane podług upodobania na téyże płaszczyznie, i przechodzące przez punkt *T*; a potém z każdego punktu ważnego, poprowadziwszy prostopadłe na każdą z tych dwóch linii, trzeba sobie znowu zmyślić, iakoby te punkta ważne, były przyłożone na linią *TA''*, i *TA'* z kolei, każdy na taki punkt, do którego przytyka odpowiadaiąca mu prostopadła. To zrobiwszy, postępuie się iak w poprzédzaiącym przypadku, szukaiąc gdzie przypada śrzodek ciężkości *G''* na linii *TA''*, i gdzie znowu przypada śrzodek ciężkości *G'* na linii *TA'*; a dopiéro przez te dwa punkta poprowadziwszy linie *G''G*, *G'G* równoległe liniióm *TA'* i *TA''*, punkt w którym te dwie linie spotykaią się, będzie żądanym śrzódkiém ciężkości. 3*cie*. Naostatek, kiedy ciała, uważone iakoby były punktami, znaydówać się będą na różnych płaszczyznach; to trzeba zmyślić sobie trzy płaszczyzny; iednę poziemną (fig. 49), a inne dwie pionowe i wza- fig. 49.
iemnie sobie prostopadłe. Potém, z każdego punktu ważnego, spuszcza się prostopadła na każdą z tych płaszczyzn, i wzięta summa mómentów względem każdéy z tych płaszczyzn, każda z nich dzieli się przez summę miąższościów; a tym sposobém pokażą się trzy odległości śrzodka ciężkości od każdéy z tych trzech płaszczyzn. W tém obéyściu zawsze należy na to pamiętać, ażeby, kiedy niektóre z ciał są położone z różnych strón czyto punktu, czy linii, czy też płaszczyzny, względém którey biorą się momenta, ażeby mówię momenta odpo-

 wia-

wiadaiące ciałóm z różnych ftrón położonym, brać z przeciwnémi znakami.

238. Połóżmy tu ieszcze iednę uwagę, wynikaiącą bezśrzednie ftąd co się dopiéro powiedziało, która w wielu okazyach, może przyfpieszyć wynaleziénie śrzódka ciężkości, i ułatwić inne przypadki.

Ponieważ odległość śrzodka ciężkości, równa się fummie momentów rozdzielonéy pzzez fummę miąższościów; a ieżeli punkt, linia, albo płaszczyzna, względém któréy uważaią się momenta, przechodzi przez śrzodek ciężkości, takowa odległość, równaiąca się w tén czas zerowi, fprawuie że fumma momentów, musi także bydź równą zerowi. Więc można powiedziéć ogółém, że *fumma momentów uważonych względém bądź iakiéy chce płaszczyzny, przechodzącéy przez śrzodek ciężkości, ieft zawsze zerém.*

239. Dotąd uważaliśmy ciała, iak gdyby były punktami, i widzieliśmy iakim fposobém wynayduie się fpólny śrzodek ciężkości tych wszyftkich punktów, chociażby ich było iak naywięcéy. A ponieważ ciało ob-

obiętości i poftaci iakiéykolwiek, nieieft co innego, tylko zbiór niezmiérnéy liczby innych ciał czyli cząfték materyalnych, które poczytać sobie można za punkta, więc idzie za tém, iż tymże samym sposobém, zawsze można wynaléśdź śrzodek ciężkości, wszelkiego ciała bądź iakiéy chce poftaci; iak zobaczymy w różnych przykładach niżéy położonych.

Ze zaś śrzodek ciężkości, nieieft co innego, tylko punkt, przez który przechodzi usilność złożona z wszyftkich osobnych usilności ów, mocą których cząftki ciała poddaią się sile ważności, i że oráz ta usilność złożona, równa się fummie wszyftkich usilnościów osobnych; więc wnieśmy ftąd: że zawsze wszelką wagę ciała można rozumiéć skupioną w swoim śrzodku ciężkości, i że ta waga czyni tam ténże sam skutek, iakiby czyniły osobne wagi wszyftkich cząftek materyalnych w iedno zebrane.

240. Więc wynalázłszy fpólny śrzodek ciężkości wielu miąższościów iakichkolwiek poftaci; trzeba naprzód szukać śrzodka ciężkości odpowiadaiącego, każdéy z tych miąższościów, w czém teráz iuż żadnéy trudności miéć niepowinniśmy. Potém, uważaiąc wagę każdéy z tych miąższościów, niby skupioną w swoim śrzodku ciężkości, trzeba szukać fpólnego śrzodka ciężkości, iakby te wszyftkie ciała były punktami, każdy położony w tém miéyscu, któremu odpowiada iego śrzodek ciężkości.

241.

241. Więc to wſzyſtko, co dotąd powiedziało ſię o ſpólnym śrzodku ciężkości wielu ciał, uważonych iakby były punktami, zarówno ſłuży wſzelkim ciałóm iakiéykolwiek poſtaci, byleby w ośzacówaniu momentów, za odległość każdego ciała, brać odległość iemu właſnego śrzodka ciężkości.

242. Więc, *ieżeli wiele ciał, niech będą iakiey chce poſtaci, maią ſwoie oſobne śrzodki ciężkości na iednéyże linii proſtéy, albo na iednéyże płaſzczyznie, to ich ſpólny śrzodek ciężkości, będzie także położony na téyże linii proſtéy, lub na téyże płaſzczyznie.* To podanie, dowodzi ſię w ténże ſam ſpoſób, iak było wyżéy (231).

243. Teráz przyſtąpmy do przykładów.

fig. 56. Niechay będzie AB (fig. 56). liniia proſta wſzędzie wciąź iednokſztáłtnie ważna; iawna ieſt, że iéy śrzodek ciężkości powinién bydź w ſaméy połowie. Lecz żeby go wynaléśdź podług fundamentu zaſadzaiącego ſię na momentach, zobaczmy iakby ſobie należało poſtąpić.

Naprzód trzeba ſobie zmyślić tę liniią, iakoby przedzieloną na niezmiérną liczbę cząſtek takich iak Pp, i każdą z nich rozmnożyć przez odległość iéy od iakiego punktu ſtałego

łego, iakoto *np.* przez odległość od końca A; potém trzeba wziąść ſummę tych mnogościów, i rozdzielić ią przez ſummę części Pp, to ieſt przez liniią AB. Oznaczmy tedy ſobie AB przez a; AP przez x; a mieć będziém $Pp = dx$; momentém tedy cząſtki Pp będzie xdx, ilość, którą trzeba ſcáłkówać, ażeby mieć ſummę wſzyſtkich momentów; takową ſummą pokaże ſię bydź $\frac{x^2}{2}$; co żeby ſtóſówało ſię do odległości całéy linii, należy rózumiéć $x = a$; co nam da na całą ſummę momentów $\frac{a^2}{2}$; którą rozdzieliwſzy przez ſummę a miąźſzościów, pokaże ſię $\frac{a}{2}$, na odległość śrzodka ciężkości od punktu A. A zatém śrzodek ciężkości linii proſtéy iednokſztáłtnie ważnéy, znayduie ſię w ſaméy połowie; co téż ſamo przez ſię ieſt rzeczą oczywiſtą.

244. Więc iż́d *Zeby mieć śrzodek ciężkości obwodu iakiegokolwiek wielokąta* (fig. 57), fig. 57. trzeba z połowy każdego boku, ſpuścić proſtopadłe na dwie liniie ſtałe AB, AC, poprowadzone na płaſzczyznie tegóż wielokąta; a uważaiąc wagę każdego boku, iakoby ſkupioną w iego połowie, trzeba ſzukać ſpólnego śrzodka ciężkości odpowiadaiącego tym wſzyſtkim ważnym punktóm, iak przepiſało ſię (230).

245. 2re *Srzodek ciężkości powiérſzchni iakiegokolwiek równoległoboku, znayduie ſię zawſze w ſaméy połowie linii, łączącéy śrzodki dwóch boków ſobie przeciwnych.* Albowiém zmyśliwſzy ſobie równoległobok, iakoby złożony z linii materyalnych, równole-

ległych tym dwóm bokóm, każda z tych linii będzie mieć swóy śrzodek ciężkości na linii przechodzącey przez śrzodki tych dwóch boków. A zatém spólny śrzodek ciężkości tych wszystkich linii, musi także znaydówać się na téyże linii. Musi nadto bydź położony w iey połowie; bo takowa liniia, uważana iakoby była obciążona témi wszystkiémi wagami, rozumie się bydź iednokształtnie ważna.

fig. 58. 246. 3cie *Żeby mieć śrzodek ciężkości powierzchni tróykąta* ABC (fig. 58); trzeba z wierzchołka A, do połowy D, boku naprzeciw położonego BC poprowadzić liniią prostą AD; i wznaczyć, (biorąc od punktu D) część $DG = \frac{1}{3}AD$.

Jakóż, liniia AD, dzieląca na dwie połowy liniią BC w punkcie D, dzielić także będzie na połowę każdą inną liniią MN równoległą linii BC; więc uważaiąc powierzchnią tróykąta, iakoby złożoną z wielu linii materyalnych równoległych linii BC, liniia AD przechądząca przez osobne śrzodki ciężkości tych wszystkich linii, przechodzić także musi przez śrzodek ciężkości wszystkim spólny (231), to iest przez śrzodek ciężkości samego tróykąta. Z téyże przyczyny, liniia CE, przechodząca przez połowę linii AB, przechodziłaby także przez śrzodek ciężkości tego tróykąta; więc takowy śrzodek musi znaydówać się w punkcie G, w którym dwie liniie CE i AD przecinaią się z sobą. Lecz poprowadziwszy liniią ED, takowa będzie równoległa linii AC, iako dzieląca na dwie połowy każdy z boków AB, BC; więc dwa tróykąty EGD, AGC, iako też i tróykąty ABC, EBD będą podobne sobie, i dadzą, $GD : AG :: ED : AC :: BD : BC :: 1 : 2$;

więc

więc GD, iest połową linii AG; a zatém trzecią częścią linii AD.

247. Wnieśmy tedy stąd, iż *ażeby mieć śrzodek ciężkości* G *nierównoległoboku* (fig. 59), trzeba przez śrzodki E i F dwóch fig. 59.
boków równoległych CD i AB, poprowadzić liniią EF, iako też inne dwie EA, FD przeciągnięte od tychże dwóch punktów do kątów A i D naprzeciw położonych; a potém zrobiwszy $Eg = \frac{1}{3}EA$, i $Fg' = \frac{1}{3}FD$, trzeba poprowadzić liniią gg', która przetnie liniią EF w punkcie żądanym G.

Albowiém rozumiejąc w podobny sposób iak uczyniło się względém tróykąta; iawna iest, że śrzodek ciężkości powinién bydź na linii EF. Nadto, ponieważ g i g' (246), są dwóma śrzodkami ciężkości osobnémi, odpowiadaiącémi tróykątóm CAD, ADB, składaiącym nierównoległobok $ABDC$, więc spólny śrzodek ciężkości tych dwóch tróykątów, czyli całego nierównoległoboku, powinién znaydówać się na linii gg' (131); a zatém musi bydź położony w samém przecięciu G. Poszukaymy teráz odległości FG.

Poprowadźmy liniie gh i $g'h'$ równoległe linii AB. Ponieważ $gE = \frac{1}{3}AE$, a $Fg' = \frac{1}{3}FD$, więc będzie $gh = \frac{1}{3}AF$, a $g'h' = \frac{1}{3}ED$; albo $gh = \frac{1}{6}AB$, a $g'h' = \frac{1}{6}CD$. Z téyże przyczyny $Eh = \frac{1}{3}EF$, $Fh' = \frac{1}{3}EF$; więc $hh' = \frac{1}{3}EF$. Lecz tróykąty Ghg, $Gh'g'$ podobne sobie, daią $gh : Gh :: g'h' : Gh'$; więc $gh + g'h' : Gh + Gh' :: g'h' : Gh'$, to iest $\frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}CD : \frac{1}{3}EF :: \frac{1}{6}CD : Gh'$; więc $Gh' = \frac{\frac{1}{3}EF \times CD}{AB + CD}$; więc FG które iest $= Fh' + Gh'$ będzie $= \frac{1}{3}EF + \frac{\frac{1}{3}EF \times CD}{AB + CD}$, to iest $FG = \frac{\frac{1}{3}EF \times (AB + 2CD)}{AB + CD}$.

Uważ-

Uważmy tu po drodze, że gdyby wysokość nierównoległoboku, była niezmiernie mała, a oraz dwa boki AB i CD, niezmiernie mało różniłyby się ieden od drugiego, to w takim razie, pomienione boki powinny poczytać się za równe sobie, tak iż odległość FG, wychodzi na $\frac{\frac{1}{3}EF \times 3AA}{2AB}$, albo na $\frac{1}{2}EF$; to iest że naténczas śrzodek ciężkości znayduie się bydź położony w równéy odległości od dwóch boków przeciwnych.

248. Już tedy teraz łatwo będzie *wynaléśdź sobie śrzodek ciężkości odpowiadaiący powiérzchni iakiegokolwiek wielokąta* (fig.
fig. 60. 60). Trzeba naprzód podzielić go na tróykąty, a wynalazłszy sposobém wzwyż przepisanym, śrzodek ciężkości każdego zosobna tróykąta, wynaydzie się potém spólny śrzodek ciężkości tych wszystkich tróykątow, uważaiąc ie, iakoby były miąższościami proporcyonalnémi swoim powiérzchniom, skupionémi, każda zosobna, w swoim śrzodku ciężkości. Co wykona się podług przepisu (230). A ztąd iawnie pokazuie się, iakim sposobém można wynaléśdź śrzodek ciężkości, odpowiadaiący powiérzchni wszelkiéy bryły, zamykaiącéy się powiérzchniami płaskiémi.

249. Wreszcie, w wynaydowaniu śrzodków ciężkości niezawsze uciekać się trzeba do Momentów. *Np.* gdyby trzeba było szukać śrzodka ciężkości odpowiadaiącego obwodowi pięciokąta regularnego $ABCDE$
fig. 61. (fig. 61); z iednego spomiędzy kątów iego, iakoto z A, poprowadziłbym liniią prostą AF do śrzodka F boku CD naprzeciw położonego, iako też z kąta E, poprowadziłbym podobnież drugą liniią do śrzodka boku BC, na przeciw położonego; tak przecięcie spólne G tych dwóch linii, dałoby mi śrzodek ciężkości.

Jakoż, spólny śrzodek ciężkości dwóch boków AB, AE, iest w połowie c linii ba, przechodzącéy przez połowy pomienionych dwóch boków; i to iest oczywista. Niemniéy, spólny śrzodek ciężkości dwóch boków BC, DE, z téyże przyczyny, iest w połowie e linii Id, przechodzącéy przez połowy takowych boków. Naostatek, bok CD, ma swóy śrzodek ciężkości w punkcie F. Lecz łatwo widzieć się daie, że liniia AF, przechodzi przez śrzodki c, e i F, więc przechodzi także przez spólny śrzodek ciężkości wszystkich pięciu boków. A że przez podobnież poprzédzaiącému rozumowanie, możnaby okazać, że i liniia IE przechodzi przez tenże śrzodek. więc śrzodek ciężkości pięciąkąta, musi bydź w punkcie G, w którym liniie AF, i IE wzaiemnie przecinaią się.

250. Rozumuiąc, iak uczyniliśmy względém tróykąta, okazałoby się, że punkt G, iest także śrzodkiém ciężkości odpowiadaiącym powiérzchni pięciokąta regularnego. I ogołém, tymże sposobém przekonaćby się można, że śrzodek ciężkości czyto obwodu czy powiérzchni wielokąta regularnego, nieparzystéy liczby boków, znayduie się bydź położony w punkcie przecięcia dwóch linii, z których każda byłaby poprowadzona, od iednego z kątów, do śrzodka boku naprzeciw położonego. A w wielokątach parzystéy liczby boków, takowy śrzodek, znayduie się w przecięciu dwóch linii, poprowadzonych przez śrzodki dwóch boków sobie przeciwnych; skąd wniosłoby się, gdyby tego była potrzeba, że śrzodek ciężkości okręgu, albo powiérzchni koła, iest położony w śrzodku figury,

Kie-

Kiedy liczba linii, powiérſzchniów, brył i. t. d. których ſzuka ſię ſpólnego śrzodka cię- żkości, nieieſt znaczna, to można poſtąpić ſobie podług przepiſu wzwyż podanego (206 i 207). *Np.* niech będą zadane trzy
fig. 62. punkta A,B,C (fig. 62), które byłyby śrzod- dkami ciężkości trzech linii, albo trzech po- wiérſzchniów, lub też trzech brył, maiących wagi ſwoie, oznaczone przez miąźſzości M, N, P. Z tych trzech punktów złączywſzy z ſobą dwa B i C przez liniią BC, trzeba prze- dzielić liniią CB w punkcie D, na takie dwie części, ażeby było $N : P :: CD : BD$ albo $N + P : N :: CB : CD$, a tak punkt D, będzie ſpólnym śrzodkiém ciężkości dwóch miąźſzo- ściów P i N. Potém poprowadziwſzy lini- ią DA, i zmyśliwſzy ſobie dwie miąźſzości $N + P$ niby ſkupione w punkcie D, trzeba podobnież przedzielić DA w ſtóſunku od- wrotnym dwóch miąźſzościów M i $N+P$; to ieſt tak, ażeby było, $N + P : M :: AE : DE$ albo $N + P + M : M :: AD : DE$; a na- ténczas punkt E, będzie ſpólnym śrzodkiém ciężkości trzech miąźſzościów M, N, P. Tymże ſpoſobém należałoby obéyśdź ſię da- léy, gdyby więcéy brył było zadano.

251. Wnieśmy tedy ſobie ſtąd co po- przédziło, że zawſze łatwo miéć można śrzodek ciężkości powiérſzchni i bryłowa- tości wſzelkiego wielościanu i wałka. Ja- kóż iawna ieſt, że takowy śrzodek ciężko- ści, powinién znaydówać ſię w połowie li- nii przechodzącéy przez śrzodki ciężkości dwóch podſtaw ſobie przeciwnych; bo te ciała ſkładaią ſię z zrazów doſkonale ró- wnych, i podobnych podſtawie, które daią ſię uważać, iakoby były oſobnémi bryłkami równéy wagi, iednokſztáłtnie rozłożonémi na téyże linii.

252. *Zeby miéć śrzodek ciężkości* G *Pi- ramidy tróykątnéy* $SABC$ (fig. 63); trzeba fig. 63.
poprowadzić liniią SF z wiérzchołka do śrzodka ciężkości F iéy podſtawy, i na po- mienionéy linii, poczynaiąc od punktu F, wziąść część $FG = \frac{1}{4}SF$.

Zeby poiąć przyczynę tego poſtępku; poprowadźmy z śrzodka D boku AB, lini- ie DC, DS, a zrobiwſzy $DF = \frac{1}{3}CD$, i $DE = \frac{1}{3}DS$, punkta F i E będą śrzodkami cięż- kości dwóch tróykątów ABC, ASB. To założywſzy, ieżeli zmyślimy ſobie Piramidę złożoną z płaſzczyzn materyalnych równole- głych ABF, to liniia SF przechodząca przez punkt F podſtawy, przechodzić także będzie przez taki punkt w każdéy płaſzczyznie, który znaydówać ſię będzie w każdéy z nich iednako położony. A zatém oſobne śrzod- ki ciężkości każdéy takowéy płaſzczyzny, wſzyſtkie znaydówać ſię muſzą na linii SF. Z téyże przyczyny, oſobne śrzodki ciężko- ści płaſzczyzn równoległych płaſzczyznie ABS, z iakich można rozumiéć bydź zło- żoną Piramidę, będą wſzyſtkie na linii EC. Więc śrzodek ciężkości całéy Piramidy, muſi bydź położony w punkcie G, w którym dwie liniie FS i EC wzaiemnie przecinaią ſię. A teraz ieżeli poprowadzimy liniią EF, tako- wa będzie równoległą linii CS; bo z przy- czyny że DF ieſt trzecią częścią linii DC, a DE ieſt trzecią częścią linii DS, dwie li- niie DC i DS ſą przecięte proporcyonalnie. Dwa tedy tróykąty FEG, GCS będą ſobie podobne, tóż rozumiéć ſię ma o tróykątach DFE, DCS; a zatém będzie $FG : GS :: FE : CS :: DF : DC :: 1 : 3$; więc FG, ieſt trzecią częścią linii GS, a zatém czwartą częścią linii FS.

253. Ponieważ każda bryła może bydź rozłożona na Piramidy tróykątne, więc maiąc iuż teráz znaiomy śrzodek cięźkości Piramidy tróykątnéy, łatwo będzie przy pomocy Momentów, wynaléśdź śrzodek cięźkości iakiegokolwiek innego ciała.

254. Taki tedy ieſt w powſzechności ſpoſób wynaydówania śrzodków cięźkości odpowiadaiących figurom albo bryłom, którychby części niezależały iedne od drugich, albo przynaymniéy, kiedyby niebyło danego wyrazu, oznaczaiącego owo prawo, iakim pomiénione części ſą połączane iedne z drugiémi. Ale kiedy części figury lub ciała iakiegokolwiek, maią między ſobą iaką zawiſłość, mogącą wyrazić ſię w zrównaniu, to naténczas śrzodek cięźkości, daleko łatwiéy da ſię wynaléśdź. Zobaczmy to w przykładach.

255. Niechay będzie naprzód zadano, żeby wynaléśdź śrzodek cięźkości G łuku iakiegokolwiek linii krzywéy AM (fig. 64); trzeba zmyślić ſobie łuczek niezmiernie mały Mm; i na oś momentów obrać ſobie liniią iakąkolwiek CN, równoległą rzędnym, które także rozumiémy bydź wzaiemnie ſobie równoległe. Rozumiéymy nadto, że odległość od C do początku A odcinków, ieſt $= b$. Zeby mieć odległość Gg od śrzódka cięźkości do oſi CN, trzeba wziąść ſummę momentów, odpowiadaiących łukom Mm, względém oſi CN, i rozdzielić ią przez ſummę łuków Mm, to ieſt przez łuk AM. Lecz z przyczyny, że łuk Mm ieſt niezmiérnie mały, odległość od śrzodka iego n do linii proſtéy CN, powinna bydź poczytana za równą linii MN; więc moment tego małego łuczku, będzie wyrażony przez $Mm \times MN$.

fig. 64.

Teráz, oznaczywſzy AP przez x; PM przez y; mamy (73) $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, a $MN = CP = b - x$; więc momentém małego łuczku Mm, będzie $(b - x)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; a zatém $\int(b - x)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, albo całka ilości $(b - x) \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, pokaże ſummę mómentów, odpowiadaiącą wſzyſtkim łuczkóm niezmiérnie małym Mm, z których ſkłada ſię łuk AM. Będzie tedy Gg - - - $= \frac{\int(b - x)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{AM}$. Co ſię tyczć łuku AM, to ieſt dziélnika niniéyſzéy ilości, iuż indziéy (73) podaliśmy ſpoſób, iak naznaczyć wártość iego doſkonałą, kiedy to bydź może, a (85) nauczyliśmy iak ſię wynayduie przez przybliżenie. Na fundamencie podobnegóż temu rozumówania, pokazałoby ſię, że odległość Gg' od śrzodka cięźkości do oſi AP ieſt $= \frac{\int y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{AM}$.

Te ſą więc powſzechne formuły, ſłużące do wynaleziénia śrzodka cięźkości w łuku iakiéykolwiek linii krzywéy.

256. Gdyby łuk, którego śrzodka ciężkości dochodzić mamy, fkładał fię z dwóch części równych i fobie podobnych AM, AM' (fig. 65), położonych po oboiéy ftronie ofi odcinków; to w takim razie iawna ieft, że śrzodek ciężkości G, znaydówać fię będzie na linii AP; niezoftanie tedy więcéy do czynienia, iak tylko wynaléśdź odległość iego od punktu C. Lecz i tu niemniéy oczywifta ieft, że ponieważ momenta łuków Mm, $M'm'$ względém ofi NN' fą fobie równe, więc odległość CG będzie - - -
fig. 65.

$$= \frac{2\int(b-x)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{MAM'}.$$

Np. niéchay łuk MAM' byłby łukiém kołowym, mielibyśmy $y = \sqrt{(ax - xx)}$; gdzie a rozumié fię bydź śrzednicą. Pokazałoby fię łatwo, i iuż to widzieliśmy na fwoiém miéyfcu, iako $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$. A zatém będzie $2\int(b-x)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ . . $= \frac{2\int \frac{1}{2}a(b-x)dx}{\sqrt{(ax - xx)}} = a\int(b-x)\,dx(ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Daymy, dla łatwości, że punkt C ieft śrzodkiém, to w takim razie byłoby $AC = b = \frac{1}{2}a$; mielibyśmy tedy, $2\int(b-x)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a\int(\frac{1}{2}a - x) \times dx(ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = a\sqrt{(ax - xx)}$ (66); całka, do któréy niéma potrzeby dodawać ftateczney; bo kiedy $x = 0$, to i ona prze-

mienia fię w zero, iak bydź powinno; z przyczyny że naténczas fummą momentów ieft także zero.

Miéć tedy będziém naoftatek. $2\int(b-x)$. $dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a\sqrt{(ax - xx)}$; a zatém $CG = \frac{a\sqrt{(ax - xx)}}{MAM'} = \frac{\frac{1}{2}a \times 2\sqrt{(ax - xx)}}{MAM'}$. $= \frac{CA \times MM'}{MAM'}$; fkąd wnofi fię ta proporcya, $MAM' : MM' :: CA : CG$, która nas uczy: Że odległość od śrzodka koła, do śrzodka ciężkości iakiegokolwiek łuku należącego do tegóż koła, ieft czwartą proporcyonalną, długości łuku, iego cięciwie, i promiéniowi.

Też fame formuły daią fię przyftófować do wfzelkiéy innéy linii krzywey; a taráz przyftąpmy iuż do śrzodków ciężkości, odpowiadaiących powiérfzchniom płafkim, zamkniętym liniiami krzywémi.

257. Gdyby zadano było, znaléśdź śrzodek ciężkości powiérfzchni APM (fig. 66), daymy że takowy śrzodek ieft oznaczony przez G. Żeby miéć odległość Gg, trzeba wziąść fummę momentów, odpowiadaiących małym nierównoległobokóm $MPmp$, względém CN, i rozdzielić ią przez fummę tychże nierównoległoboków, to ieft przez rozległość APM. Lecz śrzodek ciężkości i, odpowiadaiący tému małému równoległobokowi, fig. 66.

 po-

powinién znaydówać się w połowie linii prostéy nk, równo oddaloné́y od MP i od mp, albo w połowie linii MP, z przyczyny niezmiérnie małéy wysokości Pp; więc odległość il będzie $= CP$; a zatém momentém rozległości $PpmM$, względém linii CN, będzie $PpmM \times CP$, to iest $(b-x)ydx$, oznaczywszy CA przez b, a AP przez x. Więc na wyrażenie summy momentów, miéć będziém $\int(b-x)ydx$; a zatém odległość Gg, iest $= \frac{\int(b-x)ydx}{APM}$. Podobnymże sposobém znalezlibyśmy odległość $Gg' = \frac{\int\frac{1}{2}ydx}{APM}$.

258. W powszechności można wynaléśdź tymże samym sposobém środek ciężkości wszelkiéy rozległości płaskiéy, rozłożywszy ią na nierównoległoboki niezmiérnie małe.

Np. gdyby rzecz szła o tróykąt ANN'
fig. 67. (fig. 67); trzeba obrać sobie podstawę NN' i wysokość AC za osi momentów; a oznaczywszy AP przez x; MM' przez y; i AC przez b; będzie $MM'm'm = ydx$; zatém na moment tego nierównoległoboku względèm NC, wypadnie $(b-x)ydx$; tak iż odległość Gg środka ciężkości od podstawy, będzie wy-

wyrażona przez $\frac{\int(b-x)ydx}{AMM'}$. Lecz oznaczywszy podstawę przez c, byłoby $AC : AP :: NN' : MM'$; to iest $b : x :: c : y = \frac{cx}{b}$; więc $\int(b-x)ydx$, wychodzi na $\int(b-x)\frac{cxdx}{b}$, albo na $\frac{c}{b}(bxdx - x^2dx)$, którego to wyrażenia całką, iest $\frac{c}{b}\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$. albo $\frac{cx^2}{6b}(3b-2x)$. A że powiérzchnia AMM' wyraża się przez $\frac{MM' \times AP}{2}$ albo przez $\frac{cx^2}{2b}$, więc na odległość środka ciężkości, wypada $\frac{\frac{cx^2}{6b}(3b-2x)}{\frac{cx^2}{2b}}$, albo $\frac{1}{3}(3b-2x)$, ilość wychodząca na $\frac{1}{3}b$, kiedy iest $x = b$. Więc $Gg = \frac{1}{3}b$. Lecz znowu poprowadziwszy liniią AGL, tróykąty ACL, GgL podobne sobie, daią $LG : LA :: Gg : AC :: \frac{1}{3}b : b :: 1 : 3$; więc $LG = \frac{1}{3}LA$; co właśnie zgadza się z podaniém wzwyż okazaném (246).

259. Przystósuymy teráz te formuły do linii krzywych.

Daymy że APM (fig. 68) iest częścią koła, którego średnicą byłoby a, a środkiém fig. 68.
C; skąd wypada $b = \frac{1}{2}a$. Miéć będziém $y = \sqrt{(ax-xx)}$. Wyrażenie tedy $\int(b-x)ydx$, przemiéniaiące się na $\int(\frac{1}{2}a-x)dx\sqrt{(ax-xx)}$, albo na $\int(\frac{1}{2}a-x)dx(ax-xx)^{\frac{1}{2}}$, iest zgodne do scałkówania, i ma za całkę $\frac{1}{3}(ax-xx)^{\frac{3}{2}}$; ilość,

 do

do którey niema potrzeby przydawać ſtałey, bo wychodzi na zero, w ten czas kiedy $x = 0$, iak bydź powinno. Mieć tedy będziem

$$Gg = \frac{\frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}}{APM} = \frac{\frac{1}{3}(PM)^3}{APM}.$$

Co ſię tycze odległości Gg'; ponieważ mamy $y = \sqrt{(ax - xx)}$, więc wártością iego $\frac{\int \frac{1}{2}y^2 dx}{APM}$ (257), będzie $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2}\cdot(ax - xx)dx}{APM}$. Lecz $\int \frac{1}{2}(ax - xx)dx$, albo $\int \frac{1}{2}\cdot(axdx - x^2dx)$, daie $\frac{1}{2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ albo $\frac{1}{12}x^2(3a - 2x)$;

więc będzie $Gg' = \frac{\frac{1}{12}x^2(3a - 2x)}{APM}$.

fig. 65. Gdyby ſzło o cały odcinek, ponieważ iawna ieſt, że ſrzodek ciężkości G (fig. 65), znayduie ſię bydź położony na promieniu CA, który dzieli łuk na dwie połowy, i że powinien bydź w teyże odległości od NN' iak ſą dwa oſobne ſrzodki ciężkości, odpowiadaiące dwóm Połodcinkom APM, APM'; więc będzie $CG = \frac{\frac{1}{3}PM^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24}\cdot 8\cdot(PM)^3}{APM}$

$$= \frac{\frac{1}{24}\cdot(MM')^3}{APM} = \frac{\frac{1}{12}(MM')^3}{2\,APM} = \frac{\frac{1}{12}(MM')^3}{AMM'A};$$

to ieſt, że *odległość od ſrzodka koła do ſrzodka ciężkości, odpowiadaiącego powierzchni iakiegokolwiek odcinka, równa ſię dwunaſtey części ſześcianu cięciwy, dwunaſtey części mówię, rozdzieloney przez powierzchnią tegoż odcinka.*

fig. 69. 260. A co należy do ſrzodka ciężkości odpowiadaiącego wycinkowi $CMAM'$ (fig. 60); takowy można mieć, uważaiąc, że ſrzodek ciężkości G odcinka MAM', ſrzodek ciężkości G' wycinka, i ſrzodek ciężkości G'' tróykąta, wſzyſtkie ſą położone na promieniu CA; i że na fundamencie momentów, moment wycinka, powinien równać ſię momentowi odcinka, więcey moment tróykąta. A zatem będzie $CMAM' \times CG' = MAM' \times CG + CMM' \times CG''$. Lecz znaleźliśmy dopiero wyżey $CG = \frac{\frac{1}{3}(PM)^3}{APM}$, co da ſię odmienić na $\frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{2\,APM} = \frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{MAM'}$; więc $CG \times MAM' = \frac{2}{3}(PM)^3$. Nadto wiadomo nam ieſt, że $CMM' = PM \times CP$, i (245) $CG'' = \frac{2}{3}CP$. Więc używſzy tych wártościów, mieć będziem $CMAM' \times CG' = \frac{2}{3}(PM)^3 + \frac{2}{3}PM \times (CP)^2 = \frac{2}{3}PM[(PM)^2 + (CP)^2] = \frac{2}{3}PM \times (CM)^2$, z przyczyny tróykata proſtokątnego CPM. Więc $CG' = \frac{\frac{2}{3}PM \times (CM)^2}{CMAM'}$. Lecz znowu powierzchnia wycinka $CMAM'$ równa ſię łukowi MAM' rozmnożonemu przez $\frac{CM}{2}$;

$$\text{więc } CG' = \frac{\frac{2}{3}PM \times (CM)^2}{\frac{MAM' \times CM}{2}} = \frac{\frac{2}{3}PM \times CM}{MAM'}$$

$= \frac{\frac{2}{3}MM' \times CA}{MAM'}$; to ieſt, że *odległość od ſrzodka koła, do ſrzodka ciężkości iakiegokolwiek wycinka tegoż koła, ieſt czwártą proporcyonalną łukowi, promieniowi, i dwóm tróykóm cięciwy.* Te formuły łatwo przyſtóiować ſobie można do wſzelkiey inney linii krzywey, iakoto *np.* do Paraboli i. t. d.

261. Przyſtąpmy teráz do powierzchniów krzywo wypukłych, ale

ale tylko przeſtaiąc na ſamych bryłach kołowrotnych. Rozumuiąc iak w poprzédzaiących przypadkach, pokazałoby ſię, że ſrzodek ciężkości każdego paſka ſkładkowego, ieſt położony na oſi kołowrotnéy
fig. 70. CA (fig. 70), i powinién bydź uważany iakoby w ſrzodku P iednéy z podſtaw tego paſka, przyczytawſzy mu grubość niezmiérnie małą.

Lecz, na wyrażenie takowego paſka, mieliśmy wyżéy (74), $\frac{c}{r}\, y\, \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, gdzie $r : c$ wyraża ſtóſunek promiénia do okręgu; więc (oznaczywſzy przez b odległość AC, od początku A odcinków, do oſi NN' momentów), mieć będziém, $\frac{c}{r}(b-x)y \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ na moment odpowiadaiący temu paſkowi; tak iż odległością CG ſrzodka ciężkości G odpowiadaiącego powiérſzchni, od punktu C, (nazwawſzy S takową powiérſzchnią), będzie - - - - -

$$\frac{\int \frac{c}{r}(b-x)y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{S}.$$

262. Stóſuiąc tę regułę do przykładu, daymy że ma bydź wynaleziony ſrzodek ciężkości odpowiadaiący powiérſzchni wy-
fig. 71. pukłéy ſtożka proſtego ANN' (fig. 71), w którym AP byłoby oznaczone przez x; PM przez y; wyſokość AC przez b; promiéń CN podſtawy, przez a; a bok AN przez e. Z przyczyny tróykątów ACN, Mrm podobnych

bnych ſobie, mieć będziém, $AC : AN :: Mr : Mm$; to ieſt $b : e :: dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{edx}{b}$. Podobnież, z przyczyny tróykątów ACN i APM podobnych ſobie, mieć będziém $AC : CN :: AP : PM$; to ieſt $b : a :: x : y = \frac{ax}{b}$; więc $\int \frac{c}{r}(b-x)y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, odmiénia ſię, na $\int \frac{c}{r} \times (b-x) \times \frac{ax}{b} \times \frac{edx}{b}$, albo na $\int \frac{cae}{rb^2}(bxdx - x^2dx$; ilość, któréy całką ieſt $\frac{cae}{rb^2} \times (\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3})$, albo $\frac{caex^2}{6rb^2} \times (3b - 2x)$. Lecz podług (Jeom. 220), powiérſzchnia części $AM'LMA = \frac{AM}{2} \times okr.\ PM$; tak iż ieſt $AC : AP :: AN : AM$, albo $AM = \frac{AP \times AN}{AC}$, więc $S = \frac{AP \times AN}{2AC} \times okr.\ PM = \frac{c}{r} \times \frac{ae}{2bb} xx$; a zatém, odległością od punktu C do ſrzodka ciężkości, odpowiadaiącego powiérſzchni $AM'LMA$, ieſt - - -

$$\frac{\frac{caex^2}{6rb^2}(3b-2x)}{\frac{cae}{2rb^2}x^2},\ \text{albo}\ \tfrac{1}{3}(3b-2x),\ \text{albo}\ b - \tfrac{2}{3}x.$$

Więc kiedy $x = b$, albo kiedy $AP = AC$, to odległość CG ſrzodka ciężkości, odpowiadaiącego całéy powiérſzchni ſtożka, ieſt $= b - \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}b$; to ieſt, że ſrzodek ciężkości odpowiadaiący powiérſzchni wycinka, ieſt ténże ſam, co ſrzodek ciężkości odpowiadaiący powiérſzchni tróykąta ANN'.

263.

263. Na drugi przykład obiérzmy ſobie
fig. 72. kulę (fig. 72). Mieć będziém $y = \sqrt{(ax - xx)}$, gdzie przez a rozumié ſię śrzednica; zaś $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$; więc $\int \frac{c}{r}(b-x)y \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, przemiénia ſię na $\int \frac{c}{r}(b-x) \times \frac{1}{2}adx$; rozumieiąc tedy punkt C bydź śrzodkiém, przez co wypada $b = \frac{1}{2}a$, mielibyśmy $\int \frac{c}{r}(b-x) \times \frac{1}{2}adx = \int \frac{ca}{2r}(\frac{1}{2}adx - xdx)$; co wychodzi na $\frac{ca}{2r}(\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}xx)$, albo na $\frac{cax}{2r}(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x)$. Lecz na wyrażenie powiérzchni S odcinka kulowego $AMLM'A$ mieliśmy $\frac{cax}{2r}$; więc odległość CG od śrzodka C figury, do śrzodka ciężkości G, ieſt $= \frac{\frac{cax}{2r}(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x)}{\frac{cax}{2r}}$ $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x = CA - \frac{1}{2}AP$; to ieſt, że śrzodek G, znayduie ſię bydź położony w połowie G, wyſokości AP tego odcinka. Skąd wnoſi ſię ogołém, że *śrzodek ciężkości odpowiadaiący powiérzchni paſka kulowego, zawartego między dwiéma płaſzczyznami równoległémi, ieſt położony w połowie wyſokoſci tegóż paſka.*

264. Zakóńczmy tę materyą, na ſzukaniu śrzodków ciężkości w figurach bryłaſtych. Uważaiąc bryłę (fig. 70), iakoby złożoną z zra-
fig. 70. zów niezmiérnie ciénkich, wzaiemnie ſobie równoległych, i oznaczywſzy ogolém przez ss, powiérzchnią każdego zrazu, a przez dx onego grubość, mielibyśmy na wyrażenie takowego zrazu $ssdx$, a zatèm na wyrażenie momentu odpowiadaiącego, względém płaſzczyzny równoległéy tym zrazóm i przechodzącéy w odległości AC od wiérzchołka A, równéy b, mielibyśmy $ss\,(b - x)\,dx$. Więc oznaczywſzy przez S bryłowatość $ALMM'A$, na odległość śrzodka ciężkości wypadnie nam ilość $\frac{\int ss\,(b-x)\,dx}{S}$.

Lecz wártość bryłowatości S, wynayduie ſię podług ſpoſobów podanych w Rachunku Całkowym; a wártość ilości $\int ss\,(b-x)\,dx$, może bydź wynaleziona témiż ſpoſobami, byleby mieć ss wyrażone w x; więc łatwo będzie mieć odległość śrzodka ciężkości, względém iednéy iakiéy płaſzczyzny znaiomèy. Podobnymże ſpoſobém trzebaby poſzukać odległościów tegóż śrzodka ciężkości, od dwóch innych płaſzczyzn, wzaiemnie i ſobie i piérwſzéy płaſzczyznie proſtopadłych. Ale tu przeſtaniémy tylko na takich bryłach, w których zrazy równoległe, każdy z nich

nich ma ſobny ſwóy śrzodek ciężkości na iednéyże linii proſtéy; iakiémito bryłami ſą piramidy i bryły kołowrotne.

265. Przyſtóſuymy to naprzód do Piramid. Niechay będzie b, wyſokość AC piramidy iakiéykolwiek (fig. 73); x, odległość proſtopadła AP iednego zrazu któregokolwiek; ee niech będzie powiérſzchnia podſtawy. Podług (Jeom. 202), powiérſzchnią zrazu położonego w odległości x od wiéſzchołka, wynaydziemy przez tę proporcyą, $bb : xx :: ee : \frac{eexx}{bb}$; a zatém mieć będziém $SS = \frac{eexx}{bb}$; więc $\int ss(b-x)dx$, przemiénia ſię na $\int \frac{ee}{bb}(bxxdx - x^3dx)$, co wychodzi na $\frac{ee}{bb}(\frac{bx^3}{3} - \frac{x^4}{4})$ albo na $\frac{eex^3}{12bb}(4b-3x)$. Lecz bryłówatością Piramidy maiącéy za wyſokość x, a ss albo $\frac{eexx}{bb}$ za podſtawę, ieſt $\frac{eex^3}{3bb}$; więc na odległość śrzodka ciężkości wypada

fig. 73.

$$\frac{\frac{eex^3}{12bb}(4b-3x)}{\frac{eex^3}{3bb}},$$

albo $\frac{1}{4}(4b-3x)$, albo $b-\frac{3}{4}x$.

Którato ilość, kiedy $x=b=AC$, przemiénia ſię na $\frac{1}{4}b$; więc podnieſiénie Cg' śrzodka ciężkości G nad podſtawę, wynoſi $\frac{1}{4}b$.

Teráz, niechay będzie g, śrzodkiém ciężkości podſtawy; to w takim razie liniia Ag, będzie przechodzić przez śrzodek ciężkości G piramidy; a równoległe Gg' i gC, dadzą nam Cg' albo $\frac{1}{4}b : AC$ albo $b :: Gg : Ag$; więc $Gg=\frac{1}{4}Ag$; co ſłuży na potwiérdzenie tego co rzekło ſię indziéy (252), i uczy nas, że *w każdéy piramidzie, śrzodek cieżkości odpowiadaiący iéy bryłowatości, ieſt położony na czwartéy części, odległości śrzodka ciężkości podſtawy iéy od wiérſzchołka.*

266. Co ſię zaś tyczé brył kołowrotnych, w takowych ogołém na wártość powiérſzchni ss, podług (78), mamy $\frac{cy^2}{2r}$; a zatém w nich odległość śrzodka ciężkości, będzie wyrażona przez $\frac{\int\frac{cy^2(b-x)dx}{2r}}{S}$.

267. Przyſtóſuymy naprzód tę formułę do ſtożka uciętego, ſkładaiącego część ſtożka proſtego (fig. 74). Niechay będzie m, *fig. 74.* promiéniém BD większéy podſtawy, a n prómiéniém AC mniéyſzéy podſtawy. Zmyśliwſzy ſobie liniią AQ, równoległą wyſokości CD, i ſpotykaiącą ſię w punkcie O z promiéniém PM paſka MLM'; z tym promieniém mówię, położonym na płaſzczyznie nierównoległoboku $ACDB$, mieć będziém AQ albo $CD : BQ :: AO$ albo $CP : MO$; to ieſt, oznaczywſzy CD przez h; CP przez x; PM przez y; będzie $h : m-n :: x : y-n$; więc $x=\frac{h}{m-n}.(y-n)$; a $dx=\frac{hdy}{m-n}$. Lecz tu mamy $b=h$; więc $b-x=h-\frac{h}{m-n}(y-n)$

=

$$=\frac{h}{m-n}(m-y);\ \text{więc}\int\frac{cy^2(b-x)\,dx}{2r}\ldots$$
$$=\frac{ch^2}{2r(m-n)^2}\int y^2(m-y)\,dy=\frac{ch^2}{2r(m-n)^2}\cdot\left(\frac{my^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)+C=\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4my^3-3y^4)+C.$$

Zeby wynaléśdź przyzwoitą wártość ſtateczněy C, uważam, że cálka czyli ſumma momentów powinna wypadać zerèm w punkcie C, to ieſt kiedy $y=n$. Mićć tedy będę $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4mn^3-3n^4)+C=0$, albo $C=\frac{-ch^2}{24r(m-n)^2}(4mn^3-3n^4)$; więc ſummą momentów wziętych od punktu C do punktu iakiegokolwiek P, ieſt $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}\times(4my^3-3y^4-4mn^3+3n^4)$; a od punktu C aż do D, na takową ſummę wypada .. $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4m^4-3m^4-4mn^3+3n^4)$, albo $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(m^4-4mn^3+3n^4)$, albo $\frac{ch^2}{24r}\times(m^2+2mn+3n^2)$; teráz tedy niezoſtanie, tylko rozdzielić tę ilość przez bryłówatość ſtożka uciętego, którą łatwo mićć można, i którěy także iuż daliśmy wyrażenie na innèm miéyſcu (Alg. 215).

Gdybyśmy zaś chcieli wynaléśdź odległość CG, śrzodka ciężkości odpowiada-
fig. 75. iącego uciętemu ſtożkowi $ANN'B$ (fig. 75), wydrążonemu wálkowo i równolegle, wokolo oſi; od wynalezionego dopiéro wyraże-

żenia na moment odpowiadaiący pełnemu ſtożkowi uciętemu, trzebaby odiąć moment wálka wnętrſznego, uważaiąc go bydź z téyże materyi co ſtożek, to ieſt że trzebaby odiąć mnogość wynikaiącą z rozmnożenia tego wálka przez połowę iego wyſokości, a reſztę trzebaby rozdzielić przez bryłówatość ſtożka wydrążonego; bryłowatość do któréy, wynaleziénia podaliśmy ſpoſób (Alg. 215).

Na tych fundamentach, łatwo można wynaléśdź śrzodek ciężkości w armacie KL
(fig. 76), któréy trzy ſztuki głównieyſze, za fig. 76.
wárte między AB, BC, i CD, ſą w rzeczy ſaméy trzema ſtożkami wydrążonémi, tegóż rodzaiu co fig. 75. Ponieważ ſtąd co poprzédziło, mamy wyrażenie momentu, odpowiadaiącego każdemu z tych trzech ucinków ſtożkowych względém podſtawy, więc łatwo mićć ie także możemy względém końca K gałki gronowéy, dodawſzy do każdego z nich mnogość, wynikaiącą z rozmnożenia ſtożka, przez odległość iego większéy podſtawy od punktu K. Do takiéy zaś ſummy momentów dodadzą ſię potém momenta dna i grona, iako też ozdób, obręczów i czopów zgrubſza oſzacówanych; a naoſtatek rozdzieliwſzy wſzyſtko przez miąższość armaty, wypadek pokaże odległość śrzodka ciężkości od końca K gałki gronowéy.

Na fundamentach iuż dotąd podanych, możnaby nawet ściśle obrachówać momenta ozdób; ale w praktyce, doſyć będzie za moment każdéy, wziąść mnogość wynikaiącą z rozmnożenia iéy bryłówatości przez odległość od punktu K do tego punktu oſi, któremu odpowiada śrzodek takowéy ozdoby.

Obiérzmy ſobie na drugi przykład odcinki kołowe. Niechay będzie śrzedni-

dnica oznaczona przez a; odcinek AP przez
fig. 77. x; (fig. 77); rzędna PM, przez y; mamy $yy = ax - xx$; a zatém ſumma momentów odpowiadaiących zrazóm ſkładkowym odcinka $AMLM'A$, wziętych względém oſi iakiéykolwiek NN', będzie wyrażona przez $\int \frac{c}{2r}(b-x) \times (ax-xx)\,dx$. Więc względém śrzodka C, gdzie $b = \frac{1}{2}a$, taż ſumma będzie wyrażona przez $\frac{c}{2r}\int(\frac{1}{2}a - x) \times (ax - xx)\,dx$, albo przez $\frac{c}{2r}\int(\frac{1}{2}aax - \frac{3}{2}axx + x^3)\,dx$, albo przez $\frac{c}{2r}(\frac{1}{4}aax^2 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}x^4)$, co wychodzi na $\frac{c}{8r}x^2(a-x)^2$. Lecz $\frac{c}{8r}x^2$, wyraża powiérſzchnią koła, maiącego za śrzednicę wyſokość AP odcinka, więc na moment tego odcinka względém śrzodka C, wypadnie $CP^2 \times$ koł. AP. A zatém rozdzieliwſzy to wyrażenie przez bryłówatość odcinka, (którą łatwo miéć można podług Jeom. 248), wypadek pokaże odległość śrzodka ciężkości tego odcinka, od śrzodka C całéy kuli.

Na tym fundamencie łatwo wynaléśdź
fig. 78. śrzodek ciężkości bomby (fig. 78). Od momentu całéy kuli, wziętego względém iakiegokolwiek punktu, trzeba odiąć moment wnętrſznéy kuli, potém do reſzty przydać moment dna, wzięty względém tegóż ſamego punktu, a nakoniec wſzyſtko rozdzielić przez miąźſzość bomby. Lecz wziąwſzy śrzodek C

za punkt, względém którego uważaią ſię momenta, moment tak całéy kuli iako też moment wnętrſznéy kuli, każdy z nich wypada zerém, więc nietrzeba będzie, tylko moment dna wzięty względém śrzodka bómby rozdzielić przez miąźſzość bómby, a wielorаz ſtąd wynikaiący, da odległość CG od śrzodka bómby do śrzodka ciężkości onéyże, odrzuciwſzy uſzy i. t. d.

Zeby zaś miéć śrzodek ciężkości bómby nabitéy, trzeba wziąść różnicę między momentém odcinka kulowego iaki zaymuie nabóy prochu, a między momentém odcinka ſkładaiącego dno, z których każdy wynayduie ſię iak nauczyło ſię wyżéy; ale uważaiąc ażeby każdy moment rozmnożyć przez ważność przyrodną, to ieſt piérwſzy przez wagę ſześciénnéy ſtopy prochu, a drugi przez wagę ſześciénnéy ſtopy żelaza, ieżeli bryłówatość była w ſześciénnych ſtopach obrachówana; naoſtatek takowa rożnica rozdzieli ſię przez całą wagę razém bomby i prochu.

Własności śrzodków ciężkości.

269. Stąd, co dotąd powiedziało ſię o śrzodkach ciężkości, iako też co wyżéy poprzédziło o ſile złożonéy z wielu ſił równoległych, iawna ieſt, że ieżeli wſzyſtkie części ciała, albo iakiegokolwiek układu ciał, każda z nich ma iednakową ſzypkość, albo każda z nich dąży do ruchania ſię z iednakową ſzypkością, iawna ieſt mówię, że ſiła zło-

żona z tych wſzyſtkich ruchów, przechodzi przez środek ciężkości takowego ciała, albo takowego układu ciał, a zatém pomiéniony układ rucha ſię albo dąży do ruchu, tak iak gdyby wſzyſtka całkowitość miąższości ów była ſkupiona w środek ciężkości, i była nadana taką ſzypkością iaką ieſt nadana każda cząſtka.

270. Skąd wnieść należy na odwrót, że przyłożywſzy do środka ciężkości iakiego ciała, albo układu ciał, iakąkolwiek ſiłę, wſzyſtkie równe części takowego układu, równo podzielą ſię tym ruchem i wſzyſtkie zoſtaną popędzone z równą ſzypkością, którą można wynaleść (158), rozdzieliwſzy ilość ruchu przyłożonego do tego środka, przez całą miąższość ciała albo układu ciał.

Jakóż, ſiła złożona z wſzyſtkich ruchów, nadanych częściom układu, powinna bydź także ſama tak co do ilości iak co do kierónku, iaka była użyta przeciwko temu ciału. Gdyby zaś iedne z cząſtek miały nabydź większéy ſzypkości iak drugie, to łatwo możnaby dowieść że ſiła złożona z tych wſzyſtkich ruchów nieprzechodziłaby przez środek ciężkości; co też tém iaśniey da ſię widzieć w dalſzym przeciągu.

271. A ponieważ wiele ſił przyłożonych do iednegóż punktu, (na fundamencie zaſád poprzédzaiących, mogą bydź wſzyſtkie obrócone w iednę ſiłę, więc należy ſtąd wnieść ogo-

ogołém, że, *niech będą przyłożone iakiekolwiek ſiły, do środka ciężkości iakiego ciała albo układu ciał, niechay będzie ich tyle iak ſię ſpodoba, i niechay maią bądź iakiekolwiek kierónki, to wſzyſtkie części tego ciała albo tego układu ciał nabędą iednakowéy ſzypkości, maiącéy ténże kierónek co ſiła złożona z tych wſzyſtkich ſił; którato ſzypkość równać ſię będzie ilości ruchu, wyrażaiącéy takową ſiłę złożoną, téy mówię ilości ruchu rozdzieloney przez całą miąższość ciała albo układu ciał.*

272. Skąd znowu wnoſi ſię. Ze *kiedy ſiły skutkuiące przeciwko ciału, przemiéniaią ſię albo mogą bydź przemiénione w iednę ſiłę, któréyby kierónek przechodził przez środek ciężkości, to w takim razie, takowe ciało niebędzie obracać ſię około ſwego ſrodka ciężkości.*

273. Ale ieżeli ſiły czyniące przeciwko ciału, niemogą bydź przemiénione w iednę, albo mogąc bydź przemiénione w iednę ſiłę, ieżeli kierónek takowéy ſiły złożoney nieprzechodziłby przez środek ciężkości, to naténczas wſzyſtkie części układu, niebędą mieć ſpólnego ruchu; atoli środek ciężkości tak ruchać ſię będzie, iak gdyby wſzyſtkie ſiły były do niego bezśrzednie

 przy-

przyłożone. A to ieſt, co właśnie teraz okazać mamy.

274. Zmyślmy ſobie naprzód
fig. 79. trzy ciała M, N, P, (fig. 79) popędzone w kierunku linii równoległych AD, BE, CF położonych na iednéyże lub na różnych płaſzczyznach, ſzypkości zaś tych ciał, daymy że oznaczaią liniie AD, BE, CF. Niechay będzie G śrzodkiém ciężkości tych ciał w tén czas, gdy znayduią ſię w punktach A, B, C; a G' niech będzie ich śrzodkiém ciężkości w tén czas, gdy ſtaną w punktach D, E, F, dokąd razém przybędą, bo ſzypkości ich rozumieią ſię bydź wyrażone przez liniie AD, BE, CF. Teráz ieżeli poprowadzimy liniią GG', mówię że takowa, będzie równoległa tamtym, że będzie drogą, którą przebieży śrzodek ciężkości G w przeciągu ruchu ciał pomiénionych, i że śrzodek ciężkości G przebieży tę liniią w ruchu iednokſztáłtnym.

1òd. Łatwo widzieć ſię daie, że droga czyli tór śrzodka ciężkości, będzie równoległy liniióm AD, BE i. t. d.; albowiém w którémkolwiek bądź miéyſcu rozumieiąc położony takowy śrzodek ciężkości w iakiéykolwiek chwilce czaſu, ieżeli zmyślimy ſobie

płaſzczyznę przechodzącą przez tén śrzodek, to ſumma momentów względém tèy płaſzczyzny powinna bydź zerém (238). Lecz znowu zmyśliwſzy ſobie płaſzczyznę równoległą kierónkóm ciał, i przechodzącą przez punkt G, momenta wzięte względém tèy płaſzczyzny, muſzą bydź zerém przez cały czas ruchu; bo rozumié ſię że pomiénione ciała nieoddalaią ſię od niéy w biegu ſwoim; więc odległości ich od téyże płaſzczyzny, ſą zawſze iednakowe, więc i momenta ſą tèż iednakowe; a że na początku ruchu, to ieſt kiedy śrzodek ciężkości znaydówał ſię w punkcie G, ſummą momentów było zero, więc ta ſumma muſi zawſze bydź zerém, niech pomiénione ciała znayduią ſię bądź w którémkolwiek miéyſcu kierónków ſwoich; więc śrzodek ciężkości zawſze ieſt położony na płaſzczyznie równoległéy kierónkóm ciał i przechodzącéy przez początkowe położenie G, tegóż śrzodka. A ponieważ w ninièyſzém rózumówaniu, położenie takowéy płaſzczyzny niezawiſło iak tylko od tego warunku, ażeby była równoległą kierónkóm ciał M, N, P i przechodziła przez punkt G; więc podobnymże ſpoſobèm możnaby dowiéśdź, że takowy śrzodek powinién znaydówać ſię na wſzelkiéy ianéy płaſzczyznie równoległéy kiérónkóm ciał i przechodzącéy przez punkt G; a zatém muſi znaydówać ſię na ſpólném przecięciu takowych płaſzczyzn; ſkąd wnoſi ſię, że śrzodek ciężkości przebiéga liniią GG' równoległą kierónkóm ciał pomiénionych.

2re Mówię, że tènże śrzodek rucha ſię iednokſztáłtnie; to ieſt, że po przybyciu ciał M, N, P i. t. d. do punktów a, b, c, i. t. d. ieżeli śrzodek ciężkości znaydzie ſię bydź

 w g,

w g, to będzie $GG' : Gg :: AD : Aa :: BE : Bb ::$ t. d. to ieſt, że rozległości, które przebiégaią śrzodek ciężkości i każde z ciał w iednymże czaſie, maią ſię między ſobą iak ich ſzypkości. Jakóż, zmyśliwſzy ſobie płaſzczyznę oznacnoną przez RS, któréyby kierónki ruchów były proſtopadłe; z natury śrzodka ciężkości mieć będziém (236), $M \times AH + N \times BI + P \times CL = (M + N + P) \times GK$. I z téyże przyczyny, gdy przerzeczone ciała ſtaną w punktach D, E, F. będzie $M \times DH + N \times EI + P \times FL = (M + N + P) \times G'K$. Teráz odiąwſzy od tego zrównania piérwſze zrównanie, (i dawſzy baczenie na to że $DH - AH = AD$, $EI - BI = BE$, i. t. d.). będzie $M \times AD + N \times BE - P \times CF = (M + N + P) \times GG'$. Więc na tymże ſamym fundamencie, gdy ciała ſtaną w punktach a, b, c, będzie $M \times Aa + N \times Bb - P \times Cc = (M + N + P) \times Gg$. A że liniie Aa, Bb, Cc w równym czaſie bywaią przebieżone iednokſztáłtnie, więc takowe rozległości (156) powinny bydź między ſobą iak ſzypkości AD, BE, CF; będzie tedy $AD : BE :: Aa : Bb$; $AD : CF :: Aa : Cc$; więc $Bb = \frac{Aa \times BE}{AD}$, $Cc = \frac{Aa \times CF}{AD}$. Położywſzy te wártości w naſzém oſtatniém zrównaniu, i wyrugówawſzy mianownika AD, przerzeczone zrównanie przemiéni ſię w to, $(M \times AD + N \times BE - P \times CF) \times Aa = (M + N + P) \times Gg \times AD$. A naoſtatek rozdzieliwſzy to zrównanie przez owo, w które wchodzi GG', będzie $Aa = \frac{Gg \times AD}{GG'}$; ſkąd wnoſi ſię $GG' : Gg :: AD : Aa$; to ieſt, co przedſięwzięliśmy byli okazać.

Uważ-

Uważmy teráz, że zrównanie w które wchodzi GG' daie $GG' = \frac{M \times AD + N \times BE - P \times CF}{M + N + P}$. Lecz liniie AD, BE, CF, GG', oznaczaią ſzypkości ciał M, N, P, i śrzodka ciężkości G, więc $M \times AD$, $N \times BE$ i. t. d. będą wyrażeniami ilościów ruchu. A zatém ponieważ rozumowanie poprzédzaiące wcale niezależy od liczby ciał, więc można ſobie wnieść w powſzechności 1ód *Ze ieżeli tak wiele ciał iak ſię ſpodoba, przebiégaią iednokſztáłtnie liniie równolegle, to śrzodek ciężkości przebiéga także iednokſztáłtnie liniią równoległą tamtym.* 2re *Ze ſzypkość iego, równa ſię ſummie ilościów ruchu, iakiémi ſą natchnione ciała dybiące w iednę ſtronę, mniéy ſumma ilościów ruchu, iakiémi ſą natchnione ciała dybiące w rozumiéniu przeciwném, równa ſię mówię téy ſummie, rozdzieloney przez ſummę miąższościów.*

275. Gdyby niektóre z ciał znaydówaly ſię w ſpoczynku, ponieważ w takowym razie ſzypkością tych ciał byłoby zero, więc i ilością ruchu byłoby także zero; a

zatém takowa ilość ruchu odpadła by z licznika ułamka, wyrażaiącego fzypkość śrzodka ciężkości; ale to w mianowniku nieuczyniłoby żadnéy odmiany, który zawfze fkładać fię będzie z fummy wfzyftkich miążfzościów.

276. Gdyby fumma ilościów ruchu odpowiadaiących ciałóm dybiącym w iednę ftronę, równała fię fummie ilościów ruchu, odpowiadaiących ciałóm dybiącym w rozumiéniu przeciwném, to naténczas licznikiém ułamka, wyrażaiącego fzypkość śrzodka ciężkości, byłoby zero. Więc w takim przypadku śrzodek ciężkości znaydówałby fię w fpoczynku. A zatém niechby były iakie chcą ruchy równoległe wielu ciał, to fpólny ich śrzodek ciężkości, znaydówać fię będzie w fpoczynku, kiedy fumma ilościów ruchu, odpowiadaiących ciałóm dybiącym w iednę ftronę, równa fię fummie ilościów ruchu, odpowiadaiących ciałóm dybiącym w rozumiéniu przeciwném.

277. Ponieważ fiły oznaczaią fię przez ilości ruchu (158), i ponieważ fiła złożona z wielu fił równoległych (219) równa fię fummie fił czyniących albo dążących do czynności w iednę ftronę, mniéy fumma fił czyniących albo dążących do czynności w rozumiéniu przeciwném, więc wniéśmy fobie ftąd: Że

Ze ieżeli wiele fił równoległych, fą przyłożone do różnych części iakiegokolwiek układu ciał, to śrzodek ciężkości takowego układu, rucha fię w taki fpofób, iak gdyby te fiły były do niego bezśrzednie przyłożone.

278. Teráz daymy że ciała, w takiéy liczbie iak tylko fpodobać fię może, dybaią w kierónku bądź iakichkolwiek linii proftych. Jeżeli zmyślimy fobie dwie linie profte iakiekolwiek, wzaiemnie proftopadłe iedna drugiéy, a w punkcie fpólnego ich fpotkania fię z trzecią liniią proftopadłą płafzczyznie pierwfzych dwóch linii; to zawfze będzie można fzypkość każdego ciała, rozłożyć na inne trzy równoległe trzém liniióm przerzeczonym. A że wynika ftąd, co dopiéro wyżéy powiedziało fię, że ruch śrzodka ciężkości, na fundamencie ruchów równoległych iednéy z pomiéniomych linii, będzie równoległy téyże linii, będzie iednokfztałtny, i że fzypkość iego, równać fię będzie fummie ilościów ruchu, * ofzacówanych równolegle téyże linii, takowéy mówię fummie, rozdzielonéy przez fummę miążfzościów; więc pozwoliwfzy, że na tym fundamencie wynalazł fię ruch śrzodka ciężkości równolegle każdéy z tych trzech linii, i że potém te trzy ruchy złożyły fię w ieden, (co zawfze bydź może, bo wfzyftkie fą przyłożone do tegóż pun-

* *Przez to co tu dla fkrócenia nazywamy fummą ilościów ruchu, zawfze rozumiéć fię ma fumma ilościów ruchu, odpowiadaiących ciałóm dybiącym w iednę ftronę, mniéy fumma ilościów ruchu, odpowiadaiących ciałóm, dybiącym w rozumiéniu przeciwném.*

punktu), pokaże ſię ſtąd iedyny tór śrzodka ciężkości. A że ſkładki których tu używamy, nieſą co innego, tylko ſameż ſiły, iakiémi ciała rozumieią ſię bydź natchnione równolegle tym trzém liniióm, i że ſiła iedyna śrzodka ciężkości, tym ſpoſobém znayduie ſię bydź złożona z ſił złożonych równolegle każdéy z przerzeczonych linii, więc muſi bydź koniecznie równa i równoległa ſile złożonéy z wſzyſtkich ſił przyłożonych do tych wſzyſtkich ciał; więc w powſzechności. *Niech będą iakie chcą kierónki i wartości ſił przyłożonych do rożnych części układu ciał, to śrzodek ciężkości rucha ſię zawſze, albo dąży do ruchania ſię w taki ſpoſòb, iak gdyby te wſzyſtkie ſiły były do niego bezśrzednie przyłożone.*

279. W rózumowaniu poprzèdzaiącém rzekło ſię, że zawſze ſzypkość każdego ciała, można rozłożyć na trzy inne ſzypkości równoległe trzém liniióm danym z położenia. Atoli gdyby kierónek iednego z ciał był równoległy płaſzczyznie dwóch z trzech linii zadanych, albo był równoległy iednéy z tychże trzech linii, to zdawałoby ſię że w piérwſzym przypadku, niémożna rozłożyć pomiénionéy ſzypkości tylko na dwie ſiły równoległe dwóm z trzech linii; a w drugim przypadku ta ſzypkość niémoże wcale bydź rozłożona na ſiły równoległe dwóm innym lini-

ióm.

ióm. Pomimo téy pozornéy trudności, przecież podanie niemniéy ieſt powſzechne; albowiem widziéć ſię daie, *np.* że byleby liniia *AB* (fig. 80) fig. 80.
niebyła równoległa iednéy z dwóch linii *PR*, *PQ*, to ſiłę oznaczoną przez *AB*, zawſze można rozłożyć na inne dwie *AC*, *AD*, równoległe tym dwóm liniióm; ale też oráz niemniéy widziéć ſię daie, że im bardziéy liniia *AB* zbliżać ſię będzie do równoległości względém linii *PQ*, tém bardziéy ſiła *AD* zmniéyſzać ſię będzie, tak iż przemiéni ſię w zero, gdy liniia *AB* ſtanie ſię równoległą linii *PQ*. Więc w takim przypadku, niemniéy poymówać można rozłożenie na dwie ſiły, z których iedna byłaby zerém. Z tèyże przyczyny i w tymże przypadku, można póymówać rozłożenie na trzy ſiły równoległe liniióm *PQ*, *PR*, *PS*, ale z których dwie byłyby zerami.

280. Stąd co dopiéro poprzédziło, iako też ſtąd co powiedziało ſię (275), należy wnieść: *Ze śrzodek ciężkości układu ciał, zoſtanie w ſpoczynku, ieżeli rozłożywſzy ſiły przyłożone do każdéy części układu, na inne ſiły ròwnoległe trzém liniióm wzaiemnie ſobie proſtopadłym, ſummą ſił albo ilościòw*

ru-

ruchu równolegle względém każdéy z trzech linii, ieſt zero; biorąc z znakami przeciwnémi ſiły ſkutkuiące w rozumiéniach przeciwnych.

281. Kiedy wſzyſtkie ſiły znayduią ſię na iednéyże płaſzczyznie, iawna ieſt, że dosyć będzie rozłożyć każdą ſiłę na dwie inne równoległe, dwóm liniióm wzaiemnie ſobie proſtopadłym, na téyże płaſzczyznie poprowadzonym; bo ponieważ w takim razie, ſiły proſtopadłe płaſzczyznie, ſą zerami, więc i ruch śrzodka cię żkości wynikać maiący z czynności tych ſił muſi także bydź zerém.

282. W tém wſzyſtkiém co dopiéro wyżéy powiedziało ſię, rozumieliśmy iakoby każde z ciał wchodzące w układ, było zupełnie i ſwobodnie poſłuſzne ſile która go nagaba. Ale téż w ſaméy rzeczy miałyby ieſzcze miéyſce, chociażby pomiénione ciała w ſwoich ruchach podlegały iakiémuś przymuſowi, byleby takowe zawady niepochodziły od ſiły obcéy czyli nienależącéy do tego układu ciał, to ieſt, byleby niebyły inſze, tylko te, co wynikaią z trudności iaką miéć mogą takowe ciała w poddaniu ſię ruchowi, dla ſpoſobu w który ſą roſporządzone iedne względém drugich, albo w który ſą połączone iedne z drugiémi. Wywód tego naſtąpi niżéy, po wyłożeniu zoſobna powſzechnych zaſád, na których gruntuie ſię Równowaga ciał, i onych ruchy.

Zaſada powſzechna na któréy gruntuie ſię Równowaga Ciał.

Niech będzie tak wiele ſił iak ſię ſpodoba (bądźto czyniących bądź odpornych) przyłożonych do ciała, albo do układu ciał, albo do iakiéy ſilni i. t. d. niechay maią kierònki iakie chcą; ieżeli zmyślimy ſobie każdą z tych ſił, rozłożoną na inne trzy, równolegle trzém liniiom poprowadzonym przez iakikolwiek punkt, a wzaiemnie ſobie proſtopadłym, to ażeby te wſzyſtkie ſiły zoſtały w równowadze, trzeba ażeby ſumma ſił czyniących równolegle względém każdéy z tych trzech linii, była zerém.*

Jakóż widzieliśmy wyżéy (227), że niechay będzie iaka chce liczba i natura ſił, zawſze można wſzyſtie takowe ſiły, przemiénić w inne trzy, którychby kierónki były równoległe trzém liniióm wzaiemnie ſobie proſtopadłym. Więc przypuściwſzy, że wſzyſtkie ſiły wchodzące w układ ciał, znayduią ſię w równowadze, wynika ſtąd, że i te trzy ſiły z tamtych wſzyſtkich złożone, muſzą także znaydówać ſię w równowadze, albo téż każda z nich muſi bydź zerém. Ale że te trzy ſiły złożone bedąc wzaiemnie ſobié proſtopadłémi, niémogą nic ani ſobie zaſzkodzić ani dopomódz, więc każda z nich muſi bydź zerém. Lecz znowu, każda z nich po-

* *Przez ſummę ſił, tak tu iako i daléy na potém, rozumiémy zawſze, ſummę ſił czyniących albo dążących do czynienia w iednćm rozumiéniu, mniéy ſumma ſił czyniących albo dążących do czynienia w rozumiéniu przeciwném.*

podług (223) równa ſię ſummie ſił cząſtkowych onę ſkładaiących i onéyże równoległych; więc w rzeczy ſaméy, ſummy ſił, które (przez rozłożenie) ſkutkuią równolegle każdéy z trzech linii wzaiemnie ſobie proſtopadłych, takowe mówię ſummy ſił, każda z nich muſi bydź zerém.

284. Gdyby wſzyſtkie ſiły były wykieróWane na iednéyże płaſzczyznie, to ſummą ſił równoległych każdéy z dwóch linii poprowadzonych na téy płaſzczyznie proſtopadle iedna drugiéy, byłoby zero. Gdyby zaś wſzyſtkie ſiły były wzaiemnie ſobie równoległe, to trzeba ażeby ſumma tych wſzyſtkich ſił, była zerém. Te dwa przypadki zawiéraią ſię oczywiście w podaniu powſzechném.

285. Uważamy to dobrze, że to Podanie w wſzelkim przypadku Równowagi zawſze ma miéyſce, ale myliłby ſię któby rozumiał, że doſyć ieſt na niém ſamém do ſprawiénia Równowagi. Inne warunki potrzebne do takowéy równowagi, odmiéniaią ſię podług własnościów i ſzczególnych roſporządzéń części wchodzących w układ ciał, albo w Silnią o którą rzecz idzie; w naſtępuiącym Tomie o tém mówić ſię będzie, tu zaś podaią ſię tylko powſzechne fundamenta.

286. Ta zaſada ieſt powſzechna, bądź to że ſiły przyłożone do różnych części układu ciał, ſą wſzyſtkie czyniące bądź też że tylko niektóre z nich ſą czyniące, a inne

ne ſą odporne, iakie ſą podpory, punkta nieruchome, powiérzchnie i. t. d. przeſzkadzaiące czynności innych ſił. Albowiém odpory takowych zawad, wyrównywaią ſiłóm czyniącym.

Zaſada powſzechna Ruchu.

Wiakikolwiek bądź ſpoſób, wiele ciał niech odmiénią ſwoie ruchy ninieyſze, ieżeli zmyślimy ſobie, że ruch iaki miałoby ciało w chwilce naſtępuiącéy, gdyby było ſwobodne, ieſt rozłożony na inne dwa, z których iedén byłby właśnie tén który w rzeczy ſaméy mieć będzie ciało po zaſzłéy odmianie; to drugi ruch powinién bydź taki, iż gdyby każde z ciał, niémiało innego ruchu tylko tén drugi, to wſzyſtkie ciała zoſtałyby w równowadze.

I to ieſt oczywiſta; bo gdyby te drugie ruchy niebyły takie, ażeby ſprawiły równowagę w układzie ciał, to piérwſze ruchy ſkładaiące, niebyłyby te, których nabydź maią ciała po zaſzłéy odmianie; gdyż tamte muſiałyby koniecznie zaſzkodzić tym oſtatnim. Tę zaſadę winni ieſteśmy P[u] d' *Alembert*. Zobacz iego *Dynamikę*.

Wnio-

Wnioski wynikaiące z dwóch zaſád poprzédzaiących, ſtóſuiące ſię do Ruchu ſrzodka ciężkości ciáł.

288. Zmyślmy ſobie teráz, iż wiele ciáł ſwobodnych znayduie ſię bydź połączonych iedne z drugiémi w ſpoſób iakikolwiek, (iednakże tak, ażeby układu tych wſzyſtkich ciáł nic nie przymuſzało), niechay tedy takowe ciała odbiorą popędy iakiekolwiek, którym niémogą bydź doſkonale poſłuſzne, z przyczyny wzaiemnego przeſzkadzania iedno drugiemu; mówię, że ſrzodek ciężkości ruchać ſię będzie tak, iak gdyby te wſyſtkie ciała były ſwobodne.

Jakóż, niech będzie iaki chce ruch, który powezmie każda cząſtka układu ciáł, to takowy ruch nadany, zawſze można zmyślić ſobie, iakoby złożony z tego ruchu, iaki w rzeczy ſaméy ciało powezmie, i z innego drugiego. Lecz podług (280), mocą tych drugich ruchów, powinna zachodzić równowaga; więc zmyśliwſzy ie ſobie, każdy z nich iakoby rozłożony na trzy inne ruchy równoległe trzém liniióm wzaiemnie ſo-

ſobie proſtopadłym, ſumma ſił wynikaiących z tego rozłożenia równolegle względém każdéy z tych linii, powinna bydź zerém (282). Lecz znowu droga czyli tór, do któréy przebieżenia mocą każdéy z tych ſił dąży ſrzodek ciężkości (273), równa ſię ſummie ſił równoległych każdéy z tych linii, rozdzielonéy przez ſummę ciáł; więc na wártość drogi, do któréy przebieżenia dąży pomiéniony ſrzodek ciężkości, mocą zaſzłych odmian w układzie, wypada zero; więc w ſrzodku ciéżkości ta odmiana nic nieſprawuie. A zatém ruch iego muſi bydź taki, iak gdyby wſzyſtkie części całego układu były ſwobodnie poſłuſzne bez żadnéy uymy, każda ſwoiéy ſile która ią popędza.

Więc ogółém: *Stan ſrzodka ciężkości ciała lub układu ciáł iakiegokolwiek, nieodmiénia ſię przez wzaiémną czynność tego ciała albo tego układu ciáł.*

289. A zatém wnieśmy ſtąd 1ód *Ze ieżeli iakie ciało albo układ ciáł, obraca ſię około ſwego ſrzodka ciężkości w ſpoſób bądź iakikolwiek; to takowy ſrzodek ciężkości, zoſtawać będzie nieodmiénnie w tymże ſtanie, iak*

gdyby ciało nieobracało ſię. 2re Z téyże ſamey zaſady i ſtąd co wyżéy powiedziało ſię o ruchu śrzodka ciężkości w ciałach ſwobodnych, naſtępuie, że ieżeli ciało iakiéykolwiek poſtaci, albo iakikolwiek układ ciał, odbiéra popęd w iakimkolwiek kierónku *AB*
fig. 81. (fig. 81), przechodzący w całości w przerzeczone ciało; to śrzodek ciężkości *G*, ruchać ſię będzie w kierónku linii *GS* równoległéy linii *AB*, w taki ſpoſób, iak gdyby ów popęd był mu nadany bezśrzednie w tymże kierónku *GS*. A ieżeli o iedén raz wiele ſił ſkutkuie przeciwko różnym punktóm tego ciała, to śrzodek ruchać ſię będzie, tak, iak gdyby te wſzyſtkie ſiły były do niego przyłożone bezśrzednie.

290. Więc gdyby w téyże chwilce, kiedy ciało odbiéra popęd w kierónku *AB*, była przyłożona do śrzodka ciężkości *G*, ſiła wykiérówana w rozumiéniu przeciwném *SG*, i równa ſile czyniącéy w kiéronku *AB*, to śrzodek ciężkości zoſtałby w ſpoczynku. Ale iawna ieſt, że inne części tego ciała, niezoſtałyby w ſpoczynku, bo te dwie ſiły lubo równe, ale nieſą wbréw iedna drugiéy przeciwne. Ruch zaś ciała, którego śrzodek ciężkości zoſtawałby w ſpoczynku, oczywiście niémoże bydź inny, tylko iedynie kołowrotny około śrzodka ciężkości.

Więc ieżeli ciało iakie, odbiéra iedén albo wiele popędów w kiéronkach nieprzechodzących przez iego śrzodek ciężkości, to 1re *Takowy śrzodek ciężkości ruchać ſię będzie, iak gdyby wſzyſtkie ſiły, były do niego przyłożone bezśrzednie, każda w kierónku równoległym temu iaki ma.* 2re *Części takowego ciała obracać ſię będą około śrzodka ciężkości, iak gdyby obracały ſię mocą ſił ni-*
nie

nie przyłożonych do ciała, a to ieżeliby tén śrzodek ciężkości był niewzruſzenie umocniony. Takowe ruchy kołowrotne opiſzemy w Tomie naſtępuiącym.

Stąd pokazuie ſię, rzekłſzy pomimo, że ieżeli kierónek czynności prochu ſkutkuiącego przeciwko bombie (fig. 78), nieprze- fig. 78.
chodzi doſkonale przez śrzodek ciężkości *G* téyże bómby, to takowa w biegu ſwoim obracać ſię muſi około *G*. Obracać ſię też może ieſzcze i z innych przyczyn, o czém będzie na innem mieyſcu.

291. Wnieśmy ieſzcze, że ieżeli ſtan śrzodka ciężkości ciała iakiego, podpada odmianie, to ſtać ſię niémoże tylko przez czynność albo przez odpór nowych ſił nienależących do tego ciała; a zatém takową odmianę zawſze można mieć wiadomą, wynalazłſzy iaka byłaby ſiła złożona z tych wſzyſtkich ſił, gdyby były przyłożone do śrzodka ciężkości, każda w kiérónku równoległym temu, iaki ma ninie.

Te tedy ſą zaſady powſzechne, na których gruntuie ſię ruch i równowaga ciał. Przyſtóſowanie tych zaſad w różnych przypadkach ruchu i równowagi, iakie w praktyce zdarzyć ſię mogą, zachowuiemy ſobie do Tomu neſtępuiącego, a teraz przyſtępuiemy do równowagi Rościeków.

O RÓWNOWADZE ROŚCIEKÓW I O CIAŁACH KTÓRE BYWAIĄ W NICH ZANURZONE.

292. Lubo nam nieieſt wiadomo, iaki ieſt ſtopień ſubtelności w cząſtkach rościecznych, atoli przynaymniéy o tém niémożna wątpić, żeby te cząſtki niebyły materyalne; a zatém ażeby wzwyż uſtanowione zaſady powſzechne Równowagi i Ruchu, zarówno im nieſłużyły tak, iak ciałóm bryłaſtym. Ale że ta zaſada czyli to prawo na którym funduie ſię Równowaga, nieſamo tylko iedno ieſt potrzebne, iak wyżéy powiedziało ſię; przeto należy nam tu zaſtanowić ſię, ieżeli niéma ieſzcze innego powſzechnego prawa, od którego mógłaby ta równowaga zawiſnąć.

293. Ponieważ Równowaga zależy na wyniſzczeniu wſzyſtkich ſił, a wiedzieć nié-

mo-

można iakim ſpoſobém w cząſtkach rościecznych ſiły przechodzą z iednych w drugie, przeto dla założenia w téy materyi początkowych zaſád, muſimy udać ſię do doświadczéń: poczniémy tedy od tego, co w téy miérze miéć możém naypewniéyſzego z doświadczenia. Ale wprzód uważmy, że rościeki trzeba rozróżnić na dwa gatunki: iedne takie, że cząſtki ich ſą, albo mogą bydź poczytane iakoby były doſkonale twarde, i które uważone w iakiéy miąższości nieſą *tłoczliwe* (compreſſible), to ieſt że niémogą bydź przyprowadzone do tego ſtanu, ażeby zabiérały mniéyſzą obiętość od téy, iaką naturalnie maią; taka ieſt woda i większa część innych *roſpłynów* (liqueur). Do drugiego rodzaiu, należą rościeki ſkładaiące ſię z cząſtek tłoczliwych i ſprężyſtych, to ieſt które będąc ſtłoczone, mogą zabiérać mniéyſzą obiętość, i mogą nazád powrócić do piérwſego ſtanu, kiedy przyczyna, przyprowadzaiąca ie do mniéyſzéy obiętości, uſtanie ſkutkować; i takim rościékiém ieſt powietrze. O Rościekach nietłoczliwych wkrótce niżéy mówić będziémy.

294. Zobaczmy teráz, czego nas naucza doświadczenie o Równowadze Rościeków. Niechay będzie (fig. 82. 83) rurka ſkładaiąca ſię z trzech kolanek AB, BC, CD iednakowéy śrzednicy. Jeżeli w każdą z tych dwóch rurek, naleie ſię wody przez kolanko AB, to ta woda przeydzie z kolanka BC w kolanko ko CD; a przeſtawſzy nalewać, po- *figura* 82 83.

wiér-

wiérſzchnia wody zamkniętéy w każdym kolanku, znaydzie ſię bydź położona w kierónku téyże linii poziemnéy AD, albo EF, nachylenie kolanka BC niechayby było iakie chce. Jeſt to rzecz wſzyſtkim wiadoma, którą my tu zakładamy ſobie za fundament, i z niego czyniémy ſobie naſtępuiące wnioſki.

295. Napełniwſzy rurkę $ABCD$ aż po AD, ieżeli przez iakikolwiek punkt E, zmyślimy ſobie liniią poziemną EF, iawna ieſt, że waga wody zawartéy w rozległości $EBCF$ wcale nic niepomaga do utrzymania ſłupów wody HE i DF; albowiém doświadczenie naucza, że gdyby w kolanku AB woda niedochodziła tylko do punktu E, to i w kolanku DC niedochodziłaby tylko do punktu F; a zatém obiętość $EBCF$ ſama przez ſię zoſtaie w równowadze; więc równowaga miałaby ieſzcze miéyſce w całéy obiętości rurki, chociażby rościek zawarty w obiętości $EBCF$ o iedén ráz utracił ſwoię ważność. Takowy tedy rościék nieinaczéy uważać trzeba, tylko iako śrzodek do połączenia ſłupka AE z ſłupkiém DF, przez który ſłupkowi DF udziéla ſię to całe tłoczenie, które ſłupek AE w nim ſprawuie; i odwrotnie przez który ſłupkowi AE udziéla ſię znowu to całe tłoczenie, które w nim ſprawuie ſłupek DF,

Niemniéy i to ieſt oczywiſta, że to wſzyſtko co dopiéro powiedziało ſię, miałoby ieſzcze miéyſce, gdyby zamiaſt ſłupków AE i DF, użyło ſię dwóch tłoczéń téyże wár-

wártości. A zatém można ſtąd wnieść ogółém, że: *Jeżeli rościék niémaiący ważności, ieſt zamknięty w naczyniu iakiémkolwiek, to zrobiwſzy otwarcie w takowém naczyniu, i do uczynionego otwarcia przyłożywſzy iakiekolwiek tłoczenie, takowe tłoczenie rościągać ſię będzie równo w wſzelkiém rozumiéniu.* Ponieważ nachylenie kolanka BC w fig. 83, fig. 83.
bynaymniéy nieprzeſzkadza temuż ſkutkowi fig. 28.
co w fig. 82.

296. A teráz łatwo widziéć ſię daie, że tłoczenie nietylko roſchodzi ſię równo w wſzelkiém rozumiéniu, ale téż iże ſkutkuie proſtopadle przeciwko każdemu punktowi powiérſzchni naczynia, zawiéraiącego w ſobie rościék. Albowiém gdyby tłoczenie ſkutkuiące przeciwko powiérſzchni, nieſkutkówało proſtopadle, to iawna ieſt, że odpór téy powiérſzchni niémogłby go zupełnie zniſzczyć, powiérſzchni mówię, w któréy tu teráz nieprzypuſzczamy żadnego tarcia; ſkąd muſiałaby wynikać czynność przeciwko cząſtkóm rościeku, która roſchodząc ſię w wſzelakiém rózumiéniu (294), muſiałaby w rościeku ſprawić poruſzenie; a zatém rościék w naczyniu, nigdy niemógłby utrzymać ſię w równowadze; coſprzeciwia ſię doświadczeniu.

297.

297. Wniéśmy tedy ſtąd, że ieżeli czę-
ści rościeku zawartego w naczyniu iakim-
fig. 84. kolwiek *ABCD* (fig. 84) otwartém ku czę-
ści *AD*, będąc nagabane od iakichkolwiek
ſił, a iednak zoſtaią w równowadze, to ſiły
takowe muſzą bydź proſtopadłe powiérſz-
chni *AD*; albowiém ieżeli równowaga ma
miéyſce, to takowa niemniéy ieſzcze będzie
utrzymówać ſię, przyłożywſzy na wiérſzch
nakrywę, takiéyże poſtaci iaką ma powiérſz-
chnia *AD*; w takim zaś przypadku widzie-
liśmy dopiéro wyżéy, że ſiły czyniące prze-
ciwko powiérſzchni *AD*, powinny iéy bydź
proſtopadłe.

298. Daymy tedy że ſiły czyniące przeciwko cząſtkóm rościeku, nieſą inne, tylko ſama ważność; a w takim razie wnieść ſobie powinniśmy, że kierónek ważności muſi bydź proſtopadły powiérſzchni wód ſpokoynych; a zatém że: *Cząſtki iednegoż rościeku ważnego, żeby ſię utrzymały w równowadze, powinny miéć położenie poziemne; poſtać naczynia zawiéraiącego w ſobie rościék niechby była iaka chce.*

299. A teráz zmyślmy ſobie, że na-
fig. 85. czynie *ABCD* (fig. 85) będąc ze wſzyſt-
kich ſtrón zamknięte, ieſt napełnione roś-
ciekiém niémaiącym ważności, i że w ta-
kowém naczyniu zrobiwſzy małe otwarcie
E, do tego otwárcia przyłożyło ſię iakie-
kolwiek tłoczenie; iawna ieſt, że wynikaią-
ce ſtąd tłoczenie powiérſzchni płaſkiéy, o-
znaczonéy przez liniią *BC*, żadnym ſpoſobém zależyć niebędzie od ilości rościeku zawartego w przerzeczoném naczyniu, ani téż od poſtaci naczynia; ale że, ponieważ tłoczenie przyłożone do otwarcia *E*, roſchodzi ſię równo w wſzelakiém rozumiéniu (295), że mówię, tłoczenie na powiérſzchnią *BC*, równać ſię będzie tłoczeniu ſkutkuiącemu na otwarcie *E*, powtórzonemu tyle razy, ile znayduie ſię punktów w powiérſzchni *BC*.

300. Z téyże przyczyny, tłoczenie przyłożone do otwarcia *E*, będzie uſiłować, ażeby odeprzéć wiérſzchne wieko *AD*, z taką ſiłą, któraby w każdym punkcie równała ſię tłoczeniu ſkutkuiącemu na otwarcie *E*; tak iż wiérſzch czyli wieko *AD* odbiéra tłoczenie z ſtrony wnętrſznéy ku zewnętrſznéy, od ſiły równaiącéy ſię tłoczeniu ſkutkuiącemu w otwarciu *E*, powtórzonemu tyle razy, ile znayduie ſię punktów w powiérſzchni *AD*.

301. Daymy teráz, że naczy-
nie *ABCDEF* (fig. 86), maiące fig. 86
dno *CD* w położeniu poziemném,
ieſt napełnione rościekiém ważnym.
Twiérdzę, że w tym razie, tłoczenie
ſkutkuiące przeciwko dnu *CD*, nie-
zależy żadnym ſpoſobém od ilości
ro-

rościeku zawartego w naczyniu, ale tylko od wielkości dna *CD*, i od odległości powiérzchni *AF* od podstawy *CD*.

Jakóż, zmyśliwszy sobie liniią poziemną *BE*, i że rościek zawarty w części *BCDE*, o iedén ráz utracił swoię ważność, iawna iest podług tego co poprzedziło wyżéy (299), że iakikolwiek promyk pionowy *IK*, rościeku ważnego zawartego w części *ABEF*, sprawuie w punkcie *K* takie tłoczenie, które powinno równo roschodzić się po całym rościeku *BCDE*; i że toż tłoczenie skutkuie równo z dołu do gory, dla odparcia czynności wszystkich innych promyków, odpowiadaiących pionowo różnym punktóm powiérzchni *BE*; więc promyk *IK* sam ieden, utrzymuie równowagę z wszystkiémi innémi promykami miąższości *ABEF*; więc rozumieiąc zawsze miąższość *BCDE* niémaiącą ważności, przeciwko dnu *CD*, niebędzie wynikało inne tłoczenie, iak tylko od promyka *IK*, które roschodząc się równo po wszystkich punktach powiérzchni *CD*, sprawuie w niéy tłoczenie, równe tłoczeniu skutkuiącemu w punkcie *K*, powtórzonemu tyle razy, ile iest punktów w powiérzchni *CD*.

fig. 87. Więc zmyśliwszy sobie (fig. 87) rościék ważny zawarty w części *ACDF*, podzielony na zrazy poziemne, pewna iest, że zraz wiérzchny, nieudziela dnu *CD* innéy czynności, tylko taką, iakąby udzielił promyk *ab*, téyże wysokości co zraz pomièniony; a że o każdym zrazie toż samo można powiedzieć, więc dno *CD*, nieodbiéra innego tłoczenia, tylko takie, iakieby odbiérało od summy wszystkich promyków *ab*, *bc*, *cd* i. t. d.; a ponieważ znowu takowe tłoczenie roschodzi się równo po wszystkich punktach powiérzchni *CD*, więc równa się téyże powiérzchni *CD*, rozmnożonéy przez summę tłoczéń, iakie sprawić mogą promyki *ab*, *bc*, *cd* w iednymże punkcie.

Więc 1ód. *Jeżeli rościék* ACDF *iest iednorodny, to iest złożony z cząstek iednéyże natury, iednakowéy ważności i. t. d., to utłoczenie dna* CD, *będzie wyrażone przez* CD × ag; *to iest że wymiarém iego, będzie waga wielościanu lub wałka, maiącego za podstawę* CD, *a za wysokość* ag.

2re. *Jeżeli rościék składa się z zrazów czyli warsztw różnéy gęstości, to utłoczenie dna* CD, *będzie wyrażone przez podstawę* CD, *rozmnożoną przez summę ważnościów przyrodnych każdéy warsztwy*; * mówię przez summę ważnościów przyrodnych, a nie przez summę wagi; bo utłoczenie niezależy od ilości rościeku umieszczonego w każdéy warsztwie, ale iedynie od wagi własnéy każdemu promykowi. Uważmy dobrze, że co się tu mówi, ma zawsze miéysce, czyto naczynie rozszérza się ku wiérzchowi, czy téż zwęża się iak w (fig. 88). Tłoczenie fig. 88. które sprawuie rościék zawarty w obiętości *ACDF*, iest takież samo, iakieby sprawił wałek *ECDG*, gdyby był napełniony rościekiém do téyże wysokości.

302. Stąd co poprzédziło łatwo wnieść sobie można, że ieżeli dwa rościeki *NHCB-FL*

* *Należy tu przypomnieć sobie, co iuż indziéy powiedziało się, że ważnością przyrodną iakiéykolwiek materyi, iest ważność doświadczona pewnéy iakiéy obiętości, téyże materyi.*

fig. 89. FL i $EFLM$ (fig. 89), każdy z nich będąc iednorodny, ale różnéy gęſtości iedén względem drugiego, łączą ſię z ſobą w mieyſcu FL, w naczyniu iakiémkolwiek, to niebędą mogły utrzymać ſię w równowadze inaczéy, tylko kiedy ich wyſokości EF, IK, nad przedziałową płaſzczyznę poziemną FL, będą między ſobą w ſtóſunku odwrotnym ſwoich ważnościów przyrodnych. Jakoż, ponieważ rościék $LFBCGO$, może ſam przez ſię utrzymać ſię w równowadze (298), więc trzeba ażeby obiętość $NHGO$, trzymała równowagę z obiętością $EFLM$; więc trzeba ażeby tłoczenie części $NHGN$ czyniące z dołu do gory przeciwko FL, równało ſię tłoczeniu części $EFLM$, czyniącemu z góry na dół przeciwko téyże powiérſzchni FL. Lecz podług (301), tłoczenie części $NHGO$ przeciwko FL, równa ſię wadze wielościanu albo wałka napełnionego tym rościekiém, maiącego za wyſokość IK, a za podſtawę FL, a ta waga znowu równa ſię przyrodnéy ważności rozmnożonéy przez obiętość; więc oznaczywſzy przez P, takową ważność przyrodną, na wyrażenie pomiénionéy wagi mieć będziém, $P \times IK \times FL$. Z téyże przyczyny, oznaczywſzy przez p, ważność przyrodną rościeku $EFLM$, na wagę onego czyli na wyrażenie tłoczenia iego przeciwko powiérſzchni FL, mieć będziém, $p \times EF \times FL$. Muſi tedy bydź $P \times IK \times FL = p \times EF \times FL$ albo $P \times IK = p \times EF$ więc $P : p :: EF : IK$; więc wyſokości EF i IK, powinny mieć ſię do ſiebie w ſtóſunku odwrotnym ważnościów przyrodnych.

I tak *np.* gdyby część $LFBCHN$ była napełniona żywém śrzébrém, a część $EFLM$ wodą; ponieważ, żywe śrzebro ieſt 14. razy ważniéyſze od wody, więc trzeba ażeby wyſokość IK, była 14 razy mniéyſza od wyſokości EF; to ieſt żeby była czternaſtą częścią wyſokości EF; poſtać naczynia niechby była iaka chce.

303. Stąd co poprzédziło dotąd, pokazuie ſię, że ſpoſób czynności rościeków, ieſt rożny od ſpoſobu iakim ſkutkuią ciała. Właściwie mówiąc, w fig. 87. przeciwko fig. 87.
powiérzchni CD nieſkutkuie tylko
część $ECDG$; a w fig. 88, powiér- fig. 88.
ſzchnia CD odbiéra utłoczenie od obiętości $ACDF$, tak wielkie, iakby była utłoczona, od wagi rościeku zawartego w całym wałku $ECDG$; zamiaſt, że gdyby rzecz ſzła o iakie ciało nierościeczne *np.* gdyby rościek $ACDF$ zlodówaciał, to utło-
czenie dna, równałoby ſię w fig. 87, fig. 87.
wadze całéy obiętości $ACDF$, a w fig. 88, równałoby ſię tylko wadze obiętości $ACDF$.

304. Ale należy nam tu dać baczenie na dwoiakie utłoczenie, i rozróżnić iedno od drugiego; bo inne ieſt które ſprawuie rościek przeciwko dnu CD naczynia, a inne któreſkutkówałoby przeciwko temuż dnu, gdyby naczynie miało bydź nie-

niesione. To pewna, że gdyby dno *CD* oderwało się, dla utrzymania go
fig. 87. (fig. 87), nietrzebaby użyć tylko takiéy usilności, któraby wyrównywała wadze wałka *ECDG*; do przeniesiénia zaś tegóż naczynia, trzebaby użyć usilności, rownaiącéy się wadze wody zawartéy w całém naczyniu; co niżéy obiaśni się lepiéy, po opisaniu sposobu, w iaki maią bydź obrachówane skutki tłoczenia, przeciwko powiérszchniom płaskim pochyłym, i przeciwko powiérszchniom krzywym albo wypukłym.

figura 305. Niechay będzie *ACDF* (fig. 90,
-90. 91. 91) przerznięcie pionowe naczynia, obwiedzionego powièrszchniami płaskiémi albo wypukłémi, nachylonémi względém poziomu iak się spodoba. Zmyśliwszy sobie zrazik niezmiérnie ciénki *abcd*, można sobie w myśli odłożyć na bok ważność tego zrazika, a tylko uważać go iakoby utłoczonym od wiérszchnego rościeku. Takowe utłoczenie roschodzi się równo po wszystkich punktach tego zrazika, i skutkuie prostopadle a oraz równo, przeciwko każdemu punktowi ścian *ac*, *bd*. A ponieważ podług (301), tén skutek iest takiż sam, iakiby sprawił promyk *IK* sam iedén, więc utłoczenie skutkuiące prostopadle przeciwko *bd*, będzie wyrażone przez $bd \times IK$; iawna zaś iest, iż toż samo byłoby, gdyby rozległość *bd*, zamiast poczytania iéy za małą liniią prostą, byłaby wzięta za małą powiérszchnią.

306.

306. A zatém ogołém rzéc można. *Ze tłoczenie skutkuiące prostopadle przeciwko iakiéykolwiek powiérszchni nieźmiérnie małéy, pochodzące od rościeku ważnego a iednorodnego, równa się mnogości, wynikaiącéy z rozmnożenia téy powiérszchni przez odległość iéy od linii poziemnéy AF, i przez ważność przyrodną tegoż rościeku.*

307. Więc całkowite utłoczenie skutkuiące przeciwko iakiéykolwiek powiérszchni płaskiéy, położonéy iak się spodoba, równa się summie mnogościów, wynikaiących z rozmnożenia cząstek niezmiérnie małych téy powiérszchni, każdéy przez odległość iéy od płaszczyzny poziemnéy, albo od górnéy powiérszchni rościeku, i przez przyrodną ważność tegóż rościeku. Lecz z natury środka ciężkości, summa mnogościów, wynikaiących z rozmnożenia każdéy cząstki przez odległość iéy od płaszczyzny stałéy, równa się mnogości, wynikaiącéy z rozmnożenia całéy powiérszchni, przez odległość iéy środka ciężkości od téyże płaszczyzny; więc: *Utłoczenie, iakie sprawu-*

ie

ie rościek ważny przeciwko powiérzchni płaskiéy a pochyłéy, ma za wymiár, mnogość wynikaiącą z rozmnożenia téyże powiérzchni, przez odległość iéy śrzodka ciężkości od płaszczyzny poziemnéy, i przez przyrodną ważność rościeku.

308. Ponieważ tłoczenia skutkuiące przeciwko każdemu punktowi iednéyże powiérzchni płaskiéy, są prostopadłémi takowéy powiérzchni, a zatém wzaiemnie sobie równoległémi, więc z tych wszystkich tłoczéń złożona siła, czyli utłoczenie całkowite, podług (206) musi im także bydź równoległe; a że wártość takowego utłoczenia, iako téż wartości każdego z tłoczéń cząstkowych naznaczyły się dopiéro wyżéy, więc podług tego co się rzekło (219), łatwo będzie wynaléśdź, gdyby potrzeba wyciągała, którędy przechodzi takowa siła złożona, która, iako łatwo widziéć się daie, niepowinna przechodzić przez śrzodek cięż-
fig. 92. kości *G*, téyże powiérzchni (fig. 92), ale nieco poniżéy. W takim tylko przypadku, kiedyby powiérzchnia była niezmiérnie mała, możnaby rozumiéć, że utłoczenie całkowite, przechodzi przez śrzodek ciężkości takowéy powiérzchni nachylonéy.

309. Zobaczmy teráz co wynika z tych wszystkich tłoczéń w rozumiéniu pionowém i w rozumiéniu poziemném. Kształt ciała niech będzie iaki chce, zawsze uważać można

na to ciało iakoby złożone z niezmiérnéy liczby zrazów wzaiémnie sobie równoległych, a powiérzchnią obwodu każdego zrazika, iakoby złożoną z wielu nierównoległoboków, których liczba byłaby niezmiérna, ieżeli powiérzchnia iest krzywa. A zatém, ażeby oszacówać, skutek wynikaiący z tłoczenia rościeku, bądźto przeciwko wnętrznym ścianóm naczynia, bądź téż przeciwko powiérzchni zewnętrznéy bryły zanurzonéy w tymże rościeku, trzeba oszacówać skutek wynikaiący z tłoczenia przeciwko powiérzchni nierównoległoboku wysokości niezmiérnie małéy.

Zmyślmy sobie tedy (fig. 93) nierównoległobok *ABCD*, którego dwa boki równoległe byłyby *AB* i *CD*, a którego wysokość byłaby niezmiérnie mała. Daymy że do śrzodka ciężkości *G* tego nierównoległoboku, iest przyłożona prostopadle względém płaszczyzny iego siła *P*, któréy wártość byłaby wyrażona, przez mnogość wynikaiącą z rozmnożenia powiérzchni tego nierównoległoboku, przez odległość *GG'* onego śrzodka ciężkości od płaszczyzny poziemnéy *XZ*. fig. 93.

Zeby obrachówać skutek téy siły, tak w rozumiéniu poziemném iak w pionowém, zmyślam sobie płaszczyznę *CDFE* przechodzącą przez liniią *CD*, i drugą płaszczyznę poziemną, przechodzącą przez liniią *AB*; a po-

poprowadziwſzy liniie pionowe CE, BF ſpotykaiące ſię z tą płaſzczyzną w punktach E i F, prowadzę liniie BE i AF; naoſtatek zmyślam ſobie płaſzczyznę KIH, przechodzącą przez kierónek GP ſiły P, któreyto płaſzczyznie liniią CD byłaby proſtopadłą, i w którey liniie HGK i HI byłyby ſpólnemi przecięciami z dwiéma płaſzczyznami $ABCD$ i $FECD$; takowa płaſzczyzna będzie proſtopadła płaſzczyznóm $ABCD$, $FECD$ (Jeom. 190), ponieważ liniia CD, ieſt ich ſpólném przecięciém; naoſtatek z punktu K wziętego na AB i HK, prowadzę KI proſtopadłą płaſzczyznie $TECD$, która muſi bydź proſtopadłą na HI.

To założywſzy, roſkładam ſiłę P na dwie inne, któreby znaydówały ſię na płaſzczyznie KIH przedłużonéy, a z których iedna GL byłaby poziemna lub proſtopadła płaſzczyznie $FECD$, a druga GM byłaby pionowa. A tak oznaczywſzy te dwie ſiły przez L i M i zamknąwſzy równoległobok $GMNL$ na linii GN obranéy podług upodobania na przekątną, miéć będę (201), $P : L : M :: GN : GL : GM$ albo $:: GN : GL$ LN. Ale że tróykąt GLN, ma ſwoie boki proſtopadłe na boki tróykąta KIH, więc te dwa tróykąty będą ſobie podobne (Jeom. 111), i dadzą, $GN : GL : LN :: HK : HI : IK$; więc $P : L : M :: HK : HI : IK$. Rozmnóżmy te oſtatnie trzy wyrazy przez $\frac{AB + CD}{2} \times GG'$, co między niémi nieodmiéni ſtóſunku, a miéć będziém, $P : L : M :: HK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : HI \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : IK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG'$.

Te-

Teráz zaś uważmy 1mo Ze $HK \times \frac{AB + CD}{2}$, wyraża powiérſzchnią nierównoległoboku $ABCD$. 2re Ze ponieważ CE i DF tudzież CD i EF ſą ſobie równoległe, więc będzie $CD = EF$; więc wyrażenie $IK \times \frac{AB + CD}{2}$, wychodzi na tóż ſamo, co $IK \times \frac{AB + EF}{2}$, a zatém oznacza powiérſzchnią nierównoległoboku $AFEB$. 3cie A że wyſokość nierównoległoboku $ABCD$ rozumié ſię niezmiérnie mała, więc liniia EF równa linii CD, może bydź wzięta zamiaſt linii AB i CD, tak iż $HI \times \frac{AB + CD}{2}$, wychodzi na $HI \times EF$, co wyraża powiérſzchnią proſtokąta $ECDF$. Będzie tedy $P : L : M :: ABCD \times GG' : ECDF \times GG' : AFEB \times GG'$. Lecz ſiłę P rozumieliśmy bydź wyrażoną przez $ABCD \times GG'$; więc ſiła L będzie wyrażona przez $ECDF \times GG'$, a ſiła M, przez $AFEB \times GG'$.

310. Zmyślmy ſobie teráz z kątów A, D, C, B ſpuſzczone proſtopadłe na płaſzczyznę XZ. Takowe proſtopadłe można ſobie w myśli wyſtawić, iakoby były krawędziami wielościanu ściętego, którego podſtawa poziemna na płaſzczyznie XZ, równałaby ſię rozległości $AFEB$, a którego podſtawą nachyloną byłoby $ABCD$. A że liniie AB i CD, rozumieią ſię bydź niezmiér-

 nie

nie bliſko iedna drugiéy, więc bryłówatość tego wielościanu różnić ſię niebędzie, od bryłówatości takiego wielościanu, któryby miáł też ſamę podſtawę poziemną, a za wyſokość liniią *GG*; lecz na wyrażenie tego oſtatniego wielościanu, wypada *AFEB* X *GG*, to ieſt ilość właśnie taż ſama, którą wynalezliśmy na wártość ſiły pionowéy *M*; więc ta ſiła miéć także będzie na wyrażenie ſwoie, bryłówatość wielościanu ściętego, maiącego za podſtawę nachyloną, *ABCD*, a za podſtawę poziemną, *wypiętnówanie* (projection) płaſzczyzny *ABCD* na płaſzczyznie poziemnéy *XZ*.

311. Teráz zmyślmy ſobie bryłę iakąkolwiek porzniętą na niezmiérną liczbę zrazików poziemnych, takich iak *ABDEabde*
fig. 94. (fig. 94), i że, proſtopadle względém śrzodka ciężkości odpowiadaiącego powiérſzchni każdego nierównoległoboku, z których można rozumiéć bydź złożoną powiérſzchnią tego zrazika, ſą poprzykładane ſiły, takie, iż każda z nich byłaby wyrażona, przez mnogość wynikaiącą z rozmnożenia powiérſzchni odpowiadaiącego nierównoległoboku, przez odległość iéy śrzodka ciężkości, od płaſzczyzny poziemnéy *XZ*. Takowe ſiły niebędą co innego, tylko tłoczenia iakie ſprawowáłby rościek ważny, przeciwko wnętrſznéy powiérſzchni zrazu *ABDEabde*, należącego

leżącego do naczynia, w którém zawiérałby ſię rościek pomiéniony; też ſiły wyrażałyby także tłoczenia, iakie ſprawówáłby ténże rościek przeciwko powiérſzchni zewnętrſznéy bryły w nim zanurzonéy. Lecz widzieliśmy dopiéro wyżéy, że rozłożywſzy takowe ſiły na dwie inne, iednę pionową a drugą poziemną, każda ſiła pionowa, byłaby wyrażona przez wielościan ścięty, maiący za podſtawę na płaſzczyznie poziemnéy *XZ*, wypiętnowanie nierównoległoboku na téyże płaſzczyznie, a za podſtawę nachyloną ténże nierównoległobok; więc ſumma ſił pionowych, czyli iedna ſiła pionowa z tamtych wſzyſtkich wynikaiąca, będzie wyrażona przez ſummę tych wſzyſtkich wielościanów ściętych; a że tóż ſamo można także powiedziéć o każdym zrazie poziemnym, więc należy wnièść w powſzechności:

1ód *Ze ieżeli naczynie iakiekolwiek* AC-
DF (*fig.* 86), *ieſt napełnione rościekiém aż* fig. 86.
do linii iakiéykolwiek AF, *to z wſzyſtkich tłoczéń, które czyni tén rościék przeciwko każdemu z ſwoich punktów, niewynika inna ſiła pionowa, tylko ſiła, wyrażona przez bryłowatość albo raczéy przez wagę obiętości, iaką zabiéra pomiéniony rościek.*

2re *Ze ieżeli ciało takie, iak* AEDBM
(*fig.* 95), *którego przerznięciém poziemném w* fig. 95.
naygrubſzém miéyscu byłaby płaſzczyzna AIBF, *ieżeli mówię, to ciało ieſt zanurzone w rościeku do iakiéykolwiek głębokości, odłożywſzy na bok tłoczenie ſkutkuiące przeciwko wiérſzchnéy części* AMB; *to uſilność pionowa rościeku, dążaca do podnieſiénia tego ciała, równa ſię wadze obiętości rościeku, zawartego między poziomém* XZ, *powiérſzchnią* AIBFE, *i między powiérſzchnią wypukłą, powſtaiącą z linii proſtopadłych, ſpuſzczonych ze* wſzy-

wſzyſtkich punktów obwodu AIBF *na płaſzczy-*
znę XZ.

Jeżeli daléy uważymy tłoczenie ſku-
tkuiące przeciwko wiérſzhnéy powiérſzchni
w naywiękſzém przerznięciu poziemném, to
z téyże przyczyny da ſię widzieć, że z tło-
czéń rościeku na tę powiérſzchnią w ro-
zumiéniu pionowém, to ieſt z tłoczéń dą-
żących do zanurzenia ciała na dół, wyni-
ka uſilność, równaiąca ſię wadze obiętości
rościeku, zawartego między tą powiérſz-
chnią, między powiérſzchnią *A'F' B'I'*, któ-
ra ieſt wypiętnówaniém piérwſzéy, i między
powiérſzchnią, powſtaiącą z linii proſtopa-
dłych poprowadzonych z wſzyſtkich pun-
któw obwodu *AIBF*. Więc od piérwſzéy
uſilności pionowéy odiąwſzy drugą, iawna
ieſt, że ciało odbiéra utłoczenie pionowe z
góry na dół, ſkutkuiące z uſilnością, równa-
iącą ſię wadze takiéy obiętości rościeku, ia-
ką zabiéra w nim przerzeczone ciało.

312. Wniéśmy zatém ogołém: *Że ieżeli ciało znayduie ſię bydź zanurzone w iakimkolwiek rościeku, to w nim utraca część wagi ſwoiéy, równaiącą ſię wadze takiéy obiętości rościeku, iaką ruguie z miéyſca ſwego.*

313. Zoſtaią nam ieſzcze dwie rzeczy do rozwiązania, to ieſt piérwſza, którędy przechodzi uſilność pionowa, wynikaiąca z wſzyſtkich tłoczéń rościeku, a druga, w co obracaią ſię ſiły poziemne. Co do piérwſzéy, łatwo widzieć ſię daie, że ta-ko-

kowa uſilność pionowa, powinna przechodzić przez środek ciężkości obiętości rościeku, wyrugówanego z miéyſca ſwoiego. Jakoż zmyśliwſzy ſobie tę obiętość podzieloną na niezmiérną liczbę promyczków pionowych, uſilność z iaką dąży rościék do pionowego utłoczenia każdego promyczka, ieſt wyrażona podług (311), przez wagę obiętości rościeku, równaiącą ſię temu promyczkowi. Więc ażeby miéć odległość ſiły złożonéy z tamtych wſzyſtkich, od iakiéykolwiek płaſzczyzny pionowéy; trzeba rozmnożyć miąższość każdego promyczka, uważonego iakoby był téyże natury, iakiéy ieſt rościék, trzebaby go mówię rozmnożyć, przez odległość od téy płaſzczyzny, a ſummę wſzyſtkich mnogościów, rozdzielić przez ſummę promyczków; lecz tóż ſamo właśnie trzebaby uczynić dla wynaleziénia środka ciężkości rościeku wyrugówanego; więc ogołém: *Utłoczenie pionowe rościeku przeciwko ciału w nim zanurzonemu, przechodzi zawſze przez środek ciężkości obiętości tegóż rościeku, z ſwego miéyſca wyrugowanéy.*

214. Zobaczmy teráz w co obracaią fię fiły poziemne, o których wzwyż mówiliśmy. Niefpufzczaiąc z oczu zrazu brylaftego (fig.
fig. 43. 94), ieżeli zmyślimy fobie, płafzczyzny piono- we zamknięte górném przerznięciém, a prze- chodzące przez boki *ab*, *bc*, i. t. d. dólnego przerznięcia, to takowe płafzczyzny, złożą obwód wielościanu, maiącego za wyfokość wyfokość zrazu; a każda ściana tego wielo- ścianu, przez rozległość fwoiéy powiérfz- chni wyrażać będzie wártość fiły poziemnéy, która ieft proftopadłą téy ścianie. A że te wfzyftkie fciany maią iednakową wyfokość, a zatém powiérfzchnie ich, maią fię między fobą w ftófunku podftaw *ab*, *bc* i. t. d. więc fi- ły poziemne także maią fię między fobą w ftófunku boków *ab*, *bc*, i. t. d. Nadto, w którémkolwiek bądź miéyfcu tych ścian, po- miénione fiły byłyby przyłożone, z przy- czyny iż te ściany maią wyfokość niezmiér- nie małą, można zawfze uważać te fiły po- ziemne, iakoby wfzyftkie przyłożone na pła- fzczyznie poziemnéy *abcdef*, każda z nich proftopadle na śrzodek boku, fłużącego za podftawę odpowiadaiącéy ścianie wieloścía- nu, o którym mówa. Mówię na śrzodek; bo łatwo widzieć fię daie, że fiła złożona z tłoczeń fkutkuiących przeciwko powiér- fzchni któregokolwiek z nierównoległobo- ków, fkładaiących powiérfzchnią zrazu, po- winna przechodzić przez taki punkt linii, któryby łączył śrzodki dwóch boków wza- iemnie fobie równoległych; a zatém fiła poziemna ftąd wynikaiąca, powinna fpoty- kać fię z liniią, łączącą śrzodki dwóch bo- ków przeciwnych, należących do odpowia- daiącéy ściany wieloścíanu. Cała tedy rzecz wychodzi na to, ażeby wiedzieć, co to po- winno fpráwić w iakimkolwiek wielokącie (fig.

(fig. 96), kiedy każdy z iego boków ieft po- ciągniony albo popychany, mocą fiły przy- łożonéy do śrzodka iego, i oznaczonéy przez tenże bok co do wártości fwoiéy. Zobaczy- my zaráz, że te fiły mufzą nifzczyć fię wza- iémnie. fig. 96.

Niémaiąc nafamprzód względu tylko na dwie fiły *P* i *Q* (fig. 97), przyłożone proftopa- dle na śrzodki dwóch boków *AB*, *AC* tróyką- ta *ABC*, i oznaczone przez też boki; iawna ieft, że fiła z nich złożona, przechodzić będzie przez punkt *F*, w którym fpotykaią fię dwie fi- ły przerzeczone, a który w przypadku tera- źniéyfzym, ieft śrzodkiém koła, przechodzą- cego przez trzy punkta *A*, *B*, *C* (Jeom 55). Przydaię nadto, że pomiéniona fiła złożona, powinna iefzcze przechodzić przez śrzodek boku *BC*, którému zatèm byłaby proftopadłą; i że będzie oznaczona przez tenże bok *BC*. fig. 97.

Jakóż, rozłożywfzy fiłę *P* na dwie in- ne, iednę *De* równoległą, drugą *Dh* profto- padłą na bok *BC*, i zamknąfzy równoległo- bok *Degh*, tudzież oznaczywfzy przez *e* i *h* te dwie fiły, mieć będziém, $P : e : h :: Dg : De : Dh :: Dg : De : ge$; lecz fpuściwfzy proftopadłą *AO*, tróykąt *geD* będzie podo- bny tróykątowi *AOB*, (z przyczyny boków wzaiémnie fobie proftopadłych); więc będzie $Dg : De : ge :: AB : AO : BO$; więc $P : e : h :: AB : AO : BO$. A że podług założo- nego przypufzczenia, fiła *P* ieft oznaczona przez *AB*; więc fiła *e* będzie oznaczona przez *AO*, a fiła *h* przez *BO*.

Podobnież, rozłożywfzy fiłę *Q* na dwie inne, iednę *Im* równoległą, a drugą *Ik* pro- ftopadłą na bok *BC*, tymże fpofobém mo- żnaby dowiéśdź, że fiła *m* będzie oznaczo- na przez *AO*, a fiła *k* przez *CO*; a zatém dwie fiły *m* i *e* fą fobie równe, iako ozna- czo-

czone przez iednęż liniią AO; ſkutkuią zaś w rózumiéniach przeciwnych, w kierónku iednéyże linii DI, równoległéy linii BC; ponieważ D i I ſą środkami boków AB i AC; więc te dwie ſiły muſzą wzaiémnie iedna drugą niſzczyć. Siła tedy z nich złożona, powinna bydź taż ſama, co ſiła złożona z dwóch ſił h i k. A że te oſtatnie dwie ſiły ſą wzaiemnie ſobie równoległe; będąc proſtopadłémi na bok BC, i że oráz ſkutkuiąc w iednémże rozumiéniu, ſiła z nich złożona, powinna równać ſię ſummie i bydź proſtopadłą na bok BC; więc 1ód Takowa ſiła muſi bydź oznaczona przez $BO + OC$, to ieſt przez BC. 2re Taż ſiła, ponieważ ieſt proſtopadłą na BC, i ponieważ, iak powiedziało ſię dopiéro wyżéy, powinna przechodzić przez środek F, koła opiſanego na ABC, więc muſi także przechodzić przez środek boku BC.

fig. 96. To założywſzy na przód, wnieśmy ſobie, że w (fig. 96) ſiła V złożona z dwóch ſił P, T będzie proſtopadłą na środek linii BE, i będzie oznaczona przez tęż liniią. Z téyże przyczyny, ſiła X złożona z dwóch ſił V i S, albo z trzech ſił P, T, S, będzie proſtopadłą na środek linii BD, i będzie oznaczona przez tęż liniią BD. Naoſtatek, ſiła Y złożona z dwóch ſił X i Q albo z cztérech ſił P, T, S, Q będzie prąſtopadłą na środek linii DC, i będzie oznaczona przez tęż liniią DC; a zatém będzie równa i wbrew przeciwna ſile R; więc te wſzyſtkie ſiły zniſzczą ſię wzaiémnie. Jawna ieſt, że to rozumówanie ma zawſze miéyſce, liczba ſił i wielkość boków niechby była iaka chce. Więc w powſzechności: *Uſilności wynikaiące w rozumiéniu poziémném z tłoczéń, iakie ſprawuie rościék ważny, proſtopadle przeciwko powiérzchni ciała zanurzonego, niſzczą ſię wſzyſtkie wzaiémnie.*

315. Owóż tedy mamy zaſady, ſłużące do obrachówania ſkutków, iakie czyni tłoczenie rościeku przeciwko ścianóm naczynia zamykaiącego w ſobie rościék, i przeciwko ciałóm zanúrzonym w tymże rościeku. Teráz przyſtąpmy do użycia tych fundamentów.

Ponieważ uſilności rościeku, ſkutkuiące w rozumiéniu poziémném, niſzczą ſię wzaiemnie, więc ażeby utzymać ciało w tém położeniu iakie mu dało ſię w rościeku, nietrzeba więcéy, tylko zniſzczyć uſilność pionową tłoczenia; tén zaś warunek wyciąga dwóch rzeczy: naprzód, ażeby poſtawić naprzeciw, uſilność ſkutkuiącą z góry na dół, równaiącą ſię uſilności tłoczenia, ſkutkuiącego z dołu do góry; powtóre, ażeby ta uſilność znaydówała ſię bydź położona w téyże linii proſtéy, w któréy ſkutkuie tłoczenie pionowe rościeku. Lecz tłoczenie pionowe rościeku, równa ſię wadze obiętości tegóż rościeku wyrugówanéy z miéyſca ſwoiego; więc: *ieżeli obię-*

*iętość rościeku wyrugówanego, więcéy
waży iak ciało zanurzone, to takowe
ciało będzie pływać, i wznosić się do
góry póty, aż obiętość rościeku, od-
powiadaiąca części zanurzonéy, tyle
zaważy co całe ciało.*

316. Więc kiedy ciało pływa, ieżeli uy-
mié się albo przyda się do wagi iego iakikol-
wiek ciężar, to takowe ciało wznosić się bę-
dzie albo głębiéy zanurzać, póty aż umniéy-
szenie albo pomnożenie wagi obiętości ro-
ścieku wyrugówanego, stanie się rowném
nowému ciężarowi. Gdyby dodana albo
odięta waga, była mała względém rościeku
fig. 98. ninie wyrugówanego, to ilość IK (fig. 98)
o którą zanurzy się albo wzniesie się prze-
rznięcie AB téy figury, będzie tém mniéy-
sza, im mniéysza będzie takowa waga, a
oráz im większe będzie przerznięcie AB.
A zatém kiedy pomiéniona waga byłaby mała,
a przerznięcie AB byłoby wielkie, to liniie
AB i ab, można poczytać za równe iedna
drugiéy, i obiętość nowo wyrugówaną, ro-
zumiéć równą powiérszchni, oznaczonéy
przez liniią AB rozmnożoną przez IK; to
iest, przez $AB \times IK$. Więc ieżeli p iest wagą
stopy sześciénnéy roscieku, to $p \times AB \times IK$,
będzie wagą téy obiętości; wártość ilości AB
$\times IK$ wyraziwszy w stopach sześciénnych.
A zatém, ieżeli waga dodana albo odięta, iest
oznaczona przez P, to będzie $p \times AB \times IK$
$= P$; skąd wyciąga się $IK = \frac{P}{p \times AB}$; to iest,
(przystósówawszy to *np.* do mostołodzi), że
*ażeby wiedziéć, o wiele głębiéy zanurzy się
mostołódź, mocą przydanego iéy pewnego ła-
dun-*

dunku; trzeba rozdzielić wártość P przyda-
danego ciężaru, przez powiérszchnią prze-
rznięcia uczynionego równo z powiérsz-
chnią wody, wyrażonego w stopach kwa-
dratowych, trzeba mówię takowy przyda-
ny ciężar rozdzielić, przez pomiénioną po-
wiérszchnią przerznięcia, rozmnożoną przez
wagę stopy sześciénnéy wody.

317. Ponieważ, wagę ciała zo-
stawiwszy odmiénną, obiętości iego
można zawsze dać taką rozległość
iak się spodoba, więc niéma żadnéy
materyi takiéy, choćby téż była nay-
ważniéysza, któréyby niémożna tak
przysposobić żeby pływała.

318. Ponieważ uymuiąc ciału wagi, a
w obiętości iego nieczyniąc żadnéy odmia-
ny, takowe ciało musi wznosić się do góry,
z usilnością któréy oprzéć się niezdoła, chy-
ba waga równa wadze odiętéy; więc idzie
zatém, że można użyć bardzo pożytecznie
pionowéy czynności wody, do podzwigniénia
ciężarów. *Np.* możnaby wydobyć działo
iakie w dnie morskim lub w rzece uwię-
zione, przywiązawszy go do Statków, na-
przód ciężarami iakiémi lub wodą naładó-
wanych, a potém wypróżnionych.

319. W powszechności, ieżeli
P, iest ważnością przyrodną ciała
pływaiącego, albo ieżeli wyraża to,
coby ważyła *np.* stopa sześciénna
tego ciała, gdyby było złożone z
materyi iednorodnéy; ieżeli obię-
tość

tość iego oznaczymy przez V; ważność przyrodną rościeku przez p; a przez u obiętość części zanurzonéy; to waga tego ciała będzie wyrażona, przez $P \times V$ albo PV; a wagą rościeku wyrugowanego będzie pu; a zatém muſi bydź $PV = pu$; zrównanie, z którego wnoſi ſię $u = \frac{PV}{p}$; co znać daie, że wagę PV zoſtawiwſzy nieodmiénną, część zanurzona będzie tém mniéyſza, im większa będzie rościeku ważność przyrodna.

320. Tóż ſamo zrównanie, daie $V : u :: p : P$; to ieſt, że obiętość ciała i obiętość części zanurzonéy, maią ſię między ſobą w ſtoſunku odwrotnym ważności przyrodnéy ciała, i ważności rościeku.

321. I na tymto fundamencie bywaią robione pewnego gatunku *ważki do roſpłynów* (areomêtre). Sąto narzędzia, które przez ilość o iaką zanurzaią ſię albo wznoſzą ſię w pewnych roſpłynach, pokazuią ważność przyrodną tychże roſpłynów.

fig. 99. Zeby to poiąć, zmyślmy ſobie wałek wydrążony $ABCD$ (fig. 99), w dennéy części DC zatopiony iaką materyą ważną, ażeby go utrzymać w położeniu pionowém; daymy że takowy wałek wpuſzczony w rościek, zaſtanawia ſię ſam przez ſię, zanurzy-

rzywſzy ſię o ilość ED. W takim razie, pewna ieſt (312), że obiętość rościeku, którego miéyſce zabiéra część wałka $EDCF$, tyle waży, co wałek cały $ADCB$. Więc maiąc wiadomą wagę ciała $ADCB$, tém ſamém ieſt wiadoma i waga obiętości rościeku, równaiącéy ſię części wałka $EDCF$. Więc obrachówawſzy bryłówatość czyli obiętość części $EDCF$ *np.* na cale ſześciénne, a wagę wałka $ADCB$ na łóty; i rozdzieliwſzy wagę ciała $ADCB$ przez liczbę calów ſześciénnych, zawartych w $EDCF$, wieloráz pokaże, wiele waży cal ſześciénny rościeku o który rzecz idzie.

Wynalázłſzy tym ſpoſobém przyrodną ważność iednego rościeku, ważność innych rościeków wynayduie ſię iuż nierównie prędzey; a to zawſze na tymże fundamencie. Albowiém zmyślmy ſobie bok AD podzielony na pewną liczbę części równych, i naznaczmy punkt E, w którym zaſtanowił ſię wałek pod czas piérwſzego doświadczenia. Naténczas, zanurzywſzy go w innym rościeku, ieżeli w nim zatopi ſię o ilość De większą lub mniéyſzą iak DE, to ſtąd wnieść ſobie będzie należało, że nowy rościek, ma mniéyſzą lub większą ważność przyrodną od piérwſzego, a to w ſtóſunku wyſokości De do DE; to ieſt (320), że przyrodna ważność piérwſzego rościeku, ma ſię do takiéyże ważności drugiego, iak $De : DE$; tak iż przyſtóſówawſzy ilości części zawartych w DE i De iedne do drugich, mieć będziém ſtóſunek zachodzący między ważnościami przyrodnémi tych dwóch rościeków. Albo też ieſzcze, naznaczywſzy w punkcie E przyrodną ważność rościeku, do którego maią przyrównywać ſię wſzyſtkie inne, ieżeli zechcemy poznaczyć w rożnych punktach e ważności przy-

przyrodne rościeków, w których ważki zatopiłyby się aż po *e*, to trzeba rozdzielić liczbę części równych zawártych w *DE*, przez liczbę części równych zawártych w *De*, a wieloráz rozmnożyć przez ważność przyrodną, odpowiadaiącą punktowi *E*; wypadek ſtąd wynikaiący, pokaże ważność odpowiadaiącą punktowi *e*; to ieſt, liczbę którą trzeba napiſać w punkcie *e*, dla oznaczenia przyrodnéy ważności tego rościeku, w którym wáłek zaſtanowiłby ſię na tym przedziale.

Ale maiąc przyrównywać między ſobą, przyrodne ważności rościeków, mało różniących ſię w gęſtości iedén od drugiego, byleby wáłek miáł iakóżkolwiek znaczną ſzérokość, iawna ieſt, że różnica w zanurzeniach iego będzie tém mniéyſza, im mniéyſza ieſt różnica między gęſtościami rościeków, a im więkſza byłaby śrzednica wáłka. W takim tedy przypadku, trzebaby używać wáłka bardzo małéy śrzednicy; ale żeby go uczynić ſpoſobnym, do utrzymania ſię zawſze w położeniu pionowém, można-
figura 100. by do niego przyprawić iak w (fig. 100), drugi wáłek *GHIK*, zatopiony u dna, iak powiedziało ſię wyżéy.

Wreſzcie, niekoniecznie potrzeba, ażeby część *GHIK* była wáłkowa, niemniéy iako też i część *ABCD*. Części *GHIK*, można dać taką poſtać iaka ſię ſpodoba, byleby była zgodna do utrzymania narzędzia w położeniu pionowém; a część *ABCD* może bydź wielościénna iakiéykolwiek poſtaci. Doſyć na tém, ażeby była taka, iżby na niéy, równe podziały obiętości *ABCD*, odpowiadały równym podziałóm dłu-
figura 101. gości *AC*, tak iż tego rodzaiu ważkóm, można dać kſztáłt wyrażony w fig. 101.

Takowych narzędziów ſkłád i poſtać może odmiéniać ſię bez liczby, a to zawſze na tychże ſamych fundamentach. Atoli po tém co poprzédziło, my tu nieopiſzemy więcéy, tylko narzędzie wyrażone w fig. 101. *figura* 101.
Narzędzie poprzédzaiące, ſłuży do wynaleziénia przyrodnéy ważności rościeków, przez różne iego zanurżenia ſię; to záś okazuie takowe ważności, przez zanurzenie ſię nieodmiénne.

ABCD, ieſt niby butel ſzklany wydęty, z długą ſzyią, w dénnéy części *C* zatopiony żywém śrzébrém. Do wiérſzchu *A* ieſt przyſpoſobiona miſeczka na którą kładzie ſię waga. *E* ieſt znak, wſkazuiący punkt, na którym zaſtanawia ſię narzędzie mocą właſnéy wagi, w rościeku naymniéy ważnym. To narzędzie zanurzywſzy w innym rościeku ważniéyſzym, będzie ſię do góry wznoſić, i niémoże inaczéy bydź zatopione do przerzeczonego punktu, tylko przyłożeniém iakiéy wagi na miſeczkę *A*. Iiość takowéy wagi przydanéy, naznacza różnicę między ważnościami przyrodnémi niniéyſzego i piérwſzego rościeku; a zatèm maiąc ważność przyrodną piérwſzego rościeku, tym ſpoſobém można dóyśdź ważności wſzelkiego innegó rościeku.

322. Jeżeli ciało iakie więcéy waży, od podobnéyże obiętości rościeku, to muſi tonąć, i nièmoże bydź inaczéy utrzymane na wiérſzchu, tylko mocą ſiły równaiącéy ſię zbytkowi téy przewagi, o którèy ciało przeważa podobnąż obiętość rościeku.

Oznaczywſzy iak wyżéy przez p i P, ważności przyrodne rościeku i ciała; a przez V obiętość ciała, miéć będziém $PV - pV$ na wyrażenie przewagi ciała nad wagę podobnéyże obiętości rościeku. Więc zmyśliwſzy ſobie to ciało zawieſzone na nitce u *kibici* (fleau) ważek, iak pokazuie fig. 102, i oznaczywſzy przez
figura 102.
P' wagę, mocą któréy pomiénione ciało mogłoby utrzymać ſię w równowadze; to będzie $P' = PV - pV$; ſkąd wyciąga ſię $\frac{p}{P} = \frac{PV - P'}{PV}$. Lecz PV wyraża wagę ciała w powietrzu, a P' wyraża wagę iego kiedy ieſt zanurzone w rościeku; więc *maiąc wiadomą wagę ciała w powietrzu, i wagę iego w rościeku, łatwo będzie można miéć ſtóſunek między ważnościami przyrodnémi tegóż rościeku i ciała, rozdzieliwſzy ròżnicę téy dwoiakiéy wagi, przez wagę ciała w powietrzu.*

Np. ieżeli iakie ciało waży 6. uncyi w powietrzu a w wodzie tylko 5 unc: to dzielę różnicę 1 przez 6, a wieloráz $\frac{1}{6}$ daie mi znać, że ważność przyrodna tego ciała, ma ſię do ważności wody, iak 6 do 1.

Ponieważ powietrze, ieſt rościekiém ważnym, więc ciałóm muſi także uymówać wagi; takiż waga iaką maią w powietrzu, nieieſt ich wagą rzetelną. Ale iż powietrze ieſt rościekiém bardzo rzadkim, którego ważność przyrodna, niewynoſi iak tylko około 850*tą* część podobnéyże ważności wody, przeto umniéyſzenia wagi z téy przyczyny możemy wcale zaniedbać.

323. Zmyśliwſzy ſobie znowu toż ſamo ciało co wyżéy, zanurzone w inſzym rościeku, którego ważnością przyrodną byłoby p', a P'' byłaby waga, mogąca utrzymać go w równowadze, to podobnież iak mieliśmy wyżéy $P' = PV - pV$, mielibyśmy i w tym razie $P'' = PV - p'V$; lecz te dwa zrównania, daią $pV = PV - P'$ i $p'V = PV - P''$; więc rozdzieliwſzy to oſtatnie przez poprzédzaiące, będzie $\frac{p'}{p} = \frac{PV - P''}{PV - P'}$; a zatèm maiąc wiadomą wagę PV ciała iakiego w powietrzu, wagę iego P'' w pewnym rościeku, i wagę iego P' w innym rościeku, łatwo także miéć można wartość ilości $\frac{p'}{p}$, to ieſt ſtóſunek, między ważnościami przyrodnémi dwóch rościeków. Na tych fundamentach nietrudno byłoby złożyć ſobie Tablicę, opiſuiącą ważności przyrodne różnych ciał,

tak brylaſtych iak płynnych; iaka w ſaméy rzeczy położy ſię na końcu tego Tomu.

324. Podług tego co poprzédziło, iawna ieſt, że ważność przyrodna rozmnożona przez obiętość, daie prawdziwą wagę ciała. Lecz gęſtość rozmnożona przez obiętość, daie miąższość (160), która podług (171) ieſt proporcyonalna wadze; więc ważność przyrodna rozmnożona przez obiętość, ieſt proporcyonalna gęſtości rozmnożonéy także przez obiętość; więc *ważność przyrodna ciał, ieſt proporcyonalna gęſtości onychże.*

325. Powróćmy nazad do ciał pływaiących. Ażeby ciało mogło utrzymać równowagę w iakim rościeku, trzeba, iak widzieliśmy wyżéy (315), ażeby iego cała waga, równała ſię wadze obiętości rościeku, wyrugówanéy. Ale na tym warunku nieieſt doſyć. *Trzeba ieſzcze* nadto, *ażeby liniia przechodząca przez śrzodek ciężkości części zanurzonéy, była pionowa.*

Albowiém, ponieważ ważność ciała i tłoczenie rościeku, każde z nich ſkutkuie w kierónku linii pionowéy, z których piérwſza przechodzi przez śrzodek ciężkości ciała, a druga przez śrzodek ciężkości obiętości wyrugówanéy, więc te dwie ſiły niémogą bydź ſobie wbrew przeciwne, (czego koniecznie trzeba do równowagi) tylko kiedy te dwie liniie zniydą ſię w iednę

figura 103. 326. I tak ażeby wiedzieć, ieżeli ciało *ACEDB* (fig. 103) poſtaci i materyi wiadoméy, potrafi utrzymać równowagę w rościeku, i to po-

łożenie iakie ma bydź mu dane; trzeba poprowadzić płaſzczyznę poziemną *CD*, oddziélaiącą część *CED* taką, ażeby obiętość iéy, miała ſię do całéy obiętości *AEB*, iak ſię ma ważność przyrodna ciała, do ważności rościeku; a wynalazłſzy śrzodek ciężkości *G*, odpowiadaiący obiętości *AEB*, i śrzodek ciężkości *G'* odpowiadaiący obiętości *CED*, ieżeli liniia *GG'* wypada proſtopadła płaſzczyznie *CD*, to równowaga będzie miała miéyſce.

327. W tém co powiédziało ſię dopiéro, ciało *AEB* rozumiémy bydź iednorodném; to ieſt, że materya ſkładaiąca onego wagę, ieſt wſzyſtka iednakowego rodzaiu i roſciągaiąca ſię wſzędzie iednokſztáłtnie po tém miéyſcu, które zabiéra cała obiętość. Gdyby zaś tak niebyło, to naprzód trzebaby obrachówać wártość obiętości rościeku, równaiącéy ſię w wadze, całéy wadze ciała *AEB*, a potèm trzebaby zrobić *CED* równe takówéy obiętości, gdzie *CD*, rozumié ſię bydź liniią poziemną; działanie, które wychodzi na rozwiązanie zagadniénia iedynie Jeometrycznego, niepodpadaiącego żadnéy trudności, dla tych, którzy z fundamentami dotąd podanémi dobrze obeznali ſię.

328. Przy pomocy tychże ſamych zaſád, można téż rozwiązać i to drugie zagadniénie, to ieſt: Jakby naznaczyć różne położenia, w któ-

których ciało położone w pośrzód rościeku utrzymałoby równowagę; ale że nam nic ważnego na pamięć nieprzychodzi, do czego moglibyśmy to oboie zagadnienie przyſtóſować, przeto ie pomiiamy.

figura 104. 329. Zmyślmy ſobie ciało CED (fig. 104) utrzymuiące ſię ninie w równowadze, w pośrzod rościeku, którego powiérzchnia byłaby AB; G byłoby śrzodkiém ciężkości ciała; a G' śrzodkiém ciężkości części zanurzonéy AEB; daymy że takowe ciało nachyliło ſię o ilość niezmiérnie małą, tak iż część aEb ſtała ſię częścią zanurzoną, któréy G'' byłoby śrzodkiém ciężkości. Takowe ciało powroci nazád do ſwego położenia, ieżeli pionowa $G''M$, odpowiadaiąca temu oſtatniemu położeniu, ſpotyka ſię z pionową $G'M$ odpowiadaiącą piérwſzému położeniu, ieżeli mówię te dwie liniie ſpotykaią ſię z ſobą, powyżéy śrzodka ciężkości ciała, to ieſt, powyżéy punktu G. Przeciwnym ſpoſobém, muſi ſię wywrócić, ieżeli punkt M, będzie położony poniżéy punktu G jakoto w M'.

Jakóż, kierónek $G''M$, w iakim naténczas ſkutkówać będzie tłoczenie wody, i który będzie pionowy, ponieważ w takim razie nieprzechodzi przez śrzodek ciężkości G, więc podług (290) dąży do nadania ciału dwoiakiego ruchu, z których iedén podnoſzący śrzodek ciężkości, byłby zniſzczony mocą wagi ciała; à drugi byłby dążący do obracania go około śrzodka ciężkości G. Lecz łatwo widzieć ſię daie, że ieżeli punkt G ieſt poniżéy M, to ruch kołowrotny około pun-

punktu G, odprawiałby ſię od A ku C, a zatém przywiódłby punkt G' do ninieyſzego pionowego położenia $G''M$. Przeciwnym ſpoſobém ieżeli M ieſt poniżéy G iakoto w M', to ruch kołowrotny około punktu G, odprawiałby ſię od C ku A, a zatèm niémógłby oddalić punktu G' od punktu G''; to ieſt, że takowy ruch dążyłby do wywrócenia ciała. Więc ażeby ciało, mogło powrocić do ſwego piérwſzego położenia, to trzeba ażeby liniia $G'M$, była większa od linii $G'G$.

Punkt M nazywa ſię *graniczny śrzodek* (metacentre), z przyczyny, że naznacza granicę wyſokości, w któréy może bydź położony śrzodek ciężkości G, chcąc ażeby ciało pływaiące, niewywróciło ſię za małèm nachyleniém; bo byleby punkt G był cokolwiek wyżéy położony nad punkt M, to ciało muſiałoby ſię wywrocić.

330. Rościeki ſprężyſte, maią tę ſpólną właſność z rościekami nieſprężyſtémi, że nietykaiąc ważności, tłoczenie roſchodzi ſię w nich zaréwno w wſzelakiém rozumiéniu. Ale piérwſze w tém różnią ſię od drugich, iż przyłożywſzy do powiérzchni AB (fig. 105) rościeku nieſprężyſtego iakiegokolwiek, tłoczenie P, ſkutkuiące przeciwko wieku ruchomemu AB, ieżeli odéymie ſię znagła takowa waga P, to rościék uſtanie ſkutkówać przeciwko temuż wieku AB. Zamiaſt że w roście- figura 105.

ściekach sprężystych, ieżeli tłoczenie *P*, przywiodło nakrywaiące wieko *AB* do iakiegokolwiek położenia *ab*, to po odięciu takowego tłoczenia, wieko *ab* zostanie odparte od *b* ku *B*, z takąż siłą, z iaką było przyprowadzone od *B* do *b*.

Atoli bądź co chce, tłoczenie w rościeku sprężystym, zawsze roschodzić się będzie w tenże sam sposób co w rościeku niesprężystym; to iest że takowe tłoczenie skutkować będzie prostopadle przeciwko powiérzchniom; i że w rościekach sprężystych a ważnych, które niebyłyby utłoczone tylko mocą swoiéy ważności, usilności tłoczenia przeciwko ścianóm naczynia, albo przeciwko powiérzchni ciał zanurzonych w takowych rościekach, że mówię te usilności, w rozumiéniu poziemném niszczą się wzaiemnie, a w rozumiéniu pionowém, składaią iedyną usilność, któréy kierónek przechodzi przez śrzodek ciężkości téy obiętości, przéciwko któréy skutkuie rościék.

331. Co się tycze rzetelnéy wártości utłoczenia przeciwko iakiéykolwiek powiérzchni, mocą saméy tylko ważności rościeku sprężystego; niémożna wątpić, ażeby takowe utłoczenie przeciwko powiérzchnióm poziemnym, (zostawiwszy inne okoliczności w nieodmiénnym stanie), ażeby mówię takowe tłoczenie

nie niebyło proporcyonalne powiérzchnióm przeciwko którym skutkuią. Ale niemiérzą się iak w innych rościekach, przez wagę wielościanu albo wałka, maiącego za podstawę takową powiérzchnią, a za wysokość swoię, maiącego odległość téy powierzchni od wiérzchnéy powiérzchni rościeku.

Jakóż, ieżeli rościék sprężysty iest taki, że bez ważności mógłby zabiérać miéysce *AEFB* (fig. 106); to rozumieiąc go bydź ważnym, iawna iest, że zrazy czyli warstwy tego rościeku, nayblizsze dna *EF*, utłoczone własnym ciężarém i ciężarèm warstw wyższych, znaydówać się będą mocniéy utłoczone, iak tamte; a zatém zmyśliwszy sobie dwie warstwy iednéyże wysokości, iednę przy samém dnie *EF*, a drugą wyżéy, materya piérwszéy warstwy będzie gęstsza od drugiéy, a zatém będzie ważniéysza. Przeto ponieważ warstwy lubo iednakiéy wysokości, tém mniéy obciążaią dno *EF*, im bardziéy od niego będą odległe; więc utłoczenie przeciwko temuż dnu *EF*, powinno miarkówać się, nietylko podług wielkości takowego dna, i podług liczby warstw zawiéraiących się od *D* aż do *F*, ale téż podług ważnóści przyrodnéy zosobna każdéy warstwy, która wypada co wyżéy to insza. Tak iż oznaczywszy przez x odległość *FQ* iakiéykolwiek warstwy od dna *EF*; przez dx, wysokość niezmiérnie małą téyże warstwy, a przez *D* ważność przyrodną albo gęstość onéyże; Ddx wyrażać będzie wagę pro- figura 106.

promyka takowéy warſztwy; a ſkutek czynności iego przeciwko dnu EF, będzie wyrażony przez $EF \times Ddx$; więc czynności wſzyſtkich warſztw czyli całkowite utłoczenie przeciwko dnu EF będzie wyrażone przez $EF \int Ddx$; to ieſt, że trzeba wziąść całkę ilości Ddx i rozmnożyć ią przez EF. Trzebaby tedy mieć znaiomą wártość głoſki D, wyrażoną w x, to ieſt trzebaby wiedzieć, podług iakiego prawa odmiéniaią ſię gęſtości, w odległościach coráz więkſzych od dna EF.

Wynalázłſzy ſkutek utłoczenia przeciwko powiérſzchni poziemnéy, łatwo będzie można mieć utłoczenie przeciwko wſzelakiéy innéy powiérſzchni, rozdzieliwſzy takową powiérſzchnią na części niezmiérnie małe; albowièm każdą z tych części można uważać tak utłoczoną, iak gdyby była poziemna.

332. Spomiędzy wſzyſtkich rościeków ſprężyſtych, naywięcéy zależy nam na znaiomości powietrza; dla tego umyśliliſmy tu zaſtanowić ſię nad iſtotniéyſzémi własnościami onego; a przynaymniéy nad témi, co naywięcéy ſłużą do zamiaru naſzego.

333. *Powietrze ieſt rościekiém ważnym.* Ta prawda potwiérdza ſię wielką liczbą doświadczéń. Oto z nich niektóre:

figura 107. Wziąwſzy rurkę ſzklaną (fig. 107), długą około na 30 *cal.*, zalutówaną z iednego kónca ſwego A, a z kònca otwartego wprowadziwſzy w całą obiętość téy rurki merkuryuſzu; ieżeli odwrociwſzy rurkę zanurzy ſię iéy otwarty koniec, w naczyniu maiącém także w ſobie merkuryuſz, to merkuryuſz zawarty w rurce, uſtępówać z niéy będzie, tak iż go niezoſtanie tylko na $27\frac{1}{2}$ *cal.* około wyſoko, * rachuiąc od powiérſzchni merkuryuſzu będącego w naczyniu.

Zobaczmy teráz, iak wnoſi ſię z tego doświadczenia ważność powietrza. Słup merkuryuſzu zawartego w długości CB, ſprawia w punkcie B, utłoczenie przeciwko merkuryuſżowi dólnemu, którèmu niémoże oprzeć ſię tylko równa uſilność czyniąca w rozumiéniu przeciwném. Lecz merkuryuſz będący w naczyniu, w którém rurka ieſt zanurzona, nieſkutkuie przeciwko tému ſłupowi, tylko w ſtóſunku odległości od wiérſzchnéy powiérſzchni iego, aż do otwarcia B; więc mu niémógłby ſię oprzéć. Uſilności tedy potrzebnèy do takowego oparcia ſię, niémożna gdzieindziéy ſżukać, tylko w rościeku, roſchodzącym ſię po wſzyſtkich punkrach górnéy powiérſzchni merkuryuſzu, zawartego w naczyniu; to ieſt, trzeba téy uſilności ſzukać w powietrzu; więc powietrze mocą wagi ſwoiéy, czyni równowagę ſłupowi BC merkuryuſzu.

Zaſtanówmy ſię ieſzcze nad drugiém doświadczeniém niemniéy pożytecznèm, któ-re

* *Ta ilość odmiénia ſię podług ròżnego ſtanu powietrza, i podług wyſokości miéyſca, w którém czyni ſię doświadczenie; tu rozumiémy powietrze znayduiące ſię w miérnym ſtanie, a położenie miéyſca iak* np. *ieſt położony Paryż. Rozumiémy nadto że merkuryuſz w rurce zawarty, był wprzòd wyczyſzczony z powietrza. Nieieſt tu zaś miéyſce opiſowaé iak ſię to czyni.*

re służyć może na poparcie piérwszego. Jeżeli to iest prawda, że powietrze utrzymuie słup BC, to nalawszy w rurkę rościeku mniéy ważnego iak iest merkuryusz, wysokość tego nowego rościeku w rurce zawieszonego, powinna wypaśdź większa iak była wysokość BC merkuryuszu; a to podług (302), w stosunku odwrotnym przyrodnych ważnościów tych dwoch rościeków. Wiemy zaś że woda ma 14 razy mniéyszą ważność iak merkuryusz; więc używaiąc wody zamiast merkuryuszu, powietrze powinnoby utrzymać takowéy w równowadze, słup wysoki na 14 razy po $27\frac{1}{2}$ *cal.* to iest słup wysoki około na 32 *st.* Jakóż to w rzeczy saméy potwiérdza doświadczenie. Albowiém wiadomo iest, że chcąc przy pomocy *biéguna* (piston) podnieść wodę w *rurmusie* (pompe) nad 32 *st.* woda zawsze niedaleko w téy miérze zastanawia się. Niémożna tedy o tém wątpić, ażeby powietrze niebyło ważne, i ażeby mocą téy wagi na powiérzchnią ciał nietłoczyło, z taką usilnością, iakby czynił słup wody, takiéy podstawy iaka iest powiérzchnia, a wysoki na 32 *st.*

I takoweto utłoczenie będąc przyłożone do wszystkich ciał, a zatém i do powiérzchni wody, przymusza ią do podnoszenia się w rurmusach, kiedy robiąc biegunem, robi się prożne miéysce między nim i wodą, w któréy zanurzony iest rurmus. Ale ażebyśmy iaśniéy poięli, iakim sposobém woda podnosi się w rurmusach, trzeba nam zastanowić się nad drugą własnością powietrza, to iest nad sprężystością iego.

334. *Powietrze iest tłoczliwe, iest sprężyste; i obiętości, do których może bydź przyprowadzone mocą utłoczenia, dosyć widocznie maią się między sobą, w stósunku odwrotnym wag iakiémi będzie przyciśnione.* Ta ostatnia własność, wynika z następuiącego doświadczenia.

W rurkę szklaną zakrzywioną ABC
(fig. 108), któréy kolanko AB miałoby *figura 108.*
przynaymniéy 30 albo 40 *cal.*, a któréy kolanko BC wszędzie iednakowéy średnicy byłoby zalutowane w C, naléy tyle merkuryuszu, ażeby nayniższa część B rurki została napełnioną; przyłożywszy takową rurkę, na tablicę podzieloną na równe części, uważay iaka liczba przedziałów zawiéra się między B i C. Daymy niech będzie 8 *cal.* Naléy znowu merkuryuszu w kolanko AB tyle, żeby zbytek iego nad wysokość merkuryuszu zawartego w kolanku BC, wynosił około $27\frac{1}{2}$ *cal.* Powietrze wypełniaiące z razu całą obiętość BC, niebędzie już teráz zabiérać iéy tylko połowę. Nieprzestaiąc daléy nalèwać merkuryuszu w kolanko AB, póty ażby różnica wysokości merkuryuszu w dwóch kolankach, wynosiła dwa razy $27\frac{1}{2}$ *cal.* albo około; powietrze pozostałe w kolanku BC, niebędzie w takim razie więcéy zabiérać, tylko $\frac{1}{3}$ obiętości BC; ieżeliby zaś różnica między przerzeczonèmi dwiéma wysokościami, wynosiła trzy razy $27\frac{1}{2}$ *cal.* albo około, to powietrze pozostałe w kolanku BC, niezabiérałoby tylko $\frac{1}{4}$ obiętości onego; i tak daléy.

Z tego doświadczenia pokazuie się, że powietrze tém bardziéy by-

bywa utłoczone, im większą wagą iest przyciśnione, i że to utłoczenie iest proporcyonalne wadze naciskaiącéy, z niewielkiém uchybieniém.

Jakóż póki niebyło więcéy merkuryuszu, tylko w dolnéy obiętości B, powietrze zamknięte w kolanku BC, będąc téyże natury co powietrze w kolanku AB, znaydowało się bydź naciśnione, całą wagą powietrza, odpowiadaiącego pionowo otwarciu rurki. Było tedy uciśnione wagą, wyrównywaiącą słupowi merkuryuszu, wysokiemu na $27\frac{1}{2}$ *cal.* około. A ponieważ przydawaiąc coráz iedno, dwa, trzy i. t. d. utłoczeń podobnych piérwszemu, powietrze zawarte w kolanku BC, iak widzieliśmy dopiéro wyżéy, zbiia się w miéysca dwa, trzy, cztéry razy mnieysze od obiętości BC, więc pomiénione powietrze, tłoczy się w stósunku wag nań naciskaiących.

Co się tyczé sprężystości powietrza; z odwrotnego poprzédzaiącemu doświadczenia, można o niéy zapewnić się że ma miéysce i że pomnaża się w proporcyi utłoczenia, aibo téż umnieysza się, w proporcyi ubywaiącegó tegoż utłoczenia.

Albowiém wyléwaiąc nazád merkuryusz z rurki AB, da się widzieć, że powietrze roschodzi się znowu w kolanku BC, i zaymuie w nim tém większą obiętość, im więcéy ubędzie utłoczenia. Powietrze tedy nietylko iest tłoczliwe, ale téż będąc przywiedzione do iakiegolwiek bądź stanu utłoczenia, zawszé dąży do rosprężenia się, i do zaięcia coráz większéy rozległości, tak, iż kiedy ubywa wagi która go naciskała, to rozległość po któréy roschodzi się, ma się do rozległości w którey było zamknione, iak się ma waga, iaką było przyciśnione w tym ostatnim przypadku, do wagi iaką ninie znayduie się bydź obciążone.

335. Powietrze tedy, które nazywamy *naturalném* czyli *swobodném*, znayduie się w nieustannèm utłoczeniu, i to w takiém, iż gdyby znagła utraciło swoię ważność, natychmiast dążyłoby do rosprężenia się na wszystkie strony, z taką usilnością, iż część powietrza zamknięta w takiéy rozległości iak ABC (fig. 108), niémogłaby inaczéy bydź zatrzymana, tylko przyłożywszy do otwarcia A, siłę równaiącą się wadze słupa merkuryuszu, maiącego za podstawę, pomiénioną otwartość, a wysokiego na $27\frac{1}{2}$ *cal.* *figura* 108.

336. Stąd co się rzekło (330), o różnicy między rościekami sprężystemi i niesprężystemi, pokazuie się, że powietrze zamknięte ze wszystkich strón w iakiém naczyniu, z taką usilnością dąży do wydobycia się zewnątrsz, z iaką usilnością powietrze otaczaiące, naciska od strony zewnétrsznéy na wnętrsznę; i taćto iest przyczyna, dla czego ciała nieustępuią

ią tak źnacznému utłoczeniu, iakiemu podlegaią podług tego co w téy miérze powiedziało ſię wyżéy (333).

337. Przyłożywſzy na tablicę podzie-
figura loną na pewne części, rurkę wzwyż opiſa-
107. ną (333) (fig. 107), tak ażeby przerzeczone podziały poczynały ſię od linii poziemnèy, czyli od powiérſzchni merkuryuſzu w dólnéy bańce zamkniętego; tak naprawione narzędzie, nazywa ſię *Wilgoćmiar* (Baromêtre); i ſłuży do ſądzenia o tłoczeniu powietrza, przeciwko powiérſzchniòm ciał, z wyſokości, do iakiéy merkuryuſz znayduie ſię bydź podnieſiony w rurce *AB*.

A teráz iuż łatwo poiąć można, dla czego to narzędzie, wſkazuie tęż ſamę wyſokość w miéyſcu zamkniętém, co i w miéyſcu ſwobodném. Bo powietrze zamknięte, mocą ſwoiéy ſprężyſtości, ſprawuie takiéż ſamo utłoczenie przeciwko merkuryuſzowi zawartemu w dólnéy bańce, iakieby ſprawówało ſwobodnie mocą wagi ſwoiéy.

338. Merkuryuſz nieutrzymuie ſię ſtatecznie w iednakowèy wyſokości lubo na iednémże miéyſcu. W Paryżu trzyma ſię poſpolicie iużto cokolwiek wyżéy nad $27\frac{1}{2}$ *c.* iuż też cokolwiek niżéy, a to podług tego, iak utłoczenie pochodzące czyto od wagi czy od ſprężyſtości powietrza, rośnie albo ubywa. Ponieważ ſprężyſtość powietrza, może powiękſzać ſię albo umniéyſzać, lubo cała waga iego ani ſię powiękſza ani umniéyſza,

ſza, iakoto zdarza ſię z przyczyny gorącości lub zimna; więc odmiany merkuryuſzu trafiaiące ſię w Wilgoćmiarze, niepowinny bydź iedynie przypiſówane odmianóm wagi powietrza.

Atoli bądź co chce, ponieważ takowe odmiany daią znać, że powietrze ieſt zdólne, do trzymania równowagi z więkſzym lub mniéyſzym ſłupém merkuryuſzu, a zatém z więkſzym lub mniéyſzym ſłupém wody; więc należy ſtąd wnieść, że naywiękſza wyſokość, do którèy może bydź podnieſiona woda tylko w iednym rurmuſie, niezawſze ieſt iednakowa, to ieſt na 32 *ſt.*, ale że ſię odmiénia podług wyſokości merkuryuſzu w wilgoćmiarze.

339. Przenióſſzy Wilgoćmiár z iednego miéyſca na inne wyżſze lub niżſze; w piérwſzym przypadku merkuryuſz opadnie, a w drugim podnieſie ſię do góry. Bo ſłup powietrza, przypiéraiący do merkuryuſza, w piérwſzym przypadku będąc krótſzy iak w drugim, powinién też w pierwſzym przypadku mniéy ważyć iak w drugim; a zatém niémoże trzymać równowagi, tylko, w piérwſzym przypadku z ſłupém mniéyſzym, a w drugim przypadku, z więkſzym ſłupèm merkuryuſzu. Tak iż

iż w piérwſzym przypadku, upłynie cokolwiek merkuryuſzu z rurki do bańki, a w drugim, z bańki przéydzie go cokolwiek do rurki; co téż i doświadczenie potwiérdza. Ale trzeba uważyć że te odmiany nieſą widoczne, tylko w odmianach wyſokościów miéyſca na kilka ſążni. Można powiedzieć ogołém, że różnica na 12 *ſą.* w wyſokości miéyſca iednego od drugiego, daie w Wilgoćmiarze iednę liniią różnicy. Więc naywiękſza wyſokość do którey można podnieść wodę przy pomocy tylko iednego rurmuſu, różni ſię podług wyſokościów miéyſc, gdzie to dzieie ſię, i ieſt proporcyonalna wyſokości Wilgoćmiaru w takowych miéyſcach.

340. Powiedziało ſię wyżéy, iż powietrze, bywa utłoczone w ſtóſunku wagi naciſkaiącéy go, z małém uchybiéniém. Lubo doświadczenie które ſłużyło nam do takowego wywodu, daie takowy ſtóſunek wypadaiący dość doſkonale; atoli iednak ſtąd nienależy ſobie wnóſić, iż obciążywſzy powietrze wſzelką bądź iakąkolwiek wagą, podobnyż naſtępówałby ſkutek. Niezdaie ſię to rzeczą podobną do prawdy, ażeby coraz bardziéy obciążaiąc powietrze, można było zbić go i ſkupić w miéyſce niezmiérnie małe, i przeciwnie uymuiąc mu utłoczenia, aż

do niezmiérności, żeby można było przywieśdź go do zabrania rozległości niezmiérnéy. Ta zbyteczna tłoczliwość i ta zbyteczna rozległość nieznayduią ſię w naturze. Z tém wſzyſtkiém, kiedy rzecz nieidzie tylko o miérne wyſokości, można rozumiéć że powietrze w różnych wyſokościach, bywa utłoczone w ſtóſunku wagi nań naciſkaiącéy; a zatém można naznaczyć z małém uchybiéniém, w iakiéy wyſokości trzymać ſię powinién Wilgoćmiar, mocą ſaméy wagi powietrza, w różnych wyſokościach położéń.

Jakóż widzieliśmy wyżéy (331), że oznaczywſzy przez D ważność przyrodną albo gęſtość powietrza, odpowiadaiącą iakiéykolwiek wyſokości, utłoczenie iakie odbiérać albo ſprawówać może powietrze w tém miéyſcu, będzie wyrażone przez $\int Ddx$; więc oznaczywſzy przez h wyſokość Wilgoćmiaru, odpowiadaiącą takowemu miéyſcu, a przez 1, gęſtość merkuryuſzu, miéć będziem $\int Ddx = h$ albo raczéy $\int - Ddx = h$; bo gdy x rośnie, h umniéyſza ſię. Z drugiéy ſtrony, ponieważ powietrze ſtaie ſię tém gęſtſze, im ieſt bardziéy obciążone, więc gęſtość iego czyli ważność przyrodna, pomnaża ſię w miarę wagi obciążaiącéy; a zatém oznaczywſzy przez H wyſokość Wilgoćmiaru, w położeniu poziemném z powiérzchnią morza, a przez p przyrodną ważność powietrza w témże miéyſcu, miéć będziém $H : h :: p : D$; więc $h = \frac{DH}{p}$; więc $\int - Ddx = \frac{HD}{p}$. Zróżniczkuymy to zrównanie, uważaiąc p i H iako ſtateczne; co nam da $- Ddx = \frac{HdD}{p}$; ſkąd wyciąga ſię $\frac{dD}{D} = \frac{-pdx}{H}$; więc (100),

$lD = \frac{-px}{H} + lC$. Lecz w położeniu poziemném z powiérſzchnią morza, to ieſt, kiedy $x = 0$, powinno bydź $D = p$; więc $l.p = l.C$; więc $C = p$. A zatém będzie $l.D \frac{-px}{H} + l.p$; ſkąd wyciąga ſię $lD - lp = \frac{-px}{H}$, albo $l\frac{D}{p} = \frac{-px}{H}$; albo naoſtatek $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$; gdzie przez e rozumié ſię liczba, maiąca za logarytm 1 (90). Więc będzie $D = pe^{\frac{-px}{H}}$. Powróciwſzy tedy do zrównania $\int -Ddx = h$, i położywſzy w niém zamiaſt D wártość onego, będzie $h = \int -pe^{\frac{-px}{H}}dx$; całka, któréy wártością podług (122) pokaże ſię bydź $He^{\frac{-px}{H}}$; więc naoſtatek $h = He^{\frac{-px}{H}}$; albo $lh = l.H - \frac{px}{H}$; co nam da wyſokość h Wilgoćmiaru, odpowiadaiącą wyſokości x nad powiérſzchnią morza, byleby była wiadoma wyſokość H tegoż wilgoćmiaru w poziemném położeniu z powiérſzchnią morza, i przyrodna ważność powietrza w témże położeniu.

Zeby to wyrażenie zrobić tém zgodniéyſze do Rachunków, można poczytać $\frac{px}{H}$ za logarytm iakiéy pewnéy liczby A; i rozumiéć $\frac{px}{H} = lA$. A naténczas będzie $lh = l.H - l.A = l\frac{H}{A}$. Ale tu pilnie uważyć trzeba, iż w wzrównaniu $\frac{px}{H} = lA$, kiedy po położeniu w niém wartościów zamiaſt p, x i H, wynaydzie ſię wártość ilości $\frac{px}{H}$ a zatém $l.A$, trzeba mówię pilnie uważyć, że takowy logarytm, ieſt logarytmém Hiperbolicznym; tak iż ażeby wynaleśdź liczbę A przy pomocy poſpolitych Tablic logarytmowych, trzeba przerzeczony logarytm zamiénić w logarytm poſpolity, rozmnożywſzy go podług (88) przez 0,43429448 i. t. d.

Co ſię tyczy zrównania $lh = \frac{H}{A}$, lubo logarytmy w niém zawiéraiące ſię, ſą hiperboliczne, atoli można poczytać ie za logarytmy poſpolite; bo ieżeli dwie liczby maią logarytmy równe w iednym układzie, to mieć będą logarytmy równe w wſzelkim innym układzie, ſpólnie do nich należącym.

Zebyśmy tego co dotąd w téy materyi mówiło ſię, dali iakie przyſtóſowanie, zamiérzmy ſobie wynaleziénie, iaka powinna bydź wyſokość Wilgoćmiaru na wierſzchołku góry *Teneryffy*; to ieſt porównaymy takową wyſokość wyniknąć maiącą z poprzédzaiącego rachunku, z wyſokością doświadczoną. Wyſokość téy góry znaleziono wynoſzącą 13158 ſtóp Paryſkich, albo 157896 calów nad powiérſzchnią morza. W położeniu poziemném z powiérſzchnią morza, merkuryuſz trzymał ſię wyſoko na 27 cal. i 10 *lin.*; na wierſzchołku ku góry trzymał ſię wyſoko na 17 *cal.* i 5 *lin.* to ieſt, że podług doświadczenia wypada h = 17 *cal.* 5 *lin.* Zobaczmy teráz co nam pokaże Rachunek.

Ważność przyrodna powietrza, ieſt około 850*tą* częścią ważności wody poſpolitéy; a téy znowu ważność przyrodna, ieſt około 14*ſtą* częścią takiéyże ważności merkuryuſzu. Będzie tedy $p = \frac{1}{850 \times 14} = \frac{1}{11900}$; $x = 157896$ *cal.*; $H = 27\frac{5}{6}$ *cal.* Więc $\frac{px}{H} = \frac{157896}{11900 \times 27\frac{5}{6}} = 0,4767153$; liczba, która ieſt logarytmém Hiperbolicznym, ilości oznaczonéy przez A; więc rozmnożywſzy ią przez 0,4342945, mieć będziém 0,2070346 na logarytm poſpolity, odpowiadaiący ilości A. Więc $l\frac{H}{A} = 1,2375306$; więc $lh = 1,2375306$; logarytm, który w Tablicach poſpolitych odpowiada liczbie 17,28. A zatém $h = 17,28$ *cal.* = 17 *cal.* $3\frac{1}{3}$ *lin.* A że doświadczenie dało 17 *cal.* 5 *lin.*; więc różnica między rachunkiém i doświadczeniém, niewynoſi tylko $1\frac{2}{3}$ *lin.*

Wreſzcie nienależy nam tu tego zamilczyć, iż niémożna żądać, ażeby tén rachunek miał pokazać niezawodną wyſokość Wilgoćmiaru, zwłaſzcza w położeniach bárdzo wyſokich. Bo 1*ód*, iak iuż indziéy uważyliśmy, powietrze nie w każdéy odległości bywa utłoczone w proporcyi wagi. 2*re* Bo w odległościach znaczniéyſzych ważność umniéyſza ſię. 3*cie* Bo ważność przyrodna p powietrza, ieſt bardzo odmiénna. 4*te* Bo ponieważ odmiany zachodzące w wyſokościach Wilgoćmiaru, mogą zależyć po części od ſprężyſtości po-

powietrza rozſzérzonego w gorącu, albo zbitego na zimnie, więc trzebaby miéć znaiomą czynność tych przyczyn, w rożnych wyſokościach położéń. 5*te* Bo pary i inne obce ciałka, którémi powietrze bywa poſpolicie obciążone, mogą bydź okazyą do wielu odmiénności.

341\. Na drugie przyſtóſowanie tychże wzwyż założonych fundamentów, a bardziéy ſłużące do zamiaru naſzego, będąc zgodne do obiaśniénia odporu, iaki daie powietrze ruchowi pociſków, (iak zobaczymy w Tomie naſtępuiącym), możemy ſobie obrać, wynaleziénie gęſtości powietrza w różnych wyſokościach.

Na wyrażénie takowéy gęſtości, znaleźliśmy byli wyżéy $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$; gdzie przez H rozumié ſię wyſokość merkuryuſzu w Wilgoćmiarze, w poziemném położeniu z powiérſzchnią morza, czyli w punkcie od którego poczynaią ſię rachówać ilości x. Oznaczmy ſobie przez a wyſokość, do któréy podnioſłaby ſię powietrſznia, gdyby nieodmiéniaiąc ſwoiéy wagi, miała wſzędzie tęż ſamę gęſtość p, iaką ma w punkcie od którego rachuią ſię ilości x. Podług tego przypuſzczenia, byłoby $1 \times H = pa$; gdzie przez 1, rozumié ſię bydź wyrażona ważność przyrodna merkuryuſzu, iak wyżéy. Położywſzy tedy zamiaſt H wártość onego pa, będzie $\frac{D}{p} = e^{\frac{-x}{a}}$, a zatém $D = pe^{\frac{-x}{a}}$.

Co ſię tyczy ilości a; takowa zawiſła od ſtóſunku między przyrodnémi ważnościami mi powietrza i wody, w tém miéyſcu, o które rzecz idzie; *np.* ieżeli przyrodna ważność powietrza, ma ſię do ważności wody : : 1 : 850, co ma miéyſce w śrzedniém umiarkowaniu powietrſzni, i w podnieſieniach małoco wyżſzych nad powiérſzchnią morza, to w takim razie, powietrze mocą ſwoiéy pośrzedniéy ważności, zdołałoby utrzymać ſię w równowadze z ſłupém wody wyſokim na 32 *ſt.*; a zatém wyſokość *a*, będzie $= 850 \times 32$ *ſt.* $= 27200$ *ſt.* Więc gdyby zapytano było w tychże ſamych okolicznościach, iaka ieſt gęſtość powietrza w wyſokości na 1000 *ſt.*; mielibyśmy $D = pe^{\frac{-1000}{27200}} = pe^{\frac{-10}{272}}$, albo $\frac{D}{p} = e^{\frac{-10}{272}}$; a zatèm log. $\frac{D}{p} = \frac{-10}{272}$. Trzebaby tedy wynaléśdź liczbę, któréy logarytm Hiperboliczny byłby $\frac{-10}{272}$, albo liczbę, któréy logarytm poſpolity byłby $\frac{-10}{272} \times 0{,}4342945$; to ieſt liczbę, która w Tablicach poſpolitych odpowiadałaby logarytmowi $-0{,}0159593$; a taką ieſt 0,964 z małém uchybiéniém; więc $\frac{D}{p} = 0{,}964$; więc $D : p : : 1 : 0{,}964 : : 1000 : 964 : : 250 : 241$; to ieſt, że w wyſokości na 1000 *ſt.* od powiérſzchni morza, gęſtość powietrza zmniéyſza ſię na $\frac{1}{25}$. Podobnież znalezlibyśmy, iż w wyſokości na 1000 *ſąż.* taż gęſtość zmniéyſza ſię około na $\frac{21}{100}$; to ieſt więcéy iak na $\frac{1}{5}$.

342. Na fundamencie tego co dotąd powiedziało ſię o wadze i o ſprężyſtości powietrza, tudzież o tłoczeniu rościéków w powſzechności, łatwo ieſt zrozumieć, iak woda po-

podnoſi ſię w Rurmuſach. Trzy głowniéyſze części uważać ſię maią w rurmuſie; to ieſt rury, klamki, i bieguny. Biegun ieſtto walec *ABCD* podſtawy kołowéy (fig. 109, 110, 111) mogący przebiégać wnętrſzną obiętość rury, która nazywa ſię *ſamo ciało* (corps), i w biegu ſwoim wypełniaiący doſkonale obiętość tèyże rury. Klamka *E*, ſłuży do otworzenia i zamknięcia na przemian przechodu dla wody. Ciało rurmuſu, ieſt rura którą biegun przebiéga. *FGHK* ieſt druga rura ſpoiona z ciałém rurmuſu, maiąca ſwóy dólny koniéc zanurzony w wodzie, któréy poziemność rozumiémy tu bydź oznaczoną przez *RS*.

figura 109. 110. 111.

Klapa

Daymy tedy że ſiła *P* (fig. 109) przyłożona do trzonka bieguna, podnoſi do góry takowy biegun. To powietrze zamknięte w rozległości *DVKHGFC* mocą ſwoiéy ſprężyſtości, będzie uſiłowało zabrać to mièyſce, z którego uſtąpił biegun, a zatém podnieſie klamkę *E* dla wniścia w ciało rurmuſu. To powietrze im obſzerniéy będzie ſię roſciągać, tém więcéy ubywać mu będzie ſprężyſtości; więc mniéyſze utłoczenie ſprawówać będzie przeciwko powiérſzchni wody *GH*, aniżeli ſprawuie powietrze naturalne przeciwko częściom zewnętrſznym *RG*, *HS*; tak iż przemożność powietrza zewnętrſzne- *figura* 109.

ſznego, podnieſie wodę w rurze *GK* do pewnéy wyſokości *HN*, póki aż waga tego ſłupa, złączona z ſprężyſtością pozoſtałego powietrza, niewyrówna wadze powietrza zewnętrſznego. A naténczas klamka *E* zamknie ſię ſama przez ſię. Spuściwſzy potém na dół biegun, powietrze zamknięte między biegunem a między podſtawą *TV* ciała rurmuſowego, tém więkſzéy nabywać będzie ſprężyſtości, im bardziéy biegun ſpuſzczać ſię będzie; przeto uſilność ſwoię będzie wywiérało przeciwko podſtawie bieguna, a przyſzedłſzy do więkſzéy ſprężyſtości iak powietrze zewnętrſzne, ieżeli w biegunie będzie zrobiona dziura, przymknięta klamką *L*, mogącą otwiérać i zamykać ſię, iak piérwſza, to pomiénione powietrze, przez nię wydobędzie ſię.

Po wyiściu tego powietrza, klamka ſama nazád opada; a podnoſząc na nowo biegun, woda znowu podnieſie ſię w rurę *FGHK*, do więkſzéy wyſokości, z téyże przyczyny co piérwéy; tak iż po péwnéy liczbie razy przerobiénia bieguném, woda doſtanie ſię do ciała rurmuſowego, dokąd ráz wſzedłſzy, za każdym ſpuſzczeniém bieguna, dobywać ſię i przechodzić będzie przez dziurę w nim zrobioną, podnoſząc klamkę, zamykaiącą ſię potém mocą właſnéy wagi, i utrzymuiącą wodę która do góry przeſzła, i która daléy wráz z biéguném podnoſi ſię. Taka tedy ieſt ſprawa *Rurmuſu ciągnącego* (Pompe aſpirante).

Co ſię tyczé Rurmuſu *deptaiącego*, (pompe foulante), ſkutki iego ſą naſtępuiące. Spuściwſzy bie-
figura 110. gun *PCD* (fig. 110), (który tu rozu-

zumiémy bydź położony poniżéy powiérſzchni wody *RS*), między klamką *E* naténczas zamkniętą, a między podſtawą bieguna, robi ſię próżne miéyſce. Waga wody czyniąca ſpólnie z wagą powietrza zewnętrſznego przeciwko klamce *L*, podnoſi wodę do ciała rurmuſu. A gdy woda uſtanie podnoſić ſię, klamka *E* zamyka ſię ſama przez ſię. Naténczas podnoſząc biegun do góry, takowy wypędza przed ſobą wodę wprowadzoną, przymuſza do otworzenia ſię klamkę *E*, i podnoſi wodę do części *TVYX*. Po podnieſiéniu bieguna, klamka *E* zamyka ſię, i zatrzymuie wodę, aż za nowém działaniém podobném piérwſzému, napędzi ſię nowéy wody, która w części *TVYX* podnoſić ſię będzie, w proporcyą liczby razy przerobiénia biegunem. Czaſém biegun daie ſię powyżéy powiérſzchni wody; ale niech będzie położony iak chce, ſkutek rurmuſu, zawſze da wytłumaczyć ſię w ſpoſób temu podobny. Taka tedy znowu ieſt ſprawa Rurmuſu deptaiącego.

Rur-

Rurmus *ciągnący i deptaiący* dla tego tak nazywa ſię, że w ſobie łączy te oboie ſkutki. Biegun $ABCD$ podnoſząc ſię (fig. 111), wpuſzcza wodę w obiętość $CDTVO$ przy pomocy rury $FGHK$, iak w rurmuſie ciągnącym. A potém ſpuſzczaiąc ſię, depce wodę zamkniętą w téy obiętości, któ- ra niémogąc dobydź ſię przez klamkę E, podnoſi klamkę L i przechodzi w rurę $MOmn$. Budowla i roſporządzenie części w rurmuſach, może bydź wielorako odmiénna; ale ſkutki, przez te które dopiéro opiſaliśmy, bardzo łatwo zawſze wytłómaczyć ſię dadzą.

figura 111.

343. Zaſtanówmy ſię teráz nad fundamentalnémi właſnościami tych ſilniów. Przy pomocy Rurmuſu deptaiącego, można podnieść wodę do takiéy wyſokości iak ſię ſpodoba, byleby użyć ſiły doſtateczney. Ale oſzacówanie takówèy ſiły wyciąga nie iedney uwagi. Trzeba mieć wzgląd na wymiary bieguna i rur; na wyſokość do którey ma bydź woda podnieſiona; na ſzypkość z którą ma bydź podnieſiona. Niemyślimy my tu rozbiérać teráz tego zagadniénia, ale tylko przeſtaniémy na niektórych zaſadach, do rozwiązania go ſłużyć mogących.

To pewna, że ſiła potrzebna do podnieſiénia wody do wyſokości zada-

danéy, powinna przynaymniéy bydź zdólna, do utrzymania równowagi z utłoczeniém, iakie odbierałaby podſtawa bieguna, gdyby, iak warſztwa rościeku doydzie do wyſokości zadanéy, wſzyſtko zoſtało w równowadze. I takowe to utłoczenie zechcemy tu oſzacówać. Ogółém powiedziawſzy ta ſiła powinna bydź przynaymniéy zdólna, do utrzymania ſłupa wody, maiącego za podſtawę, podſtawę bieguna, a za wyſokość maiącego odległość od powiérſzchni wody RS (fig. 110), aż do wiérſzchnéy warſztwy XY. *figura* 110.

Jakóż, kiedy podſtawa DC bieguna, znayduie ſię bydź położona poniżéy powiérſzchni wody RS, iawna ieſt, że ſiła niéma nic do czyniénia z utrzymówaniém tłoczenia wody zawártéy między RS i DC; bo takowe tłoczenie bierze odpór, od tłoczenia wody zewnątrſz otaczaiącéy, która wchodzi wewnątrſz przez dólne otwarcie ciała rurmuſowego. A zatém ſiła niéma więcéy do wytrzymania, tylko tłoczenie iakie ſprawuie rościék zawarty między RS i XY przeciwko powiérſzchni DC. Lecz takowe tłoczenie, powinno ważyć tyle, co tłoczenie iednégo promyka, wyſokiego od RS do XY, mówię tyle co tłoczenie tego promyka, powtórzone tyle razy, ile znayduie ſię punktów w powiérſzchni DC; więc w rzeczy ſaméy takowe tłoczenie, równa ſię wadze ſłupa wody, maiącego za podſtawę DC, a za wyſość, podnieſiénie war-

warſztwy *XT* nad powiérſzchnią wody *RS*.
Gdyby biegun znaydówał ſię bydź po-
łożony powyżéy powiérſzchni wody ozna-
czonéy przez *R'S'*; iawna ieſt, że woda za-
warta między *DC* i *R'S'* wcale nieobcią-
żałaby bieguna. Ale że w takim razie nié-
może inaczéy bydź utrzymana, tylko mocą
tłoczenia powietrza zewnętrſznego na ota-
czaiącą powiérſzchnią wody, więc takowe
tłoczenie powietrza, iuż niémoże oraz bydź
zdólne do trzymania równowagi z tłoczeniém
owego powietrza, które ſkutkuie przeciwko
powiérſzchni *XT*. A zatém powiérſzchnia
DC bieguna, znayduie ſię bydź obciążona
wagą, wyrównywaiącą ſłupowi wody, maią-
cemu za podſtawę *DC*, a za wyſokość, ma-
iącemu odległość od *De* do *R'S'*. To utło-
czenie, złączone z owém, iakie ſprawuie
przeciwko podſtawie *DC* woda zawarta mię-
dzy *DC* i *XT*, tyle wártaiąca ile waży ſłup
wody maiący za podſtawę *DC*, a za wyſo-
kość, maiący odległość od *DC* do *XT*, to
mówię dwoiakie tłoczenie, równa ſię wa-
dze ſłupa wody, maiącego za podſtawę *DC*,
a za wyſokość, podnieſiénie warſztwy *XT*
nad powiérſzchnią wody *R'S'*.

344. Co ſię tyczy Rurmuſu ciągnącego, maiąc ſądzić o ſkutku iego, niedoſyć ieſt oſzacówać dziélność ſiły; ale naſamprzód trzeba zaſtanowić ſię nad tém, czy woda będzie mogła dóyśdź do bieguna, a nawet czy zdoła podnieść ſię wyżéy; bo zachodzą takie okoliczności, dla których woda może zaſtanowić ſię w pewnym punkcie, chociażby bieguném robiło ſię iak naydłużéy.

Żeby to zrozumiéć daymy że woda doſzła iuż aż do *I* (fig. 109), gdzie położenie bieguna rozumié ſię iuż bydź nayniżſze iakie tylko miéć może; a dla proſciéyſzego rzeczy wyobrażenia, daymy, że rurmus ieſt wſzędzie iednoſtaynéy gruboſci. Jawna ieſt, że powietrze zawarte w rozległości *CDIZ*, ieſt téyże ſaméy mocy i ſprężyſtoſci, co powietrze zewnętrſzne, (przynaymniéy odłączywſzy na ſtronę wagę klamki *L* i odpór pochodzący z tarcia onéyże). Bo gdyby miało większą ſprężyſtość, to podnióſłſzy klamki, muſiałoby ſię wydobydź. Zmyślmy ſobie teráz, że ſkokiém bieguna, czyli rozległością, iaką przebiéga za każdém podnieſiéniém, ieſt *DO*. Gdy podſtawa *CD* doydzie do *QO*, powietrze zabiéraiące miéyſce *CDIZ*, dąży do rozéyścia ſię po rozległości *QOTZ*; i wrzeczy ſaméy rozéydzie ſię po niéy, ieżeliby woda iuż daléy niepodnoſiła ſię. Naténczas ſprężyſtość tego powietrza, będzie mniéyſza od ſprężyſtoſci powietrza naturalnego, w ſtóſunku rozległościów *CDIZ* do *QO-*

figura 109.

QOIZ, albo w ſtóſunku wyſokościów *DI* do *OI*. Więc ieżeli takowa ſiła ſprężyſtości, złączona z wagą ſłupa wody, tak wyſokiego iaka ieſt odległość od *ZI* do *RS*, wyrównywa wadze ſłupa wody na 32 *ſt.* wyſokiego, (bo takie ieſt tłoczenie powietrza przeciwko powiérſzchni wody *RS*), to rzecz oczywiſta, że równowaga będzie miała miéyſce, i woda iuż do góry więcéy niepóydzie; ieżeli zaś ta waga będzie większa, od wagi ſłupa wody na 32 *ſt.* wyſokiego, to woda nazád na dół upadać muſi, wprzód nim klamka będzie mogła zapaśdź: a ieżeliby przeciwnie była mniéyſza, od wagi ſłupa przerzeczonego, to woda daléy podnoſić ſię będzie w górę. Zobaczmy teráz, iakby można wynaléśdź takową wagę.

Oznaczmy ſobie przez h, wyſokość od punktu O aż do powiérſzchni wody *RS*; przez i ſkok bieguna, czyli rozległość *DO* którą przebiéga; przez x odległość *OI*. Miéć będziém $DI = x - i$, a wyſokość punktu *I*, będzie wyrażona przez $h - x$. Ponieważ powietrze zamknięte w rozległości *CDIZ*, ma też ſamę ſprężyſtość co powietrze zewnętrſzne; więc ſiła iego może miéć za wymiár, ſłup wody, wyſoki na 32 *ſt.*; a zatém kiedy ſiła powietrza roſciągnionego po rozległo-

ści

ści *QOIZ*, ma bydź mniéyſza w ſtóſunku wyſokości *DI* do *DO*, to takowa ſiła będzie czwartym wyrazém proporcyi naſtępuiącéy, $x : x - i :: 32 : \frac{32 \times (x - i)}{2}$. Lecz wymiarém ſiły, mocą któréy ſkutkuie woda zawarta między *ZI* i *RS* przeciwko zewnętrſznemu tłoczeniu powietrza, ieſt wyſokość $h - x$; więc ſiła ſprężyſtości powietrza, zabiéraiącego rozległość *QOIZ*, złączona z wagą wody zamkniętéy między *IZ* i *RS*, wynoſi razém wagę wyrażoną przez $\frac{32 \times (x - i)}{x} + h - x$. Zeby tedy woda mogła podnoſić ſię do góry, trzeba ażeby takowa waga była mniéyſza, od wagi ſłupa wody, wyſokiego na 32 *ſt.*; więc oznaczywſzy przez y ilość o którą ieſt mniéyſza, będzie $\frac{32 \times (x - i)}{x} + h - x = 32 - y$; ſkąd wyciąga ſię $-32i + hx - xx = -xy$; a zatém $x = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}y \mp \sqrt{[(\frac{h + y}{2})^2 - 32]}$.

Zeby ſię woda zaſtanowiła, oczywiście potrzeba ażeby y było zerém. A że w takim razie wypada $x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{(\frac{1}{4}hh - 32i)}$; gdzie obie wártości będą rzetelne, ieżeli ieſt $\frac{1}{4}hh$ większe od $32i$; więc można powiedzieć, że *kiedy kwadrat połowy nayważnieyſzéy wyſokości, do iakiéy może bydź podnieſiona podſtawa bieguna nad powiérſzchnią wody, ieſt większy nad ſkok tegòż bieguna, powtòrzony 32 razy, to zawſze znaydòwać ſię będą takie dwa punkta w rurmuſie ciągnącym, na których woda może ſię zaſtanowić.* Tak iż rurmus powiniên bydź poczytany za zły, kiedy biegun będąc nayniżéy położony, znayduie ſię między témi dwóma punktami.

Lecz

Lecz ieżeli $32i$ ieſt większe od $\frac{1}{4}hh$, to dwie wártości głoſki x, wynikaiące w takim przypadku, kiedyby było $y = 0$, wypadaią zmyślone; co daie znać, że w rurmuſie pobudówanym podług tego warunku, niepodobna ieſt, ażeby y było zerém; więc utłoczenie powietrza zewnętrſznego, będzie w nim zawſze mocnięyſze, i woda zaſtanawiać ſię niebędzie. Więc, *ażeby rurmus ciągnący uczynił niezawodnie ſwòy ſkutek, trzeba ażeby kwadrat połowy naywiękſzego wyniéſienia bieguna nad powiérſzchnią wody, był mniéyſzy od ſkoku tegóż bieguna, powtorzonego 32 razy.*

Jeżeli z wyżéy wynalezionego zrównania, $-32i + hx - xx = -xy$, wyciągniémy wártość głoſki y, mieć będziém $y = \frac{xx - hx + 32i}{x}$.

figura 112. 113. Teráz daymy, że AB (fig. 112. 113) oznacza naywyżſze podnieſiénie bieguna nad powiérſzchnią wody, a zaś AD oznacza ſkok tegoż bieguna; ieżeli na wártość głoſki x wezmiémy z kolei różne części AP linii AB, i ieżeli na proſtopadłych PM, powznaczamy wártości głoſki y, odpowiadaiące użytym wártościóm głoſki x, to z takowych punktów powytykanych powſtaie liniia krzy-

figura 112. wa MMC, która w (fig. 112), (kiedy $\frac{1}{4}hh$ będzie większe od $32i$), przecinać będzie liniią AB w dwóch punktach I i I'; tak iż rzędne PM będą położone z obu ſtron linii AB; te co po prawéy ſtronie, odpowiadaiąc wártościóm twiérdzącym głoſki y; a te co po lewéy ſtronie odpowiadać będą wártościóm przéczącym téyże głoſki. Skąd pokazuie ſię, że kiedy $\frac{1}{4}hh$ ieſt większe od $32i$, to tłoczenie powietrza zewnętrſznego, zawſze wypada większe, póki aż woda niedóy-

doydzie wyſokości BI'; gdzie dopiéro zaſtanowi ſię (odłączywſzy na ſtronę ruch nabyty), bo tam y przemiénia ſię w zero. Ale ieżeli woda mocą nabytego ruchu, pominąwſzy wyſokość BI', dóydzie do którego punktu położonego między I i I', to iuż tam niebędzie mogła zaſtanowić ſię, ale muſi na dół opadać, (byleby iéy klamka nieprzeſzkadzała); bo w tém miéyſcu wartość głoſki y wypada przécząca, co daie znać, że tłoczenie zewnętrſznego powietrza, ieſt ſłabſze od oboiéy uſilności razém złączonéy, to ieſt wody i ſprężyſtości wnętrſznego powietrza. Jeżeli woda doydzie wyſokości punktu I, to znowu z téyże przyczyny co wyżéy, będzie mogła tam zaſtanowić ſię. Ale gdy ráz pominie punkt I, iuż nietrzeba więcéy obawiać ſię żeby miała opadać; bo naténczas rzędne PM zawarte między A i I będąc wſzyſtkie twiérdzącémi, daią znać, że tłoczenie powietrza zewnętrſznego, począwſzy od wyſokości punktu I aż do A, zawſze ieſt mocniéyſze.

Przeciwnym ſpoſobém, kiedy wártość ilości $\frac{1}{4}hy$, ieſt mniéyſza od $32i$ (fig. 113), figura 113.
to linia krzywa nigdzie nieprzecina oſi AB; tak że wſzyſtkie rzędne PM wypadaią twiérdzące; więc w takim razie, tłoczenie powietrza zewnętrſznego ieſt zawſze mocnieyſze; a zatém nietrzeba obawiać ſię zaſtanowienia wody. Jeſt to potwiérdzeniém i obiaśnieniém tego, co poprzédziło wyżéy.

345. Gdyby rurmus ciągnący był poſtawiony na wyſokości albo w głębokości znacznie różnéy od téy, w którey waga powietrza wyrównywa wadze ſłupa wody na 32 ſt. wy-

wyfokiego; to w tém wfzyftkiém co przepifało fię wyżéy, trzebaby położyć mnièy albo więcéy nad 32 *ft.* Ta zaś ilość mniéyfzości albo większości, może bydź wynaleziona przy pomocy Wilgoćmiaru, rachuiąc tyle razy 14 linii więcéy albo mniéy względém 32 *ftòp*, ile merkuryufz wſkazówać będzie linii więcéy lub mniéy nad $27\frac{1}{2}$ *cal.*

W poprzédzaiącym rachunku, uważaliśmy rurmus, iakoby wfzędzie iednoftaynéy grubości; atoli chociażby tak niebyło, ale inaczéy iak w (fig. 109), to rozwiązanie nie- *figura 109.* wypadłody przeto trudniéyfze. Żeby wyrachówać ufilność powietrza wnętrfznego, w tén czas, póki woda niewniydzie ieſzcze w ciało rurmufu *XV*, *np.* póki ieſzcze ieft w położeniu *MN*, trzeba ułożyć tę proporcyą: Rozległość *QOVNMTQ* : *CDVNMTC* : : 32 *ft.* do czwartego wyrazu, który dodany do wagi flupa wody, maiącego za wyfokość *NH*, powinièn potém bydź zrównany z ilością $32 - y$, iak wyżéy. Nadto, kiedy rura *FG*, którą ciągnie fię woda, ieft mniéyfzéy śrzednicy od famego ciała rurmufu, to w nim niezawodny fkutek naftąpić mufi, ieżeli ma miéyfce warunek wyżéy założony; bo powietrze łatwiéy rozfzérza fię w takim rurmufie, aniżeli gdyby był iednoftaynéy grubości.

346. Co fię tyczé mocy, iaką powinna mieć fiła, chcąc ażeby utrzymała wodę w pewnéy wyfokości *XT* (fig.

(fig. 109); takowéy wymiarém, (iak *figura 109.* powiedziało fię o rurmufie deptaiącym), powinna bydź waga flupa wody, maiącego za podftawę, podftawę *DC* biéguna, a za wyfokość, podniefiénie naywyżfzéy warfztwy *XT*, nad powiérfzchnią wody *RS*; (w czém odłączamy na ftronę fkutek tarcia i wagę bieguna). To zaś dowodzi fię przez rozumówanie, podobne owemu, którego użyliśmy względém rurmufu deptaiącego, w położeniu biéguna powyżéy powiérfzchni wody *R'S'* (fig. 110). *figura 110.*

347. Ważność i fprężyftość powietrza, flużý do wytłómaczenia wielu innych fkutków; my przeftaniémy tu tylko na niektórych.

Jeżeli tedy w naczyniu napełnionèm wodą, lub iakiémkolwiek innym rościekiém, zanurzy fię krótfze kolanko rurki zakrzywionéy *DEF* (która nazywa fię léwarém) (fig. 114); wyciągnąwfzy niby przez wyffa- *figura 114.* nie, lub iakimkolwiek innym fpofobém powietrze z tego léwara; woda podnofić fię będzie do góry, i fpływać na dół końcém *F*, póty póki powiérfzchnia iéy w naczyniu, niezrówna fię z otwarciém *D* krótfzego kolanka.

Przyczyna tego ieft ta: że wyciągnąwfzy powietrze zawarte w rozległości *DEF*, fkutkiem tłoczenie powietrza zewnętrfznego, fkutkuiące przeciwko powiérfzchni *AB*, przymufza ſza rościék do podnieſiénia ſię w léwarze, i do wypłyniénia, kolankiém EF. A lubo powietrze tłoczy w punkcie F rościek poczynaiący płynąć, z uſilnością mało nierówną téy, która ſkutkuie przeciwko powiérſzchni wody w naczyniu, atoli warſztwa F znayduie ſię bydź nadto przytłoczona całym ſłupém wody IF, w rozumiéniu przeciwném; więc tén ſłup muſi opaśdź; lecz opadaiąc, ſprawuie miéyſce próżne w I, które muſi zaráz bydź napełnione, mocą zawſze przytomnéy czynności czyli tłoczenia powietrza na powiérchnią wody zawartéy w naczyniu, więc t. d.

Z tego rozumówania pokazuie ſię, że pod czas tego płyniénia, powietrze nieſkutkuie, tylko z uſilnością proporcyonalną różnicy IF między poziomém punktu F, i powierſzchni wody zawartéy w naczyniu; tak iż płyniénie będzie tém nagléyſze, im bardziéy dwa kolanka léwara w długości rożnić ſię będą; a zatém gdyby oba punkta F i D, znaydówały ſię w położéniu poziemném, to płyniénie rościeku niémogłoby naſtąpić.

Mówi ſię poſpolicie, że kolanko EF powinno bydź dłużſze od kolanka ED; ale iawna ieſt, iako przez to wyrażenie rozumiéć ſię ma, iż podnieſiénie pionowe punktu E nad punkt F powinno bydź większe, aniżeli podnieſiénie tegóż punktu E nad punkt D. Na długości zaś bezwzględnéy tych kolanek, wcale nic niezależy. Można zrobić kolanko DE daleko dłużſze od kolanka EF, pokręciwſzy rozmaicie kolanko DE; byleby puukt D, był wyżéy położony nad punkt F, to rościek póty nieuſtanie płynąć, póki nieopadnie aż do puuktu D; rozumié ſię atoli, że podnieſiénie punktu E nad punkt D, nieprzenoſi 32 ſtóp.

348. Przyłożywſzy uſta do ſzyiki butelki, i ciągnąc do ſiebie przez wyſýſanie roſpłyń w niéy zawarty, uſta przypną ſię mocno do brzegów otwartości ſzyiki; i tém trudniéy ie będzie oderwać, im było mocniéyſze to pociągniénie w ſiebie.

Przyczyna tego ieſt ; iż wyciągnąwſzy część powietrza zawartego w butelce, umniéyſza ſię ſprężyſtość pozoſtałego powietrza, w proporcyi wyciągnionéy ilości iego; a zatém czynność wnętrſznego powietrza, iuż niewyrównywa czynności powietrza zewnętrſznego. Ta różnica może bydź tak wielka, iżby ſię i flaſzka ſtłukła, zwłaſzcza kiedy ieſt płaſka.

349. Podobnymże ſpoſobém wytłomaczyć można, dla czego trudno ieſt otworzyć miech, zatkawſzy w nim rurkę. Bo rościągaiąc ściany, powietrze wnętrſzne, roſchodzi ſię po obſzérniéyſzém miéyſcu, przez co mu ubywa ſprężyſtości; a zatém powietrze zewnętrſzne ſilniéy ſkutkuie z wiérſzchu, aniżeli powietrze zamknięte wewnątrſz.

TABLICA

Ważnościów, przyrodnych materyóm naypoſpoliciéy używanym.

PRZESTROGA.

Liczby odpowiadaiące każdemu rodzàiowi materyi w naſtępuiącéy Tablicy, wyrażaią ſtòſunek między wagą iakiéykolwiek obiętości téy materyi, a między wagą podobnéyże obiętości wody deſzczowéy; którato oſtatnia wyraża ſię tu przez iedność. Stopa Francuſka ſześciénna wody déſzczowéy, waży 70ſtów Paryſkich; 73,5 Kolońſkich albo Warſzawſkich Mennicznych; a Warſzawſkich ſklepowych mniéyſzéy wagi

90,837; takichże większéy wagi. 84,678. Stopa znowu Warſzawſka ſześcienna téyże wody déſzczowéy, waży ftów Paryſkich 53,43; ftów Kolońſkich 56,1; ftów mniéyſzych Warſzawſkich ſklepowych 69,33; takichże ftów większych. 64,63; to wſzyſtko z małém uchybiéniém. A zatém ażeby przy pomocy téy Tablicy, mieć wagę ſtopy ſześciénnéy iakiéykolwiek innéy materyi, trzeba liczbę odpowiadaiącą takowéy materyi w téy Tablicy, rozmnożyć przez wagę ſtopy ſześciénnéy wody.

Np. liczba odpowiadaiąca tu merkuryuſzowi, ieſt 13,593; co daie znać że merkuryuſz waży 13 i $\frac{593}{1000}$ razy, tyle co woda. Chcąc tedy wiedzieć wiele waży ſtopa Francuzka ſześciénna takowego merkuryuſzu, wiele mówię waży ftów czyto Paryſkich, czy Kolońſkich, czy Warſzawſkich ſklepowych mniéyſzych lub większych, mnożę 13,593 w piérwſzym przypadku przez 70, w drugim przez 73,5; w trzecim przez 90,837; a w czwartym przez 84,678. A wypadaiące mnogości pokazuią mi, że ſtopa Paryſka merkuryuſzu, waży ftów Francuſkich 951,51; Kolońſkich 999,08; Warſzawſkich mniéyſzych. 1234,75; Warſzawſkich większych 1151,028; z małém uchybieniém. Podobnymże ſpoſobèm chcąc wiédzieć wiele waży Stopa Warſzawſku ſześciénna tegòż merkuryuſzu, w funtach czyto Francuſkich, czy Kolońſkich, czy Warſzawſkich, rozmnożyłbym liczbę 13,593 w piérwſzym przypadku przez 53,43; w drugim przez 56,1; a w trzecim przez 69,33; albo przez 64,63. Toż rózumié ſię o innych materyach.

WAZNOSCI PRZYRODNE

niektórym ciałòm Brylaſtym.

Antimonium Niemieckie – – –	4,000.	Brzoſt drzewo –	0,600.
Antimonium Węgierſkie – – –	4,700.	Bukſzpan drzewo	1,030.
Borax – – –	1,720.	Cedrowe drzewo	0,613.
Brezylia Drzewo.	1,030.	Cegła – – –	1,857.
		Cyna czyſta –	7,320.
		Cyna mieſzana Angielſka – –	7,471.

Cynober naturalny	7,300.	Moſiądz – –	7,829.
Cynober kunſztowny – – –	8,200.	Olſzyna – –	0,530.
Dąb zielony – –	1,143.	Ołów – – –	11,828.
Dąb ſuchy – –	0,857.	Orzech drzewo	0,600.
Gaiak drzewo –	1,337.	Piaſek rzéczany	1,900.
Gips – – –	1,228.	Proch woiènny	0,914.
Glina – – –	1,929.	Róg wołowy -	1,814.
Guma Arabſka –	1,375.	Róg Jeleni – –	1,875.
Grabina drzewo	0,854.	Rokicina – –	0,543.
Gryſzpan – –	1,714.	Salitra – – –	1,900.
Hałun – – –	1,714.	Salitra obrocona w ſól *martwą* (fixe)	2,745.
Heban drzewo –	1,177.	Siarka naturalna	2,000.
Jaſion – – –	0,845.	Siarka poſpolita	1,800.
Jawór albo klón	0,755.	Smoła – – –	1,150.
Jodła – – –	0,550.	Sól kopana – –	2,143.
Kamiéń łupki (ardoiſe) – –	3,500.	Słoniowa kość –	1,825.
Kamiéń twardy	2,371.	Srzébro przednie	11,091.
Kamiéń poſpolity	1,642.	Srzébrna piana –	6,044.
Koperwas Angielſki	1,880.	Stal nie hártowna	7,738.
Krzemiéń nieprzeźrzoczyſty –	2,542.	Stal hartowna –	7,704.
Krzemiéń przeźrzoczyſty – –	2,641.	Szkło białe – –	3,150.
Krwawnik – –	4,360.	Tucya moſiężna albo Zynkuneda	5,000.
Marmur – –	2,700.	Węgièl ziemny	1,240.
Merkuryuſz –	13,593.	Woſk żółty – –	0,995.
Miédź – – –	9,257.	Zelazo lane – –	7,114.
		Zelazo kute – –	8,286.
		Złota piana – –	6,000.
		Złoto przednie	19,640.

Ważności, przyrodne niektórym ciałom roſciecznym.

Powietrze – –	$0,001\frac{1}{5}$	Wodka Serwaſerow.	1,300.
Woda déſzczowa	1,000	Duch Salitrzany	1,315.
Woda dyſtyllowana – – –	0,993	Ténże zrektyfikówany. – –	1,610.
Woda rzeczana	1,009	Duch Soli morſkiéy (ſel marin) –	1,130.
Woda morſka –	1,030	Duch Soli winnéy (tar-	
Wodka Węgierſka	1,234		

(tartre) - - 1,073.	Oléy lniany - - 0,932.
Duch Terpentynowy - - - 0,874.	Oléy terpentynowy 0,792.
Duch winny zrektyfikówany - - 0,866.	Oliwa - - - 0,913.
Duch koperwaſowy 1,203.	Ocet winny - - 1,011.
	Ocet dyſtyllówany 1,030.

PRZYDATEK

Niektórych Zagadnień przyſtóſówanych do Artyleryi, a rozwięzuiących ſię na fundamentach, w tym i w poprzédzaiących Tomach założonych.

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Daymy że znayduie ſię w Ludwiſarni Spiż ſtary np. *troiakiego rodzaiu; piérwſzy taki, że w nim na każde* 104 fty *miedzi wchodzi* 8 ftów *cyny; w drugim na każde* 101 ftów *miedzi wchodzi* 11 ftów *cyny; w trzecim na każde* 92 fty *miedzi wchodzi* 20 ftów *cyny;* * *chcąc z tego troiakiego gatunku ſtarego ſpiżu, zrobić nowy odléw taki, ażeby w nim na każde* 100 ftów *miedzi wchodziło* 12 ftów *cyny: ieſt pytanie, w iakiéy proporcyi ma bydź wzięto do pieca każdego z tych trzech rodzaiów ſpiżu.*

Oznaczmy ſobie przez x ilość *ftów,* iaką trzebaby wziąść z piérwſzego gatunku, przez y ilość *ftów* drugiego gatunku a przez z ilość *ftów* z trzeciego gatunku. Ponieważ w 112 *ftach* piérwſzego ſpiżu znayduie ſię 104 *fty* miedzi, więc można wynaléśdź wiele miedzi bydź muſi w x *ftach* tegóż ſpiżu, wy-

* *Te gatunki rozumieią ſię bydź rozróżnione, ſpoſobém podanym do tego w Tom. I. Artyl. l.* 133.

wyrachówawſzy czwarty wyraz naſtępuiącéy proporcyi $112 : 104 :: x : \frac{104x}{112}$; podobnymże właśnie ſpoſobém znalezlibyśmy że w y *ftach* drugiego rodzaiu, powinno bydź miedzi $\frac{101y}{112}$, a w z *ftach* trzeciego rodzaiu powinno bydź $\frac{92z}{112}$. Te trzy ilości razém dodane uczynią $\frac{104x + 101y + 92z}{112}$. A że nowa miéſzanina ma bydź taka, ażeby w 112 *ftach* znaydówało ſię 100 *ftów* miedzi, więc muſi bydź $\frac{104x + 101y + 92z}{112} = 100$.

Co do cyny, uważam podobnież, że biorąc x *ftów* piérwſzego rodzaiu, biorę naſtępnie $\frac{8x}{112}$ cyny, biorąc y *ftów* drugiego rodzaiu, biorę $\frac{11y}{112}$, a z trzeciego rodzaiu biorę $\frac{20z}{112}$ cyny; a że w 112 *ftach* nowego ſpižu, ma iéy znaydówać ſię 12 *ftów,* więc muſi bydź $\frac{8x + 11y + 20z}{112} = 12$.

Ponieważ w to zagadnienie wchodzą trzy niewiadome, a niémamy tylko dwa warunki, a zatém téż tylko dwa z nich wynikaiące zrównania, więc zaraz wnoſzę ſobie, iż to Zagadnienie ieſt nieokreſlone, to ieſt, że wielo ſpoſobami może bydź rozwiązane. A zatém poſtąpiwſzy ſobie podług reguł w Algebrze przepiſanych, miéć będziém iak naſtępuie.

$$\frac{104x + 101y + 92z}{112} = 100.$$

$$\text{i } \frac{8x + 11y + 20z}{112} = 12,$$

albo

albo $104x + 101y + 92z = 11200$.
i $8x + 11y + 20z = 1344$.
a z każdego z tych zrównań wyciągnąwszy wartość głoski x, będzie

$$x = \frac{11200 - 101y - 92z}{104}$$

$$x = \frac{1344 - 11y - 20z}{8}.$$

Zrównawszy te dwie wartości iednę z drugą, i wyrugówawszy mianównika będzie
$89600 - 808y - 736z = 139776 - 1144y - 2080z$,
albo przestawiwszy, $1144y - 808y = 139776 - 89600 - 2080z + 736z$.
a po zebraniu. $336y = 50176 - 1344z$.

A zatém $y = \frac{50176 - 1344z}{336}$.

Teraz żeby dokończyć zagadnienia, dosyć iest, zamiast z położyć liczbę taką iaka się spodoba. Atoli iawna iest że, przecięż powinna bydź taka, ażeby wypadek z ilości $\frac{50176 - 1344z}{336}$ był znacznie mnieyszy od 112, a znacznie większy od 1. Obierzmy tedy sobie *np.* na wartość głoski z 30 *ftów*; to mieć będziem $y = \frac{50176 - 1344 \times 30}{336} = \frac{50176 - 40320}{336} = 29 \frac{112}{336}$. Te dwie wartości położywszy zamiast y i z w zrównaniu $x = \frac{1344 - 11y - 20z}{8}$, znaydziemy $x = 52 \frac{224}{336}$. A zatém, żeby nowy odlew był taki, iżby w nim na każde 100 *ftów* miedzi wchodziło 12 *ftów* cyny; trzebaby wziąść spiżu starego pomienionych trzech gatunków w takiéy proporcyi, ażeby ilość pierwszego gatunku miała się, do ilości drugiego gatunku, i do ilości trzeciego gatunku : : $52 \frac{224}{336} : 29 \frac{112}{336} : 30$.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

Maiąc wielorakiego gatunku zepsuty proch np. dwoiakiego lub troiakiego; a oráz wiadomo, każdy gatunek, z iakiéy proporcyi składa się Salitry, Siarki i węgli; daymy że w pierwszy wchodzi na 100 ftów *salitry* 20 ftów *siarki, a* 24 ftów *węgli, w drugi na* 100 ftów *salitry* 12 ftów *siarki a* 20 ftów *węgli; a w trzeci, na* 100 ftów *salitry*, 10 ftów *siarki, a* 24 fty *węgli; chcąc go przerobić na iedén gatunek taki, ażeby na każde* 100 ftów *salitry wchodziło* 12 ftów *siarki a* 15 ftów *węgli, iest pytanie, w iakiéy proporcyi, trzebaby wziąść każdego z trzech pomienionych, gatunków?*

Ponieważ to Zagadnienie, iest podobne do poprzédzaięcego, (oprócz że iest określone); przeto rozwiązanie onego, dla wprawienia się, zostawiamy Czytelnikowi.

ZAGADNIENIE TRZECIE.

Daymy że do moździérza ma bydź dana komora w postać Stożka ściętego, takiéy wielkości, ażeby mieściła w sobie 2 fty *prochu; z tym warunkiém, ażeby śrzednica większéy podstawy stożka miała* 4 cal. *a śrzednica mnieyszéy podstawy, miała* 2 c. *Niechay będzie nadto wiadomo że stopa sześcienna prochu waży* 51 ftów. *Jest zadano, wynaléśdź potrzebną wysokość téy stożkowéy komory.*

Oznaczmy sobie przez x tę zadaną wysokość. Naprzód trzeba mi wiedzieć, iaka bryłowatość odpowiadać ma ilości 2 *ftów* prochu, kiedy 51 *ftów* zawiéraią się w iednéy stopie; czego dochodzę, przez proporcyą następuiącą.

$$51 : 1728^{ccc} : : 2 : 67,777.^{ccc}$$

Wynalázłszy tedy 67,777 na obiętość odpowiadaiącą 2 *ftóm* prochu; ponieważ ta obiętość ma mieć postać stożka ściętego, więc podług Jeometryi, równać się powinna, trzém całym stożkóm téyże wy-

wyſokości co ſtożek ścięty, z których piérwſzy miałby za podſtawę, większą podſtawę ſtożka ściętego, drugi miałby za podſtewę, mniéyſzą podſtawę; a trzeci miałby za ſwoię podſtawę, podſtawę śrzednią proporcyonalną, między większą i mniéyſzą podſtawą tegóż ſtożka ściętego. A zatém oznaczywſzy ſobie promiénie tych trzech podſtaw 2 $1\frac{1}{2}$ i 1 przez a, b, d, a przez $c : r$ ſtóſunek okręgu do śrzednicy, na wyrażenie bryłówatości tych trzech ſtożków mieć będziém $\frac{a^2c}{r} \times \frac{1}{3}x$, $\frac{b^2c}{r} \times \frac{1}{3}x$, $\frac{d^2c}{r} \times \frac{1}{3}x$; więc muſi bydź $\frac{a^2c}{r} \times \frac{1}{3}x + \frac{b^2c}{r} \times \frac{1}{3}x + \frac{d^2c}{r} \times \frac{1}{3}x = 67{,}777$. albo $\left(\frac{a^2c}{r} + \frac{b^2c}{r} + \frac{d^2c}{r}\right) \times \frac{1}{3}x = 67{,}777$. Więc $\frac{1}{3}x = \frac{67{,}777}{\frac{a^2c}{r} + \frac{b^2c}{r} + \frac{d^2c}{r}}$, a zatém $x = \frac{67{,}777 \times 3}{\frac{a^2c}{r} + \frac{b^2c}{r} + \frac{d^2c}{r}}$; a położywſzy zamiaſt ilościów literalnych, onych wartości, będzie $x = \frac{67{,}777 \times 3}{4 \times 3\frac{1}{7} + 2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{7} + 1 \times 3\frac{1}{7}} = \frac{203{,}331}{12{,}57 + 6{,}87 + 3{,}14} = \frac{20333}{2258} = 9$. To ieſt, że komora takowa powinnaby bydź wyſoka na 9 *cal.* zaniedbawſzy reſztę, niewynoſzącą i iednéy tyſiącznéy części cala.

ZAGADNIENIE CZWARTE.

Mówiąc o Szturmakach (Artyl. tom II. Rozdz. IV), do poſpolitego użycia naznaczyliśmy im tylko kómory ſtożkowe; atoli do ſprawiénia niémi iakiego dzielnego ſkutku, zwykły im dawać ſię komory para-

raboliczne. *Daymy tedy iż do takowego ſzturmaka, ma bydż uproporcyonòwana komòra paraboliczna wyſoka na* 12 cal. *takiéy wielkości, ażeby mieściła w ſobie* 51 ftów *prochu.*

Wynayduię naprzód obiętość odpowiadaiącą ilości 51 *ftòw* prochu; tymże ſpoſobèm iak w poprzédzaiącym przykładzie; to ieſt, 51 : 1728 : : 51 : 1728. Teráz żeby mieć wymiary paraboli odpowiadaiące téy obiętości; uważam naprzód że podług (80 Mechaniki), bryłowatość paraboli, równa ſię połowie wálka téyże podſtawy i téyże wyſokości co parabola; tak iż oznaczywſzy ſobie daną wyſokośś przez x, promień podſtawy, czyli rzędną przez y; na bryłowatość paraboli mieć będziém $\frac{y^2 \times 3\frac{1}{7} \times x}{2}$, a zatèm będzie $1728 = \frac{y^2 \times 3\frac{1}{7} \times x}{2}$ albo $3456 = y^2 \times 3\frac{1}{7} \times x$; a zatém $y^2 = \frac{3456}{3\frac{1}{7}x}$; a zaś $y = \sqrt{\frac{3546}{3\frac{1}{7}x}}$. Zrównanie, któreby nam dało, wártość promiénia podſtawy, odpowiadaiącego żądanéy komorze paraboliczney. Ale że do nakryślenia iéy trzeba mieć wiadomą palirzędną, więc zobaczmy iakby znaléśdź iéy wartość. Mamy w (Alg. 291. po 4*te*) $yy = px$, gdzie przez y ieſt oznaczona rzędna, przez x odcinek, a przez p palirzędna, więc będzie $p = \frac{y^2}{x}$; to ieſt, położywſzy zamiaſt y^2 wártość iego dopièro wzwyż wynalezioną, będzie $p = \frac{3456}{3\frac{1}{7}x^2}$. A że zadana wyſokość kómory paraboliczněy ma wynoſić 12 *cal.* które tu w oboim zrównaniu ieſt wyrażone przez x; więc naoſtatek mieć będziém $p = \frac{3456}{3\frac{1}{7} \times 144} = 7{,}63c$; a y będzie $= \sqrt{\frac{3456}{3\frac{1}{7} \times 12}} = 9{,}6\,c.$ z małém uchybiéniém.

ZA-

ZAGADNIENIE PIĄTE.

Zdarzaią ſię częſtokroć do obrachówania w budowlach Artyleryczych ſklepiénia Elliptyczne; *niechay tedy będzie iedno takie, długie na 22. łokcie, grube na $\frac{1}{2}$; większa średnica Ellipſy niechay wynoſi 12 łok. a mniéyſza 8 łokci; ieſt zadano wynaléśdź, wiele to ſklepiénie czyni łokci ſześciénych?*

Jawna ieſt, że do rozwiązania tego Zagadnienia nietrzeba więcéy, tylko wyrachówać powiérſzchnią ſklepiénia, i rozmnożyć ią przez grubość. A że powiérſzchnia płaſka Ellipſy ma ſię do powiérſzchni płaſkiéy koła opiſanego na większéy średnicy; iak ſię ma większa średnica do mniéyſzéy średnicy (Algebr. l. 232); więc w tymże ſamym ſtóſunku, muſi ſię mieć i obwód i powiérſzchnia wypukła Ellipſy do okręgu i do powiérſzchni wypukłéy koła. A zatém uważam naprzód to ſklepiénie, iakoby było kołowe maiące średnicy 12 łok. Żeby tedy mieć powiérſzchnią Pólwałka ſklepowego, ſzukam naprzód okręgu koła przez tę proporcyą,

$$7 : 22 :: 12 : 37\tfrac{5}{7}.$$

A wziąwſzy połowę tego okręgu i rozmnożywſzy go przez długość 22. mieć będę powiérſzchnią ſklepiènia, gdyby było kołowe, iakoto

$$\begin{array}{r} 18\frac{6}{7} \\ 22 \\ \hline 36 \end{array}$$

ſkąd wnoſzę ſobie powiérſzchnią ſklepienia Elliptycznego przez tę proporcyą $\left.\begin{array}{r} 36 \\ 18\frac{6}{7} \\ \hline 414\frac{6}{7} \end{array}\right.$ *powiérſzchnia kołowa*

proporcyą $12 : 8 :: 414\frac{6}{7} : 237\frac{3}{49}$ *powiér. Eliptyczna*

Naoſtaték rozmnożywſzy ią przez grubość, to ieſt przez $\frac{1}{2}$ *łok.* mam na bryłowatość przerzeczonego ſklepiénia Elliptycznego, $168\frac{26}{49}$ łokci ſześciènnych.

ZAGADNIENIE SZOSTE.

Maiąc zadaną proporcyą i wagę moſtołodzi, iak wynaléśdź, wiele takowa ciężaru źniéść potrafi bez za-

zatoniénia. Np. *niechay będzie waga moſtołodzi, (iakie ſą Francuſkie),* 975 ſtow, *a proporcya taka: to ieſt, długość wiérſzchna maiąca zoſtać równo z powiérſzchnią wody* $17\frac{1}{2}$ ſt. *długość denna* $13\frac{1}{2}$ ſt. *ſzérokość* 5 ſt. *głębokość zanurzona w wodzie* 2 ſt.

Podług (Mech: 315), ażeby ta moſtołodź niezatonęła, trzeba, ażeby waga wyrugówanéy przez nię wody, równała ſię wadze téyże moſtołodzi naładowanéy. Nieidzie tedy tylko o wyrachówanie wagi wody, któréy miéyſce zaſtępuie moſtołódź. Ta zaś wynaydzie ſię, obrachówawſzy obiętość moſtołodzi w ſtopach ſześciénnych, i tę obiętość rozmnożywſzy przez wagę iednéy ſtopy ſześciénnéy wody. Lecz oznaczywſzy wiérſzchną długość moſtołodzi przez AI, denną przez CL, dwie tróykątne płaſzczyzny przerznięcia przez EHG i EFG; na wyrażenie obiętości moſtołodzi mamy, podług (Jeom. 258),

$$EHG \times \frac{2AI + CL}{3} + EFG \times \frac{2CL + AI}{3};$$

więc nietrzeba tylko zamiaſt tych ilościów literalnych, położyć liczebne; a tak będzie w naſzym przykładzie

$$AI = 17\tfrac{1}{2}.$$
$$CL = 13\tfrac{1}{2}.$$

Co ſię tycze powiérſzchni tróykąta EHI; ta powinna równać ſię podſtawie, którą tu oznacza wiérſzchna ſzérokość, to ieſt 5 *ſt.* rozmnożonéy przez połowę wyſokości, to ieſt przez 1 *ſt.*; a powiérſzchnia drugiego tróykąta EFG, powinna równać ſię podſtawie, ktorą tu oznacza denna ſzérokość, to ieſt $4\frac{3}{4}$ *ſt.* rozmnożonéy także przez połowę wyſokości, to ieſt przez 1 *ſt.*

A zatém będzie $EHG = 5 \times 1 = 5$

$EFG = 4\frac{3}{4} \times 1 = 4\frac{3}{4}$.

Więc obiętość moſtołodzi, będzie wynoſić

$$5 \times \frac{2 \times 17\frac{1}{2} + 13\frac{1}{2}}{3} + 4\frac{3}{4} \times \frac{2 \times 13\frac{1}{2} + 17\frac{1}{2}}{3} = \frac{242\frac{4}{8}}{3} + \frac{211\frac{3}{8}}{3} =$$

$= \frac{453\frac{7}{8}}{3} = 151\,sss$. *r* odrzuciwſzy ułamek. Którą rozmnożywſzy przez wagę iedney ſtopy ſześcienney wody, to ieſt przez 70 *ſtów*, mieć będziem na wagę wody wyrugówaney przez zanurzoną moſtołódź 11570 *ſtów*.

Taki tedy ciężar może znieść bez zatoniénia moſtołódź wzwyż opiſana. A że ſama moſtołódź waży 875 *ſtów*; więc można na nię władówać ieſzcze 10595 *ſtów*.

Są tedy te Moſtołodzie doſtatecznie uproporcyonówane pod 24 *ſtówe* armaty; Bo takowe ważą 5400 *ſtów*, a łoże i pociąg niebędą też pewnie więcey ważyły nad 5195 *ſtów*.

KONIEC TRZECIEGO TOMU.

ZBIOR

ZBIOR
Materyi zawartych w tym trzecim Tomie.

FUNDAMENTA RACHUNKÓW
Służących za wſtęp do Nauk Fizyczno-Matematycznych.

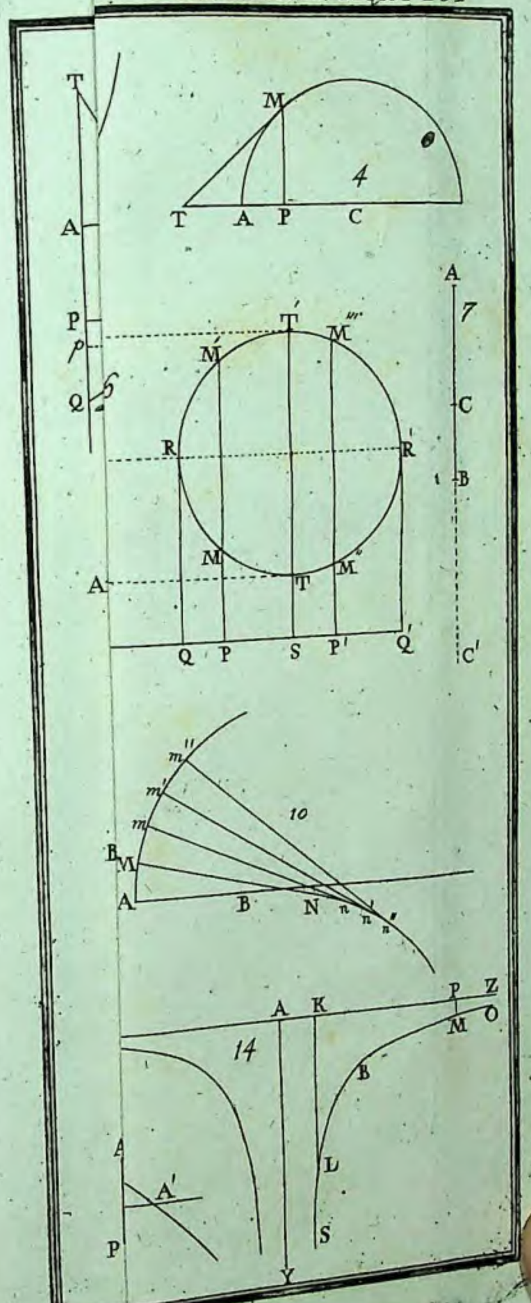
FUNDAMENTA POWSZECHNE MECHANIKI.

O

O ROWNOWADZE ROSCIEKOW.

I o Ciałach bryláſtych zanurzonych w tychże Rościekach.

KONIEC ZBIORU MATERYI.
TRZECIEGO TOMU.

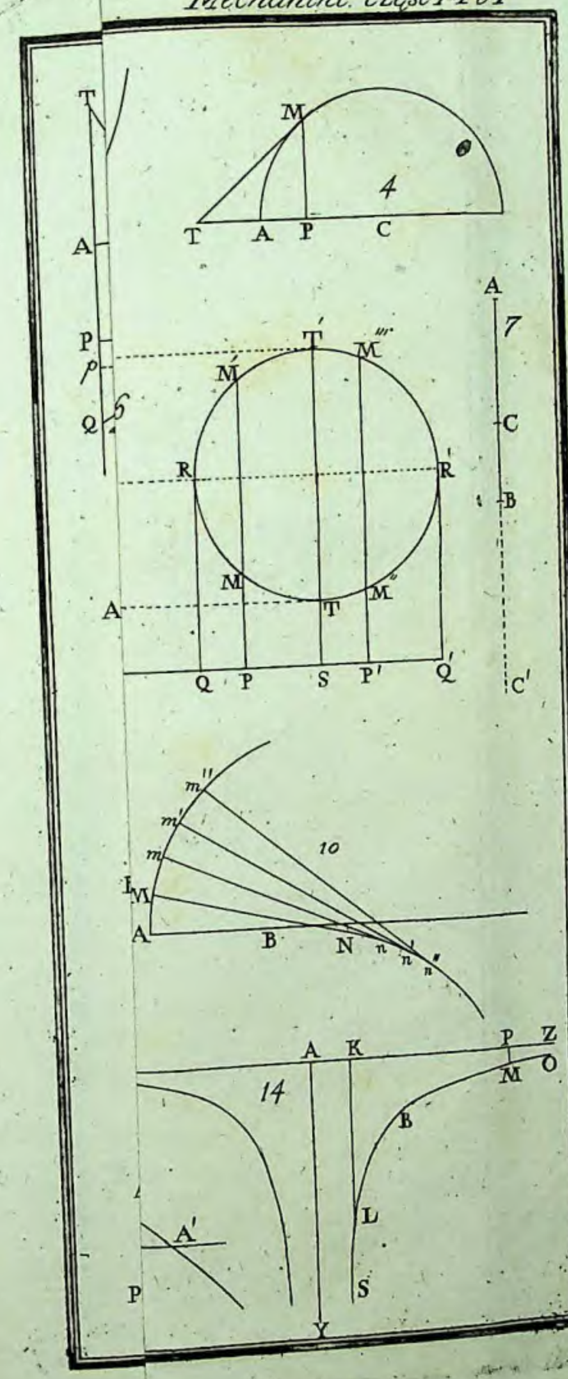


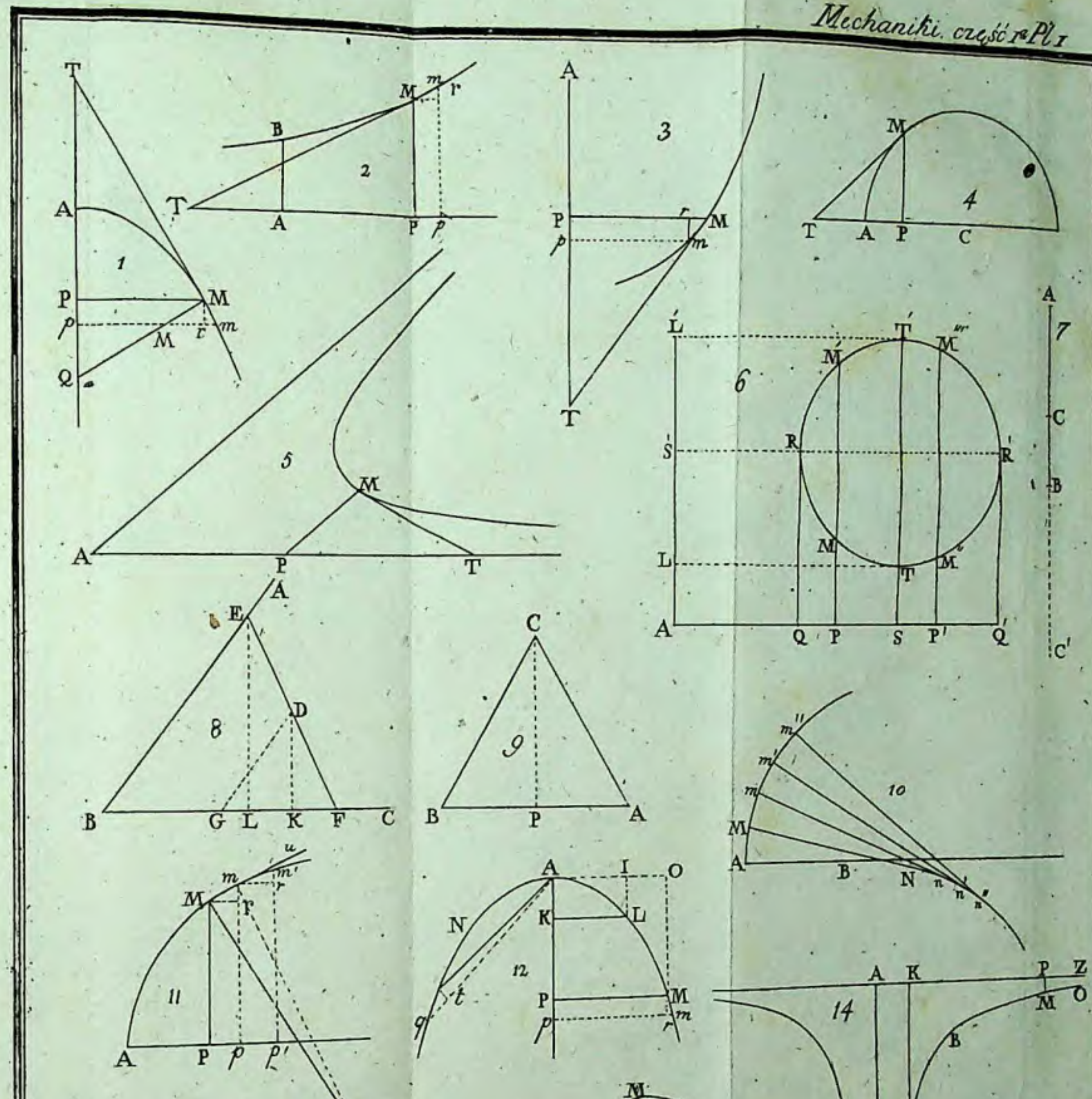
O ROWNOWADZE ROSCIEKOW,

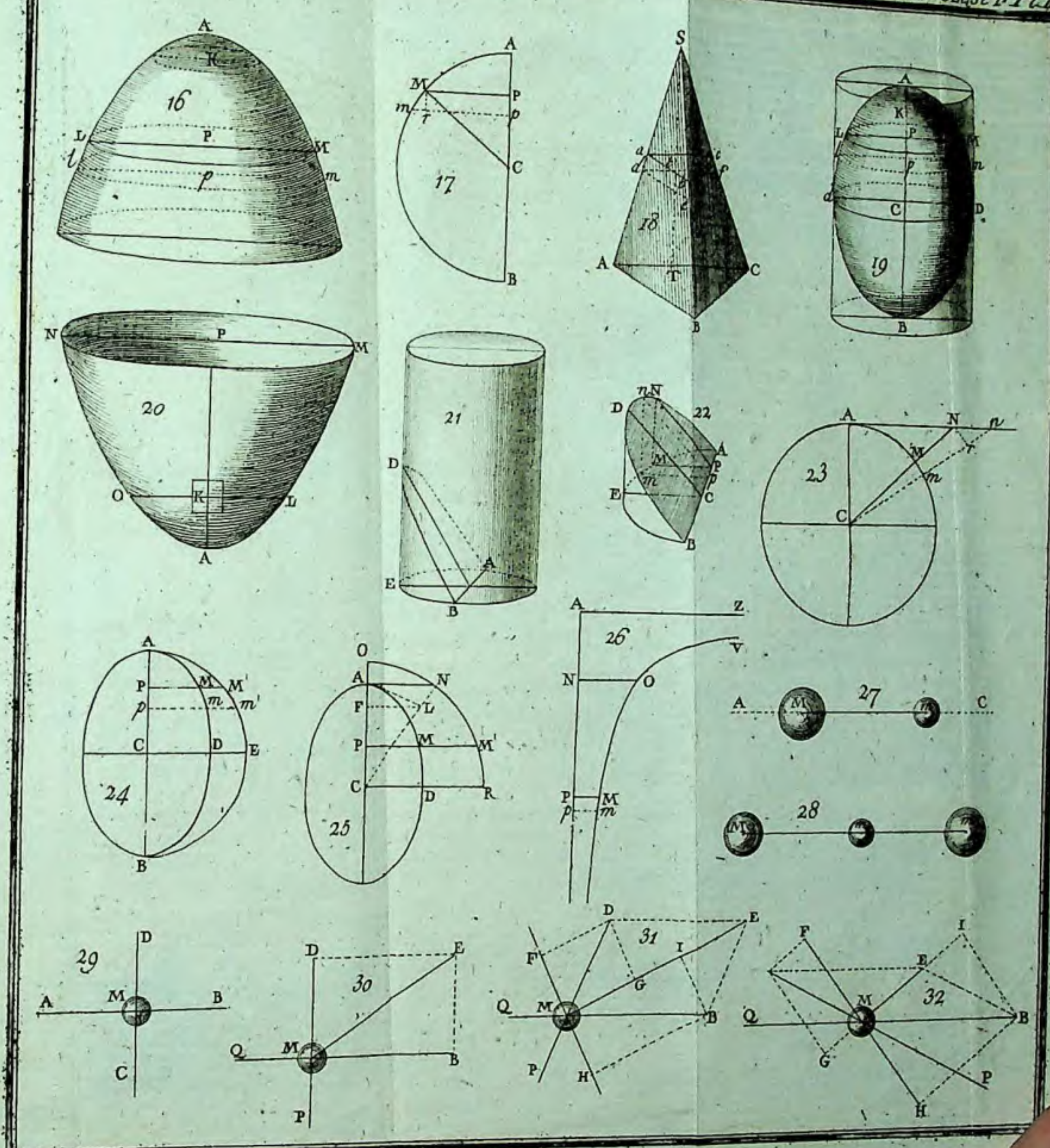
I o Ciałach brylaſtych zanurzonych w tychże Rościekach.

KONIEC ZBIORU MATERYI.
TRZECIEGO TOMU.

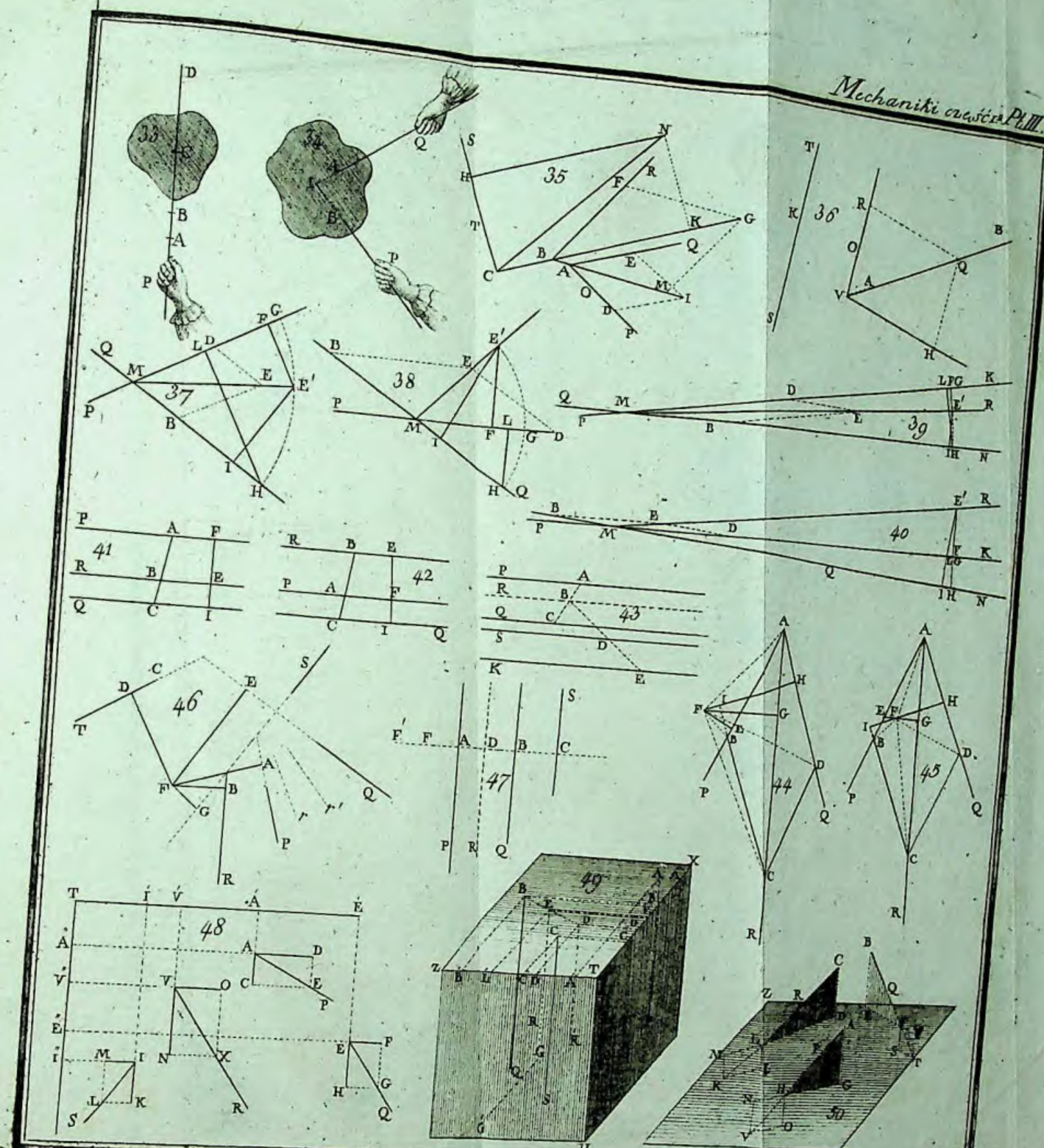
Mechaniki część 1a Pl. 1

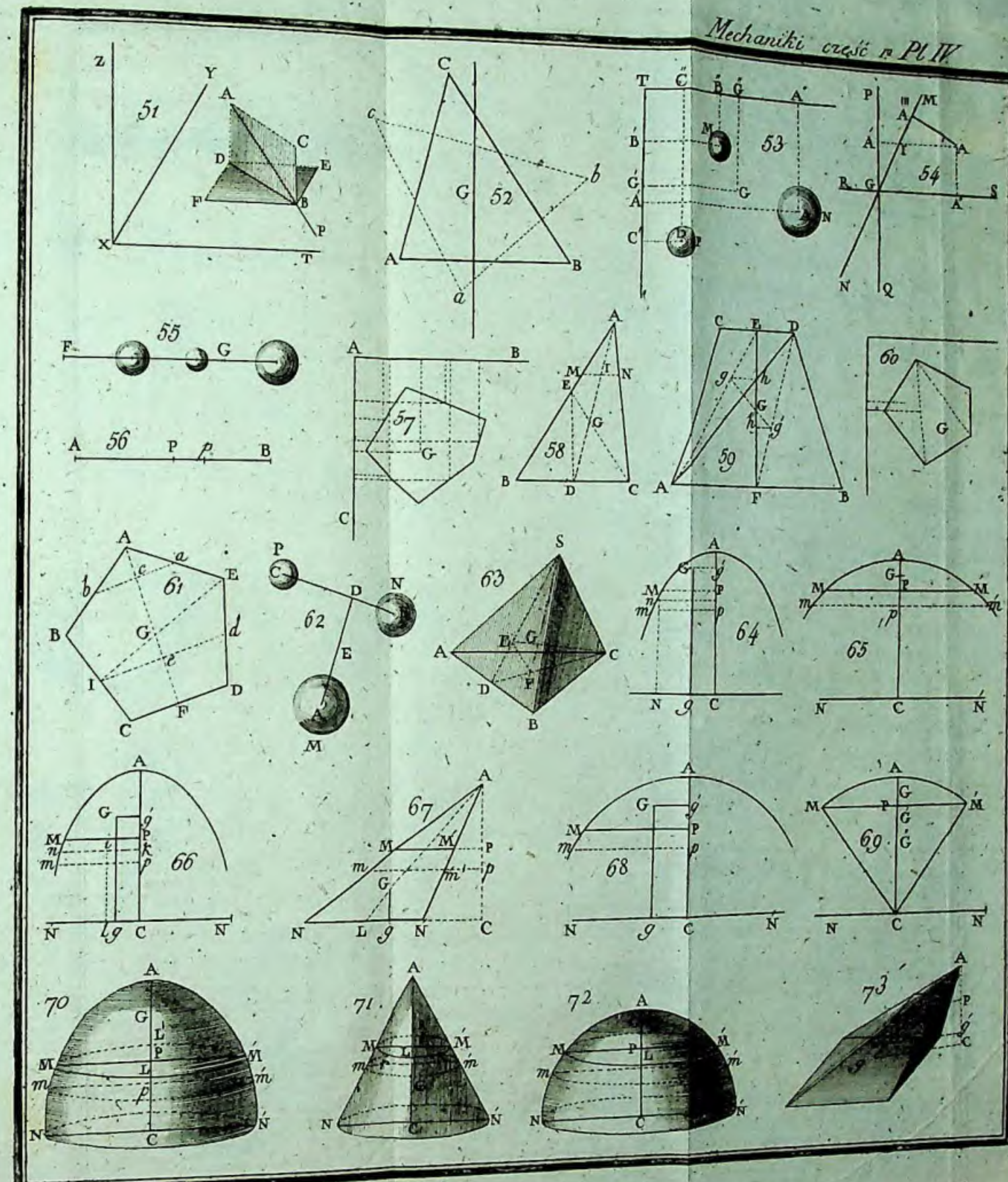



1
T A P p M r m Q
2
B M m r T A P p
3
A P p r M m T
4
M T A P C
5
M A P T
6
L' T' M M''' R R' S L T Q P S P' Q' A
7
A C B C'
8
A E D B G L K F C
9
C B P A
10
m'' m' m M A B N n
11
u m m' M r A P p p' N
12
A I O N K L P M p m r q t
13
A O P M
14
A K P Z M O B L S Y
15
M A A' P

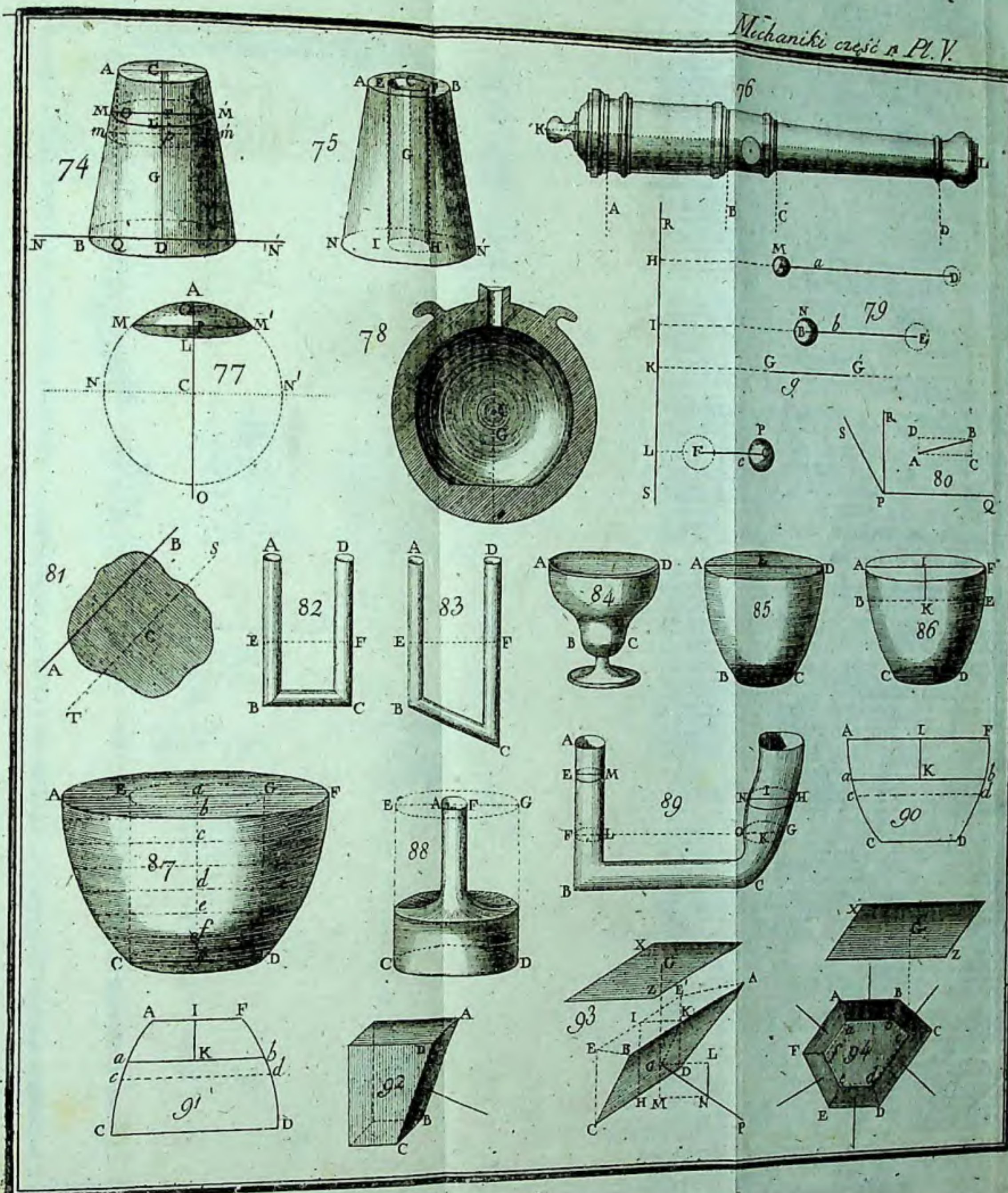

16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

Mechaniki część I. Pl. III.




51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73

Mechaniki część 2 Pl. V.



Mechaniki część I Pl VI.